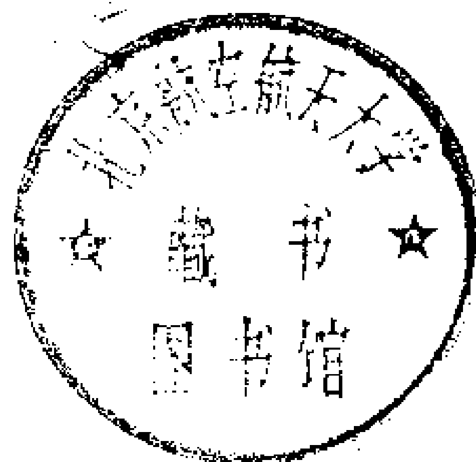
《中国工程物理研究院科技丛书》第 027 号

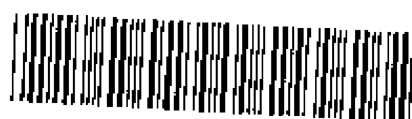
无穷维动力系统

（上册）

郭柏灵　著



国防工業出版社

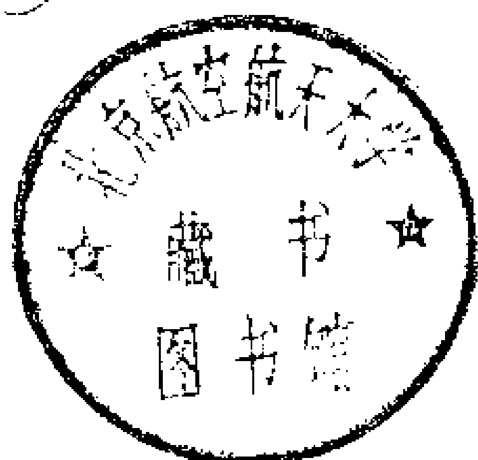


《中国工程物理研究院科技丛书》第 027 号

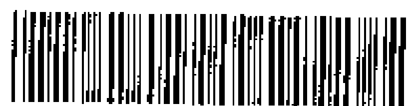
无穷维动力系统

（下册）

郭柏灵　著



国防工业出版社



图书在版编目(CIP)数据

无穷维动力系统/郭柏灵著．—北京：国防工业出版社，2000.1

（中国工程物理研究院科技丛书）

ISBN 7-118-02105-9

Ⅰ．无… Ⅱ．郭… Ⅲ．核武器-动力系统-计算 Ⅳ．TJ91

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 14307 号

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路 23 号）

（邮政编码 100044）

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店经售

×

开本 850×1168 1/32 印张 $30\frac{7}{8}$ 806 千字

2000 年 1 月第 1 版 2000 年 1 月北京第 1 次印刷

印数：1—1000 册 定价：48.00 元

《中国工程物理研究院科技丛书》出版说明

中国工程物理研究院建院30年来，坚持理论研究、科学实验和工程设计密切结合的科研方向，完成了国家下达的各项国防科研任务。通过完成任务，在许多专业学科领域里，不论在基础理论方面，还是在实验测试技术和工程应用技术方面，都有重要发展和创新，积累了丰富的知识和经验，造就了一大批优秀科技人材。

为了扩大科技交流与合作，促进我院事业的继承与发展，系统地总结我院30年来在各个专业领域里集体积累起来的经验，吸收国内外最新科技成果，形成一套系列科技丛书，无疑是一件十分有意义的事情。

这套丛书将部分地反映中国工程物理研究院科研工作的成果，内容涉及本院过去开设过的二十几个主要学科。现在和今后开设的新学科，也将编著出书，续入本丛书中。

这套丛书将在今后几年里陆续编辑出版。我院早些年零散编著出版的专业书籍，经编委会审定后，也纳入本丛书系列。

谨以这套丛书献给30年来为我国国防现代化而献身的人们！

《中国工程物理研究院科技丛书》编审委员会

1989年1月25日

《中国工程物理研究院科技丛书》
第三届编审委员会

《中国工程物理研究院科技丛书》

已 出 版 书 目

001 **高能炸药及相关物性能**
董海山、周芬芬主编 科学出版社 1989 年 11 月

002 **光学高速摄影测试技术**
谭显祥编著 科学出版社 1990 年 02 月

003 **凝聚炸药起爆动力学**
章冠人等编著 国防工业出版社 1991 年 09 月

004 **线性代数方程组的迭代解法**
胡家赣编著 科学出版社 1991 年 12 月

005 **映象与混沌**
陈式刚编著 国防工业出版社 1992 年 06 月

006 **再入遥测技术(上册)**
谢铭勋编著 国防工业出版社 1992 年 06 月

007 **再入遥测技术(下册)**
谢铭勋编著 国防工业出版社 1992 年 12 月

008 **高温辐射物理与量子辐射理论**
李世昌编著 国防工业出版社 1992 年 10 月

009 **粘性消动法和差分格式粘性**
郭柏灵著 科学出版社 1993 年 03 月

010 **无损检测技术及其应用**
张俊哲等著 科学出版社 1993 年 05 月

011 **半导体材料辐射效应**
曹建中著 科学出版社 1993 年 05 月

012 **炸药热分析**
楚士晋编著 科学出版社 1994 年 12 月

013 **脉冲辐射场诊断技术**

刘庆兆主编　　科学出版社　　1994年12月

014　放射性核素活度的测量方法和技术

古当长编著　　科学出版社　　1994年12月

015　二维非定常流和激波

王继海编著　　科学出版社　　1994年12月

016　抛物型方程差分方法引论

李德元　陈光南著　　科学出版社　　1995年12月

017　特种结构分析

刘新民　韦日演主编　　国防工业出版社　　1995年12月

018　理论爆轰物理

孙锦山　朱建士著　　国防工业出版社　　1995年12月

019　可靠性维修性可用性评估手册

潘吉安编著　　国防工业出版社　　1995年12月

020　脉冲辐射场测量数据处理与误差分析

陈元金编著　　国防工业出版社　　1997年01月

021　近代成象技术与图象处理

吴世法著　　国防工业出版社　　1997年03月

022　一维流体力学差分方法

水鸿寿著　　国防工业出版社　　1998年02月

023　抗辐射电子学

——辐射效应及加固原理

赖祖武等著　　国防工业出版社　　1998年07月

024　金属的环境氢脆及其试验技术

周德惠　谭云编著　　国防工业出版社　　1998年12月

025　实验核物理测量中的粒子分辨

段绍节编著　　国防工业出版社　　1999年06月

026　实验物态方程导引(第二版)

经福谦著　　科学出版社　　1999年09月

027　无穷维动力系统

郭柏灵著　　国防工业出版社　　2000年01月

前　　言

1993年，作者在“非线性演化方程”一书第五章中曾对无穷维动力系统的基本概念、研究方法和研究概况作了一个简要的介绍。由于篇幅所限，未能对这些内容作进一步深入的讨论，再加上最近五年来又有不少新的重要结果不断出现，这就促使作者下了一个决心：写一本有关无穷维动力系统的专门著作。

本书旨在让读者了解有关无穷维动力系统基本知识的基础上，用比较简单明了、深入浅出的方法和尽量少的篇幅，来介绍当前无穷维动力系统研究中令人关注的问题以及取得的重要的新结果，其中包括作者本人以及他的合作者所得到的一些结果。第一章，吸引子以及维数估计，主要介绍近代物理中提出的某些具耗散的非线性发展方程整体吸引子的存在性及其Hausdorff维数、fractal维数的估计，其中包括有界域和无界域的、空间一维和高维的。第二章，惯性流形，主要介绍对于很广泛的抽象微分方程在很一般的情况下给出了精确的谱间隙条件，证明了惯性流形的存在性，同时还讨论了惯性流形的光滑性、正规双曲性等。第三章，近似惯性流形，主要介绍各种近似惯性流形的构造和数值逼近，以及近似惯性流形的收敛性，并从而导致了惯性流形存在性的另一种构造性证明。第四章，离散吸引子及近似计算，主要介绍各种离散形式吸引子的存在性，它们和有限维动力系统紧密联系起来，用数值计算结果显示了整体吸引子、近似惯性流形的具体图象。第五章，整体吸引子的某些性质，主要介绍了整体吸引子的振荡性质。它的渐近行为可由少数几个点决定的性质以及它和双曲不动点的不稳定流形的紧密联系，用几何测度论的方法和结果估计了整体吸引子水平集Hausdorff测度的上界，同时，还给出了一种方法，估计

了吸引子维数的下界。第六章，具小耗散系统的结构，主要介绍了用几何摄动理论、无限维中心流形理论以及多维 Melnikov 函数研究在小扰动下稳定、不稳定流形的不变性以及出现混沌的状况，其中稳定流形、不稳定流形的性质还和纤维丛上的第一陈数密切相关。第七章，孤立波的存在性和稳定性，主要介绍用集中紧致原理证明多维孤立波的存在性以及用某种能量泛函方法和谱分析方法研究孤立波的非线性稳定性、不稳定性和渐近稳定性。

由于无穷维动力系统的研究内容十分丰富和非常广泛，它和许多学科如流体力学、分形理论、泛函分析、拓扑学、几何测度论、计算数学等紧密相连，各种研究方法和结果不断涌现，限于作者现有的水平和能力，本书难免存在许多不妥、不够全面甚至错误，敬请读者给予批评和指正。

这里我要衷心感谢鲁百年、蒋慕蓉、李用声、苗晨霞、高洪俊、林国广、邢家省、元荣等，他们热情地帮助作者校对、修改、打印全书的书稿，为此他们付出了许多艰辛的劳动，使作者深受感动。

最后，作者衷心感谢周毓麟院士对本书的关心和帮助；衷心感谢孙和生、井竹君、常谦顺、水鸿寿教授，他们审阅本书的内容，并提出了许多宝贵的意见。

郭柏灵

1998 年春节于北京

内容简介

本书是有关无穷维动力系统数学理论方面的专著。

本书旨在让读者了解有关无穷维动力系统基本知识的基础上，用比较简单明了，深入浅出的方法和尽量少的篇幅，来介绍当前无穷维动力系统研究中令人关注的问题以及取得的重要的新结果，其中包括作者本人以及其他的写作者所得到的一些结果。

全书共分七章：第一章吸引子及维数估计，第二章惯性流形，第三章近似惯性流形，第四章离散吸引子及近似计算，第五章整体吸引子的某些性质，第六章具小耗散系统的结构，第七章孤立波的存在性和稳定性。

本书可供应用数学专业的高年级本科生和研究生作参考书，也可供从事非线性科学研究的科研人员参考。

目　录

第一章　吸引子及其维数估计

1.1　整体吸引子及其 Hausdorff、分形维数估计

本节将引入无穷维动力系统中的非常重要的一个概念——整体吸引子，叙述整体吸引子的存在定理以及对其 Hausdorff 维数、分形维数的估计。

定义 1.1.1　设 E 为 Banach 空间，$S(t)$ 为连续的算子半群，即有 $S(t):E\to E$，$S(t+\tau)=S(t)\cdot S(\tau)$，$\forall t,\tau\geqslant 0$，$S(0)=I$（恒等算子）。如果紧集 $\mathscr{A}\subset E$ 满足：

(i)不变性：即在半群 $S(t)$ 作用下为不变集

$$S(t)\mathscr{A}=\mathscr{A};\forall t\geqslant 0 \tag{1.1.1}$$

(ii)吸引性：$\mathscr{A}$ 吸引 E 中一切有界集，即对任何有界集 $B\subset E$ 有

$$\operatorname{dist}\ (S(t)B,\mathscr{A})=\sup_{x\in B}\inf_{y\in\mathscr{A}}\|S(t)x-y\|_E\to 0,t\to\infty \tag{1.1.2}$$

特别地，有当 $t\to\infty$ 时，从 u_0 出发的一切轨线 $S(t)u_0$ 收敛于 $\mathscr{A}$，即有

$$\operatorname{dist}\ (S(t)u_0,\mathscr{A})\to 0,t\to\infty \tag{1.1.3}$$

那么，紧集 $\mathscr{A}$ 称为半群 $S(t)$ 的整体吸引子。

整体吸引子的结构是很复杂的。对于一个非线性演化方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=F(u(t)) \tag{1.1.4}$$

$$u(0)=u_0 \tag{1.1.5}$$

它所生成的半群 $S(t)$ 除了包括方程的简单平衡点(可能是多重解)外,还包括时间周期的轨道,拟周期解的轨道,以及分形、奇异吸引子等,它可能不是光滑流形,且具有非整数维数。

为了给出整体吸引子的存在定理,我们需要引进吸收集的概念。

定义 1.1.2 对于有界集 $B_0 \subset E$,使得对任何有界集 $B \subset E$,如存在 $t_0(B) > 0$,有

$$S(t)B \subset B_0, \quad \forall t \geqslant t_0(B) \tag{1.1.6}$$

则称 B_0 为 E 中的有界吸收集。

定理 1.1.1 设 E 为 Banach 空间,$S(t), t \geqslant 0$ 为算子半群,$S(t): E \to E, S(t+\tau) = S(t) \cdot S(\tau), t, \tau \geqslant 0, S(0) = I$,其中 I 为恒等算子。设半群 $S(t)$ 满足以下条件:

(i) 半群 $S(t)$ 在 E 中一致有界,即对一切 $R > 0$,存在常数 $C(R)$,使得当 $\|u\|_E \leqslant R$ 时,有

$$\|S(t)u\|_E \leqslant C(R), \quad \forall t \in [0, \infty) \tag{1.1.7}$$

(ii) 存在 E 中有界的吸收集 B_0。 (1.1.8)

(iii) 当 $t > 0$ 时,$S(t)$ 为全连续算子。

则半群 $S(t)$ 具有紧的整体吸引子 $\mathscr{A}$。

附注 1.1.1 如将条件(ii)中的有界吸收集 B_0 改换为存在紧的吸收集合 B_0,则条件(iii)中 $S(t)$ 的全连续性可改为 $S(t)$ 为连续算子,这时定理 1.1.1 仍成立。

附注 1.1.2 可以证明上述的整体吸引子 $\mathscr{A}$ 为吸收集 B_0 的 ω 极限集,即有

$$\mathscr{A} = \omega(B_0) = \bigcap_{s \geqslant 0} \overline{\bigcup_{t \geqslant s} S(t)B_0} \tag{1.1.9}$$

其中闭包在 E 上取。

另一个常用的吸引子的存在定理为:

定理 1.1.2 设 E 为 Banach 空间,半群 $S(t)$ 是连续的。设存在一个开集 $\mathscr{U} \subset E$ 和 $\mathscr{U}$ 的一个有界集 $\mathscr{B}$,使得 $\mathscr{B}$ 在 $\mathscr{U}$ 中是吸收的。又设满足条件:

(1) 算子 $S(t)$ 对充分大的 t 是一致紧的,即对每个有界集 $\mathscr{B}$,

存在$t=t_0(\mathscr{B})$，使得

$$\bigcup_{t\geqslant t_0} S(t)\mathscr{B} \tag{1.1.10}$$

在E中是相对紧的。或

(2) $S(t)=S_1(t)+S_2(t)$，其中算子$S_1(\cdot)$对充分大的t是一致紧的(即满足条件(1.1.10))，算子$S_2(t)$为连续映射，$S_2(t):E\to E$，且对每个有界集$B\subset E$，

$$r_B(t)=\sup_{\phi\in B}\|S_2(t)\phi\|_E\to 0 \tag{1.1.11}$$

则$\mathscr{B}$的ω极限集$\mathscr{A}=\omega(\mathscr{B})$是紧的吸引子，它吸引$\mathscr{U}$中的有界集。它是在$\mathscr{U}$中的最大有界吸引子，且当$\mathscr{U}$既凸又连通时，$\mathscr{A}$是连通的。

因此，要证明整体吸引子的存在性，就是要验证定理1.1.1或定理1.1.2的假设是否成立，最主要的是：

(i) 半群$S(t)$的存在性与连续性；

(ii) 存在一个有界或紧的吸收集；

(iii) $S(t)(t\geqslant 0)$为全连续算子或满足条件(1.1.10)(或条件(1.1.11))。

为了对整体吸引子的几何性质作最简单的刻画，我们可对它的Hausdorff维数、分形维数作一些估计。

定义1.1.3 集合X的Hausdorff测度为

$$\mu_H(X,d)=\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_H(X,d,\varepsilon)=\sup_{\varepsilon>0}\mu_H(X,d,\varepsilon) \tag{1.1.12}$$

其中

$$\mu_H(X,d,\varepsilon)=\inf\sum_i r_i^d \tag{1.1.13}$$

这里inf是对一切覆盖X的半径$r_i\leqslant\varepsilon$的球而取的。如果存在一个数$d=d_H(X)\in[0,+\infty]$，使得

$$\mu_H(X,d)=0,d>d_H(X) \tag{1.1.14}$$

$$\mu_H(X,d)=\infty,d<d_H(X) \tag{1.1.15}$$

则称这个数$d_H(X)$为集合X的Hausdorff维数。

定义1.1.4 集合X的分形维数为

$$d_F(X) = \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{\lg n_X(\epsilon)}{\lg \frac{1}{\epsilon}} \tag{1.1.16}$$

其中 $n_X(\epsilon)$为覆盖 X 的半径$\leqslant\epsilon$的所有球的最小数目。易知

$$d_F(X) = \inf\{d > 0, \mu_F(X,d) = 0\} \tag{1.1.17}$$

其中

$$\mu_F(X,d) = \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon^d n_X(\epsilon) \tag{1.1.18}$$

因为 $\mu_F(X,d) \geqslant \mu_H(X,d)$，因此有

$$d_H(X) \leqslant d_F(X) \tag{1.1.19}$$

现考虑初值问题

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = F(u(t)), t > 0 \tag{1.1.20}$$

$$u(0) = u_0 \tag{1.1.21}$$

其中 $F(u)$为给定函数，$F(u): E \to E$，E 为 Hilbert 空间。设对任何 $u_0 \in E$，存在整体解 $u(t) \in E$，记 $u(t) = S(t)u_0$，映射 $S(t): E \to E$ 为初值问题(1.1.20)、(1.1.21)的半群。

设 $F: E \to E$ 为 Fréchet 可微，线性初值问题

$$\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t} = F'(S(t)u_0)U(t) \tag{1.1.22}$$

$$U(0) = \xi \tag{1.1.23}$$

对每个 u_0 和 $\xi \in E$ 是可解的。最后设 $S(t)$是可微的，具有导数 $L(t,u_0)$，定义为

$$L(t,u_0)\xi = U(t), \ \forall \xi \in E \tag{1.1.24}$$

且 $U(t)$ 是问题(1.1.22)、(1.1.23)的解。因为(1.1.22)是(1.1.20)的一阶变分方程，以上所作假设是很自然的，而且也是容易验证的。

对于固定的 $u_0 \in E$，设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_J$ 是 E 中的 J 个元素，令 $U_1(t), U_2(t), \cdots, U_J(t)$是线性化方程(1.1.22)具初值

$$U_1(0) = \xi_1, U_2(0) = \xi_2, \cdots, U_J(0) = \xi_J$$

的 J 个解。通过直接计算，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| U_1(t) \wedge \cdots \wedge U_J(t) \|^2_{\wedge E} -$$

$$2\mathrm{tr}(F'(u(t)) \cdot Q_J) \| U_1(t) \wedge \cdots \wedge U_J(t) \|^2_{\wedge E} = 0 \tag{1.1.25}$$

其中 $F'(u(t)) = F'S(t)u_0$ 是线性映射 $U \to F'(u(t))U$；$u(t) = S(t)u_0$是问题(1.1.20)、(1.1.21)的解；$\wedge$ 表示外积；tr 表示算子的迹；Q_J 表示 E 到 $U_1(t), U_2(t), \cdots, U_J(t)$所生成子空间的直交投影。$J$ 维体积$\wedge^J_{j=1}\xi$ 为

$$\omega_J(t) = \sup_{u_0 \in A} \sup_{\xi_j \in E} \| U_1(t) \wedge \cdots \wedge U_J(t) \|^2_{\wedge^J E} \tag{1.1.26}$$

其中 A 为半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$的不变集。容易验证 $\omega_j(t)$关于 t 是次指数的，即有

$$\omega_j(t+t') \leqslant \omega_j(t)\omega_j(t'), \ \forall t, t' \geqslant 0 \tag{1.1.27}$$

因此

$$\lim_{t\to\infty} \omega_j(t)^{\frac{1}{t}} = \prod\nolimits_j, \ \forall j, 1 \leqslant j \leqslant J \tag{1.1.28}$$

是存在的。由(1.1.25)可得

$$\prod\nolimits_J \leqslant \exp q_J \tag{1.1.29}$$

其中

$$q_J = \limsup_{t\to\infty} q_J(t) \tag{1.1.30}$$

$$q_J(t) = \sup_{u_0 \in A} \sup_{\xi_j \in E, \|\xi_j\|_E \leqslant 1} \left\{ \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{tr}(F'(S(\tau)u_0)Q_J(\tau))\mathrm{d}\tau \right\} \tag{1.1.31}$$

定义 1.1.5 一组数列 $\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots, \Lambda_m$ 定义如下

$$\Lambda_1 = \prod\nolimits_1, \Lambda_1\Lambda_2 = \prod\nolimits_2, \cdots, \Lambda_1 \cdots \Lambda_m = \prod\nolimits_m$$

或者

$$\Lambda_1 = \prod\nolimits_1, \Lambda_m = \frac{\prod_m}{\prod_{m-1}}, m \geqslant 2 \tag{1.1.32}$$

$$\Lambda_m = \lim_{t\to\infty}\left\{\frac{\omega_m(t)}{\omega_{m-1}(t)}\right\}^{\frac{1}{t}}, \quad m \geqslant 2$$

则称 Λ_m 为在集合 A 上的整体(或一致)李雅普诺夫数,称

$$\mu_m = \lg\Lambda_m, m > 1$$

为相应的李雅普诺夫指数。由式(1.1.29),有

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_J \leqslant q_J \tag{1.1.33}$$

定理 1.1.3 在以上关于初值问题(1.1.20)、(1.1.21)和初值问题(1.1.22)、(1.1.23)可解性假设之下,如果对某个 J 和 $t_0>0$ 有

$$q_J(t) \leqslant -\delta < 0, \forall t \geqslant t_0 \tag{1.1.34}$$

则体积元 $\| U_1(t)\wedge\cdots\wedge U_J(t)\|_{\wedge^J E}$,当 $t\to\infty$时指数衰减,对 $u_0\in A,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_J\in E$ 一致有

$$\| U_1(t) \wedge \cdots \wedge U_J(t) \|_{\wedge^m E} \leqslant$$
$$\| U_1(t_0) \wedge \cdots \wedge U_m(t_0) \|_{\wedge^J E}\exp(-\delta(t-t_0))$$

如果 A 是半群 $S(t)$的有界泛函不变集,则对某 j,

$$q_j < 0 \tag{1.1.35}$$

成立

$$\prod_j = \Lambda_1\Lambda_2\cdots\Lambda_j < 1, \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_j < 0$$

由此推出

$$\Lambda_j < 1 \tag{1.1.36}$$

即

$$\mu_j < 0 \tag{1.1.37}$$

定理 1.1.4 设非线性演化方程的初值问题(1.1.20)、(1.1.21)存在整体吸引子,它在 $H^1(\Omega)$中有界。设线性初值问题(1.1.22)、(1.1.23)是可解的,由初值问题(1.1.20)、(1.1.21)所确定的半群 $S(t)$是可微的。如果对于某 j,式(1.1.30)所定义的

$$q_j < 0 \tag{1.1.38}$$

则整体吸引子 A 的 Hausdorff 维数和分形维数是有限的,且 A 的

Hausdorff 维数$\leqslant j$。它的分形维数小于或等于

$$j\left(1+\max_{1\leqslant l\leqslant j-1}\frac{(q_l)_+}{|q_j|}\right) \tag{1.1.39}$$

如果减弱对 $S(t)$ 的 Fréchet 可微的条件，我们可以只要求 $S(t)$ 在紧致不变子集 X 上是一致可微的，即对于每个 $u\in X$，存在线性算子 $L(t,u)\in\mathscr{L}(\mathscr{E})$，且

$$\sup_{\substack{u,v\in X\\0<|u-v|\leqslant\varepsilon}}\frac{|S(t)u-S(t)v-L(t,u)(u-v)|}{|u-v|}\to 0,\varepsilon\to 0 \tag{1.1.40}$$

$$\sup_{u\in X}|L(t,u)|_{\mathscr{L}(\mathscr{E})}<+\infty \tag{1.1.41}$$

$$\sup_{u\in X}\omega_d(L(t,u))<1,\text{对某个实数 } d>0 \tag{1.1.42}$$

其中 $\omega_d(L)=\omega_n^{1-s}(L)\omega_{n-1}^{s}(L),d=n+s$。我们有

定理 1.1.5 在假设(1.1.40)～(1.1.42)之下，X 的 Hausdorff 维数是有限的，且小于或等于 d。

1.2 Kuramoto-Sivashinsky 方程

Kuramoto-Sivashinsky 方程(简称 KS 方程)

$$\varphi_t+\frac{1}{2}(\varphi_x)^2+\nu\varphi+\alpha\varphi_{xx}+\gamma\varphi_{xxxx}=0 \tag{1.2.1}$$

是 1978 年 Kuramoto 在文献[39]中研究反应扩散系统中和 1977 年 Sivashinsky 在文献[40]中研究火焰燃烧传播模型中独立提出的，其中 α,γ 和 ν 均为正常数。这类问题也出现于膜振动(如见文献[41]，1982)和 Navier-Stokes 方程的分叉解(如见文献[42])等。在文献[43]中，Nicolaenko 等对于一维 KS 方程的整体吸引子及分叉解等进行系统的深入的研究。在文献[44]中 B. Nicolaenko 提出了一类广泛的 KS 型方程(其中包括高维 KS 方程)。在文献[45]中，郭、井等研究了广义 KS 方程 $t\to\infty$ 解的渐进行态。行波解的详细结构。用李群和无穷小变换方法得到的相似解以及用谱方

法得到的近似解等。在文献[46]中，郭证明一维广义 KS 方程整体吸引子的存在性及其维数的有限性，1993 年郭、苏在文献[47]中对于高维广义 KS 方程的整体吸引子的存在性首次给出了证明，并对它的 Hausdorff 维数和分形维数作了估计。

方程(1.2.1)中如令 $u=\varphi_x$ 可得另一种更为熟知的形式

$$u_t + uu_x + \nu u + \alpha u_{xx} + \gamma u_{xxxx} = 0 \tag{1.2.2}$$

我们考虑如下多维广义 KS 型方程

$$u_t + \alpha\Delta u + \gamma\Delta^2 u + \nabla\cdot f(u) + \Delta\varphi(u) = g(u) + h(x) \tag{1.2.3}$$

具周期初始条件

$$u(x,t) = u(x+2de_i,t), x\in\Omega, t\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n \tag{1.2.4}$$

$$u(x,0) = u_0(x), x\in\Omega \tag{1.2.5}$$

其中 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为 n 维边长为 $2d$ 的立方体，即

$$\bar{\Omega} = \{x=(x_1,\cdots,x_n)\,|\,|x_i|\leqslant d, i=1,2,\cdots,n\}$$

这里：$x+2de_i=(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i+2d,x_{i+1},\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,n)$；常数 $\alpha\geqslant 0$；$\gamma>0$；$\nabla\cdot f(u)=\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k(u)}{\partial x_k}$；$\Delta u=\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$。当 $\alpha=0, f(u)=0$，(1.2.3) 方程是众所周知的非齐次 Cahn-Hilliard 方程。

为了证明整体吸引子的存在性，我们先给出一致先验估计。

引理 1.2.1 设

(1) $\varphi'(u)\leqslant\varphi_0$；

(2) $\gamma>\frac{\alpha+\varphi_0}{2}$；

(3) $g(0)=0, g'(u)\leqslant g_0, g_0<-\frac{(\alpha+\varphi_0+1)}{2}$；

(4) $h(x)\in L^2(\Omega), u_0(x)\in L^2(\Omega)$。

则对问题(1.2.3)～(1.2.5)的光滑解，有如下估计：

$$\|u(\cdot,t)\|^2 \leqslant e^{(2g_0+\alpha+1+\varphi_0)t}\|u_0(x)\|^2 +$$

$$\frac{1}{|2g_0+\alpha+\varphi_0+1|}(1-e^{(2g_0+\alpha+1+\varphi_0)t})\|h(x)\|^2,$$

$$0<t<\infty \tag{1.2.6}$$

进一步，有

$$\limsup_{t\to\infty}\|u(\cdot,t)\|^2\leqslant\frac{\|h(x)\|^2}{|2g_0+\alpha+1+\varphi_0|}=E_0 \tag{1.2.7}$$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\|\Delta u(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\frac{1}{[2\gamma-(\alpha+\varphi_0)]}[\|u_0(x)\|^2+\|h(x)\|^2] \tag{1.2.8}$$

证明 作式(1.2.3)和 u 的内积得

$$(u,u_t+\alpha\Delta u+\gamma\Delta^2u+\nabla\cdot f(u)+$$
$$\Delta\varphi(u)-g(u)-h(x))=0 \tag{1.2.9}$$

其中

$$(\nabla\cdot f(u),u)=\int_\Omega\sum_{k=1}^n\frac{\partial f_k(u)}{\partial x_k}u\mathrm{d}x=$$
$$-\sum_{k=1}^n\int_\Omega f_k(u)u_{x_k}\mathrm{d}x=$$
$$-\sum_{k=1}^n\int_\Omega\Phi_k(u)_{x_k}\mathrm{d}x=0$$

$$\Phi_k(u)=\int_0^u f_k(u)\mathrm{d}u$$

$$(\Delta\varphi(u),u)=-(\nabla\varphi(u),\nabla u)=$$
$$-(\varphi'(u),|\nabla u|^2)\geqslant-\varphi_0\|\nabla u\|^2$$

由 Gagliardo-Nirenberg 不等式

$$\|\nabla u\|^2\leqslant\|\Delta u\|\|u\|\leqslant\frac{1}{2}(\|\Delta u\|^2+\|u\|^2)$$

于是有

$$|(u,\alpha\Delta u)|=\alpha\|\nabla u\|^2\leqslant\frac{\alpha}{2}(\|\Delta u\|^2+\|u\|^2)$$

因

$$(g(u),u) \leqslant g_0 \| u \|^2$$

$$(h(x),u) \leqslant \frac{1}{2}(\| u \|^2 + \| h(x) \|^2)$$

因此从(1.2.9)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u(\cdot,t) \|^2 + (\gamma - \frac{\alpha + \varphi_0}{2})\| \Delta u(\cdot,t) \|^2 \leqslant$$

$$(g_0 + \frac{\alpha + \varphi + 1}{2})\| u(\cdot,t) \|^2 + \frac{1}{2}\| h(x) \|^2 \tag{1.2.10}$$

应用 Gronwall 不等式，由式(1.2.10)推出式(1.2.6)、(1.2.7)、(1.2.8)。

引理 1.2.2　在引理 1.2.1 条件下，设

(1) $\max\limits_{k=1,\cdots,n} |f_k(u)| \leqslant A|u|^p, 1 \leqslant p \leqslant \frac{6}{n}+1$；

(2) $|\varphi'(u)| \leqslant B|u|^q, 0 \leqslant q < \frac{4}{n}$；

(3) $h(x) \in L^2(\Omega), u_0(x) \in H^1(\Omega), \Omega \subset \mathbf{R}^n, 1 \leqslant n \leqslant 6$。

则对问题(1.2.3)～(1.2.5)的解，有如下估计

$$\| \nabla u(\cdot,t) \|^2 \leqslant \mathrm{e}^{2g_0 t}\| \nabla u_0(x) \|^2 +$$

$$\frac{1}{|g_0|}(1 - \mathrm{e}^{2g_0 t})(C_6 \| h(x) \|^2 + C_7),$$

$$0 \leqslant t < \infty \tag{1.2.11}$$

其中函数 $C_6(\cdot), C_7(\cdot)$，依赖 $\| u(\cdot,t) \|$。更进一步有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \| \nabla u(\cdot,t) \|^2 \leqslant \frac{1}{|g_0|} \times$$

$$[\max_{t\geqslant 0} C_6(\| u(\cdot,t) \|)\| h(x) \|^2 + \max_{t\geqslant 0} C_7(\| u(\cdot,t) \|)] = E_1 \tag{1.2.12}$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \| \nabla \Delta u(\cdot,t) \|^2 \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\frac{6}{\gamma}[\| u_0(x) \|_{H^1}^2 + \max_{t\geqslant 0} C_6 \| h \|^2 + \max_{t\geqslant 0} C_7] \tag{1.2.13}$$

证明 作(1.2.3)和 Δu 的内积可得

$$(\Delta u, u_t + \alpha\Delta u + \gamma\Delta^2 u + \nabla\cdot f(u) + \Delta\varphi(u) - g(u) - h(x)) = 0 \tag{1.2.14}$$

其中

$$(\Delta u, -g(u)) = (\nabla g(u), \nabla u) = (g'(u)\nabla u, \nabla u) \leqslant$$
$$g_0 \| \nabla u \|^2 |(\Delta u, \Delta\varphi(u))| =$$
$$|(\nabla\varphi(u), \nabla\Delta u)| = |(\varphi'(u)\nabla u, \nabla\Delta u)| \leqslant$$
$$\frac{\gamma}{6}\| \nabla\Delta u \|^2 + \frac{3}{2\gamma}\| \varphi'(u)\nabla u \|^2$$

由于 $|\varphi'(u)| \leqslant B|u|^q$,有

$$\frac{3}{2\gamma}\| \varphi'(u)\nabla u \|^2 \leqslant \frac{3}{2\gamma}\| \varphi'(u) \|_\infty^2 \| \nabla u \|^2 \leqslant$$
$$\frac{3}{2\gamma}B^2 \| u \|_\infty^{2q} \| \nabla u \|^2$$

由 Sobolev 插值不等式

$$\| u \|_\infty \leqslant C_1 \| \nabla\Delta u \|^{\frac{n}{6}} \| u \|^{\frac{6-n}{6}} + C_1' \| u \|$$
$$\| \nabla u \| \leqslant C_2 \| \nabla\Delta u \|^{\frac{1}{3}} \| u \|^{\frac{2}{3}} + C_2' \| u \|, 1 \leqslant n \leqslant 6$$

于是可得

$$\frac{3}{2\gamma}\| \varphi'(u)\nabla u \|^2 \leqslant$$
$$\frac{3}{2\gamma}B^2 C_1^{2q} C_2^2 \| \nabla\Delta u \|^{\frac{nq+2}{3}} \| u \|^{((6-n)q+4)/3} \leqslant$$
$$\frac{\gamma}{6}\| \nabla\Delta u \|^2 + C_3(C_1, C_2, q, \| u \|), 0 < q < \frac{4}{n}$$
$$|(\nabla\cdot f(u), \Delta u)| = |\sum_{k=1}^n \int_\Omega f_k(u) \frac{\partial}{\partial x_k}\Delta u \mathrm{d}x| \leqslant$$
$$\sum_{k=1}^n \| f_k(u) \| \| \nabla\Delta u \| \leqslant$$
$$\frac{\gamma}{6}\| \nabla\Delta u \|^2 + \frac{3}{2\gamma}\sum_{k=1}^n \| f_k(u) \|^2$$

其中

$$\frac{3}{2\gamma}\|f_k(u)\|^2\leqslant$$

$$\frac{3}{2\gamma}A^2\|u\|_{2p}^{2p}\leqslant\frac{3}{2\gamma}A^2\|u\|_{\infty}^{2p-2}\|u\|^2\leqslant$$

$$\frac{3}{2\gamma}A^2C^{2p-2}\|\nabla\Delta u\|^{\frac{n(p-1)}{3}}\|u\|^{\frac{n+(6-n)p}{3}},$$

$$1\leqslant p<\frac{6}{n}+1\leqslant\frac{3}{2\gamma}\|\nabla\Delta u\|^2+C_4(\gamma,A,\|u\|),$$

$$\alpha\|\nabla u\|^2\leqslant\alpha C_2\|\nabla\Delta u\|^{\frac{4}{3}}\|u\|^{\frac{2}{3}}\leqslant$$

$$\frac{\gamma}{6}\|\nabla\Delta u\|^2+C_5(\alpha,C_2,\|u\|),$$

$$(\Delta u,-g(u))=(g'(u)\nabla u,\nabla u)\leqslant g_0\|\nabla u\|^2$$

$$(\Delta u,-h(x))\leqslant\frac{\gamma}{12}\|\nabla\Delta u\|^2+C_6\|h(x)\|^2$$

于是从式(1.2.14)有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|^2+\frac{\gamma}{12}\|\nabla\Delta u\|^2\leqslant$$

$$g_0\|\nabla u\|^2+C_6\|h\|^2+C_7(\|u\|)$$

这就推出

$$\|\nabla u(\cdot,t)\|^2\leqslant \mathrm{e}^{2g_0t}\|\nabla u_0(x)\|^2+$$

$$\frac{1}{|g_0|}(1-\mathrm{e}^{2g_0t})(C_6\|h\|^2+C_8)$$

以及(1.2.12)、(1.2.13)。

引理 1.2.3 在引理 1.2.2 条件下,设

(1) $\max\limits_{k=1,\cdots,n}|f_k(u)|\leqslant A|u|^{p-1}$, $|\varphi''(u)|\leqslant B|u|^{q-2}$;

(2) $|g''(u)|\leqslant C|u|^l$, $0\leqslant l<\frac{40}{3n}-\frac{4}{3}$;

(3) $u_0(x)\in H^2(\Omega)$。

则有

$$\|\Delta u(\cdot,t)\|^2\leqslant \mathrm{e}^{2g_0t}\|\Delta u_0(x)\|^2+$$

$$\frac{1}{|g_0|}(1-\mathrm{e}^{2g_0 t})(\frac{3}{\gamma}\|h\|^2+C_{12}) \qquad (1.2.15)$$

其中函数C_{12}依赖$\|u(\cdot,t)\|_{H^1}$。更进一步有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|\Delta u(\cdot,t)\|^2\leqslant\frac{1}{|g_0|}[\frac{3}{\gamma}\|h(x)\|^2+$$

$$\max_{t\geqslant 0}C_{12}(\|u(\cdot,t)\|_{H^1})]=E_2 \qquad (1.2.16)$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t\|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\frac{2}{\gamma}[\|u_0(x)\|^2-\frac{3}{\gamma}\|h\|^2+\max_{t\geqslant 0}C_{12}] \qquad (1.2.17)$$

证明 作(1.2.3)和$\Delta^2 u$的内积得

$$(\Delta^2 u,u_t+\alpha\Delta u+\gamma\Delta^2 u+\nabla\cdot f(u)+$$

$$\Delta\varphi(u)-g(u)-h(x))=0 \qquad (1.2.18)$$

其中

$$|(\Delta^2 u,\nabla\cdot f(u))|\leqslant$$

$$\sum_{k=1}^n\|f_k'(u)\|_\infty\|\nabla u\|\|\Delta^2 u\|\leqslant$$

$$nA\|u\|_\infty^{p-1}\|\nabla u\|\|\Delta^2 u\|\leqslant$$

$$nAC_1\|\nabla\Delta u\|^{\frac{(p-1)n}{6}}\|u\|^{\frac{(p-1)(6-n)}{6}}\|\nabla u\|\|\Delta^2 u\|\leqslant$$

$$nAC_1C_4^{\frac{n(p-1)}{6}}\|\nabla u\|^{\frac{(p-1)n}{18}}\|\Delta^2 u\|^{\frac{(p-1)n}{9}}$$

$$\|u\|^{\frac{(p-1)(6-n)}{6}}\|\nabla u\|\|\Delta^2 u\|\leqslant$$

$$\frac{\gamma}{6}\|\Delta^2 u\|^2+C_3(\|u\|_{H^1})$$

上式中，我们用到了如下的 Sobolev 插值不等式：

$$\|\nabla\Delta u\|\leqslant C_4\|\nabla u\|^{\frac{1}{3}}\|\Delta^2 u\|^{\frac{2}{3}}+C\|u\|$$

$$|(\Delta\varphi(u),\Delta^2 u)|\leqslant$$

$$\|\varphi'(u)\Delta u+\varphi''(u)(\nabla u)^2\|\|\Delta^2 u\|\leqslant$$

$$[\|\varphi'(u)\|_\infty\|\Delta u\|+\|\varphi''(u)\|_\infty\|\nabla u\|_\infty\|\nabla u\|]$$

$$\|\Delta^2 u\|\leqslant(B\|u\|_\infty^q C_5\|\Delta^2 u\|^{\frac{1}{3}}\|u\|^{\frac{2}{3}}+$$

$$B\|u\|^{q-1}_\infty C_6\|\Delta^2u\|^{\frac{n}{6}}\|\nabla u\|^{1-\frac{n}{6}}\|\nabla u\|)\|\Delta^2u\|\leqslant$$

$$[BC_4^qC_5\|\Delta^2u\|^{\frac{qn}{8}}\|u\|^{q(1-\frac{n}{8})}\|\Delta^2u\|^{\frac{1}{3}}\|u\|^{\frac{2}{3}}+$$

$$BC_4^{q-1}C_6\|\Delta^2u\|^{\frac{(q-1)n}{8}}\|u\|^{(q-1)(1-\frac{n}{8})}\|\Delta^2u\|^{\frac{n}{6}}\|\nabla u\|^{2-\frac{n}{6}}]$$

$$\|\Delta^2u\|\leqslant C_7(\|\Delta^2u\|^{\frac{3nq+8}{24}}+\|\Delta^2u\|^{\frac{(3q+1)n}{24}})\|\Delta^2u\|\leqslant$$

$$\frac{\gamma}{6}\|\Delta^2u\|^2+C_8(\|u\|_{H^1}),$$

上式中,我们用到了如下的 Sobolev 插值不等式:

$$\|u\|_\infty\leqslant C_4\|\Delta^2u\|^{\frac{n}{8}}\|u\|^{1-\frac{n}{8}}+C_4'\|u\|,$$

$$\|\Delta u\|\leqslant C_5\|\Delta^2u\|^{\frac{1}{3}}\|\nabla u\|^{\frac{2}{3}}+C_5'\|u\|,$$

$$\|\nabla u\|_\infty\leqslant C_6\|\Delta^2u\|^{\frac{n}{6}}\|\nabla u\|^{1-\frac{n}{6}}+C_6'\|u\|$$

$$(\Delta^2u,g(u))=(\Delta u,\Delta g(u))=$$

$$(\Delta u,g'(u)\Delta u+g''(u)(\nabla u)^2)\leqslant$$

$$g_0\|\Delta u\|^2+\|g''(u)\|_\infty\|\nabla u\|\|\nabla u\|_\infty\|\Delta u\|\leqslant$$

$$g_0\|\Delta u\|^2+C\|u\|_\infty^l\|\nabla u\|\|\nabla u\|_\infty\|\Delta u\|\leqslant$$

$$g_0\|\Delta u\|^2+CC_4^l\|\Delta^2u\|^{\frac{ln}{8}}\|u\|^{l(1-\frac{n}{8})}\times$$

$$C_6\|\Delta^2u\|^{\frac{n}{6}}\|\nabla u\|^{\frac{8}{3}-\frac{n}{6}}C_5\|\Delta^2u\|^{\frac{1}{3}}\leqslant$$

$$g_0\|\Delta u\|^2+C_9\|\Delta^2u\|^{\frac{(3l+4)n+8}{24}}\leqslant$$

$$g_0\|\Delta u\|^2+\frac{\gamma}{6}\|\Delta^2u\|^2+C_{10}(\|u\|_{H^1})$$

$$|(\Delta^2u,h)|\leqslant\frac{\gamma}{12}\|\Delta^2u\|^2+\frac{3}{\gamma}\|h\|^2,$$

$$\alpha\|\nabla\Delta u\|^2\leqslant\alpha C_*\|\nabla u\|^{\frac{1}{3}}\|\Delta^2u\|^{\frac{2}{3}}\leqslant$$

$$\frac{\gamma}{6}\|\Delta^2u\|^2+C_{11}(\|u\|_{H^1})$$

因此从式(1.2.18)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta u\|^2+\frac{\gamma}{4}\|\Delta^2u\|^2\leqslant$$

$$g_0\|\Delta u\|^2+\frac{3}{\gamma}\|h(x)\|^2+C_{12}(\|u(\cdot,t)\|_{H^1})$$

由此推出

$$\|\Delta u(\cdot,t)\|^2\leqslant e^{2g_0t}\|\Delta u_0(x)\|^2+$$

$$\frac{1}{|g_0|}(1-e^{2g_0t})(\frac{3}{\gamma}\|h\|^2+C_{13})$$

因此式(1.2.15)、(1.2.16)、(1.2.17)成立。

引理 1.2.4 在引理 1.2.3 条件下，设

(1) $f(u)\in C^2,\varphi(u)\in C^3,g(u)\in C^1$，

$$|\varphi'(u)|+|\varphi'''(u)|\leqslant K,K>0,4\leqslant n<5,$$

$$|g'(u)|\leqslant C|u|^{l+1},0\leqslant l<\frac{40}{3n}-\frac{4}{3},$$

(2) $u_0(x)\in H^2(\Omega),h(x)\in H^1(\Omega)$。

则对问题(1.2.3)～(1.2.5)的光滑解，有如下估计：

$$\|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|\leqslant\frac{E_3}{t},t>0\tag{1.2.19}$$

其中常数 E_3 依赖于 $\|u_0(x)\|_{H^2}$、$\|h(x)\|_{H^1}$和 $t>0$。

证明 作式(1.2.3)和 $t^2\Delta^3u$ 的内积，得

$$(t^2\Delta^3u,u_t+\alpha\Delta u+\gamma\Delta^2u+\nabla\cdot f(u)+$$

$$\Delta\varphi(u)-g(u)-h(u))=0\tag{1.2.20}$$

其中

$$(t^2\Delta^3u,u_t)=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|t\nabla\Delta u\|^2+\|t^{\frac{1}{2}}\nabla\Delta u\|^2$$

$$(t^2\Delta^3u,\alpha\Delta u)=\alpha t^2\|\Delta^2u\|^2,$$

$$\gamma(t^2\Delta^3u,\Delta^2u)=-\gamma\|t\nabla\Delta^2u\|^2,$$

$$|(\nabla\cdot f(u),\Delta^3u)|=$$

$$|(\nabla(\nabla\cdot f(u)),\nabla\Delta^2u)|\leqslant$$

$$C_1[\max_{k=1,\cdots,n}\|f''_k(u)\|_\infty\|\nabla u\|_\infty\|\nabla u\|+$$

$$\|f'_k(u)\|_\infty\|\Delta u\|]\|\nabla\Delta^2u\|$$

当 $n<4$，由如下 Sobolev 插值不等式

$$\| u \|_{\infty} \leqslant C_2 \| \Delta u \|^{\frac{n}{4}} \| u \|^{1-\frac{n}{4}} + C_2' \leqslant \text{const},$$

$$\| \nabla u \|_{\infty} \leqslant C_3 \| \Delta u \|^{1-\frac{n}{8}} \| \nabla \Delta^2 u \|^{\frac{n}{8}} + C_3'$$

有

$$|(\nabla \cdot f(u), t^2 \Delta^3 u)| \leqslant \frac{\gamma}{6} \| t \cdot \nabla \Delta^2 u \|^2 + C_4$$

当 $4 \leqslant n < 6$ 时，由 Kato 插值不等式[21]

$$\| u \|_{\infty} \leqslant C_5 \| u \|_{H^2}^{\frac{10-n}{6}} \| \nabla \Delta u \|^{\frac{n-4}{6}},$$

$$\| \nabla u \|_{\infty} \leqslant C_6 \| u \|_{H^2}^{\frac{8-n}{6}} \| \nabla \Delta u \|^{\frac{n-2}{6}}$$

可得

$$\begin{aligned} & |(\nabla \cdot f(u), t^2 \Delta^3 u)| \\ & \leqslant C_7 [\| \nabla \Delta^2 u \|^{\frac{4n-12}{3n}} + \| \nabla \Delta^2 u \|^{\frac{n-4}{4}}] \| \nabla \Delta^2 u \| \\ & \leqslant \frac{\gamma}{6} \| \nabla \Delta^2 u \|^2 + C_8 \end{aligned}$$

类似地，当 $n < 4$ 时，有

$$\begin{aligned} & |(\Delta \varphi(u), \Delta^3 u)| = \\ & |(\nabla \Delta \varphi(u), \nabla \Delta^2 u)| = \\ & |(\nabla (\varphi'(u)) \Delta u + \varphi''(u)(\nabla u), \nabla \Delta^2 u)| \leqslant \\ & C[\| \varphi''(u) \|_{\infty} \| \nabla u \|_{\infty} \| \Delta u \| + \| \varphi'(u) \|_{\infty} \| \nabla \Delta u \| + \\ & \| \varphi'''(u) \|_{\infty} \| \nabla u \|_{\infty}^2 \| \nabla u \|] \| \nabla \Delta^2 u \| \leqslant \\ & \frac{\gamma}{6} \| \nabla \Delta^2 u \|^2 + C_9 \end{aligned}$$

当 $4 \leqslant n < 5$ 时，有

$$\begin{aligned} |(\Delta \varphi(u), \Delta^3 u)| \leqslant & C[\| \nabla \Delta^2 u \|^{\frac{n-2}{6}} + \| \nabla \Delta^2 u \|^{\frac{7n-16}{6n}} + \\ & \| \nabla \Delta^2 u \|^{\frac{n-2}{3}}] \| \nabla \Delta^2 u \| \leqslant \\ & \frac{\gamma}{6} \| \nabla \Delta^2 u \|^2 + C_{10}, \end{aligned}$$

$$a t^2 \| \Delta^2 u \|^2 \leqslant \frac{\gamma}{6} \| t \nabla \Delta^2 u \|^2 + C_{11},$$

$$|(g(u),\Delta^3 u)| = |(g'(u)\nabla u, \nabla\Delta^2 u)| \leqslant$$
$$\|g'(u)\|_\infty \|\nabla u\| \|\nabla\Delta^2 u\| \leqslant$$
$$\frac{\gamma}{6}\|\nabla\Delta^2 u\|^2 + C_{12},$$

$$|(g(u),\Delta^3 u)| \leqslant C_{13}\|\nabla\Delta^2 u\|^{\frac{(40-n)(n-4)}{18n}}\|\nabla\Delta^2 u\| \leqslant$$
$$\frac{\gamma}{6}\|\nabla\Delta^2 u\|^2 + C_{14},$$

$$|(h(x),\Delta^3 u)| \leqslant |(\nabla h, \nabla\Delta^2 u)| \leqslant$$
$$\frac{\gamma}{6}\|\nabla\Delta^2 u\|^2 + \frac{3}{2\gamma}\|\nabla h\|^2$$

因此,从(1.2.20)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|t\nabla\Delta u\|^2 + \frac{\gamma}{6}\|t\nabla\Delta^2 u\|^2 \leqslant$$
$$C_{15}[\|\nabla\Delta u\|^2 + \|\nabla h\|^2 + 1]$$

由此,即得

$$\|\nabla\Delta u(\cdot,t)\| \leqslant \frac{E_3}{t}, t > 0,$$

其中常数 E_3 仅依赖于 $\|u_0(x)\|_{H^2}$, $\|h(x)\|_{H^1}$ 和 t, $0<t\leqslant T$。

现在应用 Galerkin 方法证明周期初值问题(1.2.3)~(1.2.5)整体光滑解的存在唯一性。设 $w_j(x)(j=1,2,\cdots)$ 为方程 $\Delta u+\lambda u=0$ 具周期边值问题对应于特征值 $\lambda_j(j=1,2,\cdots)$ 的特征函数,$\{w_j\}$ 为标准正交基。设问题(1.2.3)~(1.2.5)的近似解可表示为

$$u_N(x,t) = \sum_{j=1}^{N}\alpha_{jN}(t)w_j(x) \qquad (1.2.21)$$

其中 $\alpha_{jN}(t)(j=1,2,\cdots,N;N=1,2,\cdots)$ 为待定的 $t\in\mathbf{R}^+$ 的函数系数。按照 Galerkin 方法,系数 $\alpha_{jN}(t)$ 应满足如下的一阶非线性常微分方程组

$$(u_{Nt} + \alpha\Delta u_N + \gamma\Delta^2 u_N + \nabla\cdot f(u_N)$$
$$+ \Delta\varphi(u_N) - g(u_N) - h(x), w_j(x)) = 0 \qquad (1.2.22)$$

$$j = 1,2,\cdots,N$$

和初值条件

$$(u_N(x,0),w_j(x)) = (u_0(x),w_j(x)),j = 1,2,\cdots,N \tag{1.2.23}$$

显然有

$$(u_{Nt}(x,t),w_j(x)) = \alpha'_{jN}(t);$$

$$(u_N(x,0),w_j(x)) = \alpha_{jN}(0)$$

且 $u_{0j}(x) = (u_0(x),w_j(x))(j = 1,2,\cdots,N)$ 为函数 $u_0(x)$ 的近似展开 $\sum_{j=1}^{N} u_{0j}w_j(x)$ 的系数。

类似于引理 1.2.1～引理 1.2.4 的证明，我们建立对 Galerkin 方法近似解的一致积分估计。这些一致性估计保证了问题(1.2.22)、(1.2.23)整体解 $\alpha_{jN}(t)(j=1,2,\cdots,N;0\leqslant t\leqslant T)$的存在性。而且还能证明问题(1.2.22)、(1.2.23)的近似解 $u_N(x,t)$ 收敛于问题(1.2.3)～(1.2.5)的整体解。

引理 1.2.5 设以下条件成立：

(1) $\varphi(u)\leqslant\varphi_0,\gamma>\dfrac{\alpha+\varphi_0}{2}$。

(2) $g(0)=0,g'(u)\leqslant g_0$。

(3) $|f^{(k)}(u)|\leqslant A|u|^{p-k},k=0,1,1\leqslant p\leqslant\dfrac{6}{n}+1$，

$|\varphi^{(k)}(u)|\leqslant B|u|^{q-k+1},k=1,2,0\leqslant q<\dfrac{4}{n}+1,n<4$，

$|\varphi(u)|\leqslant B|u|^{q},0\leqslant q<\dfrac{4}{n},n>4$；

$|\varphi'(u)|+|\varphi''(u)|\leqslant K,K>0$；

$|g^{(k)}(u)|\leqslant C|u|^{l+2-k},k=1,2,0<l<\dfrac{40}{3n}-\dfrac{4}{3}$。

(4) $f(u)\in C^2,\varphi(u)\in C^3,g(u)\in C^2$。

(5) $h(x)\in H^1(\Omega),u_0(x)\in H^3(\Omega)$。

则对问题(1.2.22)、(1.2.23)的解($1\leqslant n<5$)，有如下估计

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_N(\cdot,t)\|^2_{H^3(\Omega)}\leqslant K_3 \tag{1.2.24}$$

其中常数 K_3 依赖于 $\| u_0(x) \|_{H^3(\Omega)}$ 和 $\| h(x) \|_{H^1(\Omega)}$，但与 N 无关。

引理 1.2.6 设引理 1.2.5 的条件满足，且设

(1) $f(u)\in C^{2m-1}, \varphi(u)\in C^{2m}, g(u)\in C^{2m}, m>2$。

(2) $u_0(x)\in H^{2m}(\Omega), h(x)\in H^{2(m-1)}(\Omega)$。

则对问题(1.2.22)、(1.2.23)的解有估计

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \| \Delta^m u_N(\cdot,t) \| \leqslant K_m \qquad (1.2.25)$$

其中常数 K_m 依赖于 $\| u_0(x) \|_{H^{2m}}$ 和 $\| h(x) \|_{H^{2m-2}}$，但与 N 无关。

证明 从 $\Delta w_j+\lambda_j w_j=0$，有

$$\Delta^{2m} w_j - \lambda_j^{2m} w_j = 0, m > 2,$$

式(1.2.22)乘以 $-\lambda_j^{2m}\alpha_{jN}(t)$，并对 $j=1,2,\cdots,N$ 求和

$$(u_{Nt} + \alpha\Delta u_N + \gamma\Delta^2 u_N + \nabla\cdot f(u_N) +$$
$$\Delta\varphi(u_N) - g(u_N) - h(x), \Delta^{2m} u_N) = 0 \qquad (1.2.26)$$

其中

$$(u_{Nt},\Delta^{2m}u_N) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| \Delta^m u_N \|^2,$$

$$\alpha(\Delta u_N,\Delta^{2m}u_N) = (-1)^{2m-1}\alpha \| \nabla\Delta^m u_N \|^2,$$

$$\gamma(\Delta^{2m}u_N,\Delta^2 u_N) = \gamma \| \Delta^{m+1} u_N \|^2$$

由引理 1.2.5 和 Sobolev 嵌入定理推出

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \| u_N(\cdot,t) \|_\infty \leqslant K_4 \quad (1\leqslant n < 5)$$

其中常数 K_4 与 N 无关。由如下不等式

$$\| D^s f(u) \| \leqslant C_s(\| u \|_\infty) \| D^s u(x) \|, f(u) \in C^s$$

得

$$|(\nabla\cdot f(u_N),\Delta^{2m}u_N)| = |(\Delta^{m+1}u_N,\Delta^{m-1}\nabla\cdot f(u_N))| \leqslant$$
$$\frac{\gamma}{6}\| \Delta^{m+1}u_N \|^2 + C_{2m-1}(\| u_N \|_\infty | \nabla^{2m-1}u_N \|^2)$$
$$|(\Delta^{2m}u_N,\Delta\varphi(u_N))| =$$
$$|(\Delta^{m+1}u_N,\Delta^{m-1}(\varphi'(u_N)\Delta u_N + \varphi''(u_N)(\nabla u_N)^2)| \leqslant$$
$$C_{2m-2}^0[\| \Delta^{m-1}\varphi'(u_N) \| \| \Delta u_N \| + \| \Delta^m u_N \| \| \varphi'(u_N) \|_\infty +$$

$$
\begin{aligned}
&\|\Delta^{m-1}\varphi'(u_N)\| \ \|\nabla u_N\|^2 + \\
&\|\Delta^{m-1}(\nabla u_N)^2\| \ \|\varphi''(u_N)\|]\ \|\Delta^{m-1}u_N\| \leqslant \\
&C^0_{2m-2}[C^1_{2m-2}\|\Delta^{m-1}u_N\| \ \|\Delta u_N\| + \|\Delta^m u_N\| \ \|\varphi(u_N)\| + \\
&C^2_{2m-2}\|\Delta^{m-1}u_N\| \ \|\nabla u_N\|_\infty \|\nabla u_N\| + \\
&2(\|\nabla^{2m-1}u_N\| \ \|\nabla u_N\|_\infty + \\
&\|\Delta u_N\|_\infty \|\nabla^{2m-2}u_N\|)\ \|\varphi''(u_N)\|]\ \|\Delta^{m+1}u_N\| \leqslant \\
&C_1[\|\Delta^{m+1}u_N\|^{\frac{2m-5}{2m-1}+\frac{n}{2(2m+1)}} + \\
&\|\Delta^{m+1}u_N\|^{\frac{2m-5}{2m-1}+\frac{n}{4m}}]\ \|\Delta^{m+1}u_N\| \leqslant \\
&\frac{\gamma}{6}\|\Delta^{m+1}u_N\|^2 + C_2
\end{aligned}
$$

以上用到了如下的 Sobolev 插值不等式：

$$\|\nabla u_N\|_\infty \leqslant C\|\Delta^{m+1}u_N\|^{\frac{n}{2(2m+1)}}\|\nabla u_N\|^{1-\frac{n}{2(2m+1)}} + C',$$

$$\|\Delta^{m-1}u_N\| \leqslant C\|\Delta^{m+1}u_N\|^{\frac{2m-5}{2m-1}}\|\nabla\Delta u_N\|^{1-\frac{2m-5}{2m-1}} + C',$$

$$\|\Delta u_N\|_\infty \leqslant C\|\Delta^{m+1}u_N\|^{\frac{n}{4m}}\|\Delta u_N\|^{1-\frac{n}{4m}} + C'$$

类似地有

$$
\begin{aligned}
&|(\Delta^{2m}u_N, g(u_N))| = \\
&|(\Delta^m u_N, \Delta^m g(u_N))| \leqslant \\
&|(\Delta^m u_N, g'(u_N)\nabla^m u_N)| + \\
&|(\Delta^m u_N, \nabla^{2m-1}(g'(u_N)\nabla u_N) - g'(u_N)\Delta^m u_N)| \leqslant \\
&g_0\|\Delta^m u_N\|^2 - \frac{\gamma}{6}\|\Delta^{m+1}u_N\|^2 + C_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|(\Delta^{2m}u_N, h)| = |(\Delta^{m+1}u_N, \Delta^{m-1}h)| \leqslant \\
&\frac{\gamma}{12}\|\Delta^{m+1}u_N\|^2 + \frac{3}{\gamma}\|\Delta^{m-1}h\|^2,
\end{aligned}
$$

$$\alpha\|\nabla^{2m+1}u_N\|^2 \leqslant \frac{\gamma}{6}\|\Delta^{m+1}u_N\|^2 + C_4$$

则由式(1.2.26)得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta^m u_N\|^2+\frac{\gamma}{4}\|\Delta^{m+1}u_N\|^2\leqslant$$

$$g_0\|\Delta^m u_N\|^2+\frac{3}{\gamma}\|\Delta^{m-1}h\|^2+C_5$$

由此推出

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\Delta^m u_N\|^2\leqslant K_m$$

其中常数 K_m 与 N 无关。

定理 1.2.1 在引理 1.2.6 的条件下，存在周期初值问题(1.2.3)～(1.2.5)一个唯一的整体光滑解 $u(x,t)$，

$$u(x,t)\in L^\infty(0,T;H^{2m}(\Omega)),$$

$$u_t(x,t)\in L^\infty(0,T;H^{2m-4}(\Omega)),m>1$$

证明 由引理 1.2.5 和引理 1.2.6 有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_N(\cdot,t)\|_{H^{2m}(\Omega)}\leqslant K_m$$

其中常数 K_m 与 N 无关。因此从近似解序列 $\{u_N(x,t)\}$ 中可选取子序列 $\{u_{N_i}(x,t)\}$ 和存在一个函数 $u(x,t)\in L^\infty(0,T;H^{2m}(\Omega))$，使得

$$u_{N_i}(x,t)\to u(x,t)\text{ 在 }L^\infty(0,T;H^{2m}(\Omega))\text{ 中弱 * 收敛},$$

$$\Delta u_{N_i}(x,t)\to\Delta u(x,t)\text{ 在 }L^\infty(0,T;L_2(\Omega))$$

中强收敛和几乎处处收敛，$N_i\to\infty$

从 $\left(\frac{\partial u_N}{\partial t},\frac{\partial u_N}{\partial t}+\alpha\Delta u_N+\gamma\Delta^2 u_N+\nabla f(u_N)+\Delta\varphi(u_N)-g(u_N)-h(x)\right)=0$ 可得

$$\left\|\frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|\leqslant K_m'$$

其中常数 K_m' 与 N 无关。因此可得

$$\frac{\partial u_{N_i}}{\partial t}\to\frac{\partial u}{\partial t},\text{在 }L^\infty(0,T;L_2(\Omega))\text{ 中弱 * 收敛},N_i\to\infty$$

于是函数 $u(x,t)$ 几乎处处满足方程(1.2.3)和周期初值条件(1.2.4)、(1.2.5)。问题(1.2.3)～(1.2.5)光滑解的存在性已证。

由通常的能量方法容易得到光滑解是唯一的。

为了证明周期初值问题(1.2.3)~(1.2.5)整体吸引子的存在性，利用 Babin-Vishik 的如下结果[89]。

定理 1.2.2 设 E 为 Banach 空间，$\{S_t\}(t\geqslant 0)$为半群算子 $S_t:E\to E$ 的集合，

$$S_t\cdot S_\tau=S_{t+\tau},S_0=I$$

其中 I 为恒等算子，且设 S_t 满足以下条件：

(1) 算子 S_t 是一致有界的，即$\forall R>0$，如 $\|u\|_E\leqslant R$，则存在常数 $C(R)$使得

$$\|S_tu\|_E\leqslant C(R),t\in[0,\infty)$$

(2) 存在有界吸收集 $B_0\subset E$，即对任何有界集 $B\subset E$，存在常数 T，使得

$$S_tB\subset B_0,t\geqslant T$$

(3) S_t 是一个完全连续算子，$t>0$。

则半群算子 S_t 具有紧的整体吸引子。

定理 1.2.3 设问题(1.2.3)~(1.2.5)具有整体光滑解，且满足

(1) $f(u)\in C^2,\varphi(u)\in C^3,g(u)\in C^2$,

$|f^{(k)}(u)|\leqslant A|u|^{p-k},k=0,1,1\leqslant p<\dfrac{6}{n}+1$,

$|\varphi^{(k)}(u)|\leqslant B|u|^{q-k+1},k=1,2,0\leqslant q<\dfrac{4}{n}+1,n<4$,

$|\varphi'(u)|\leqslant B|u|^q,0\leqslant q<\dfrac{4}{n},n\geqslant 4$;

$|\varphi''(u)|+|\varphi'''(u)|\leqslant K,K>0$

(2) $\varphi'(u)\leqslant\varphi_0,\gamma>\dfrac{\alpha+\varphi_0}{2}$

(3) $g(0)=0,g'(u)\leqslant g_0,g_0<-\dfrac{\alpha+\varphi_0+1}{2}$,

$|g^{(k)}(u)|\leqslant C|u|^{l+2-k},k=1,2,0\leqslant l<\dfrac{40}{3n}-\dfrac{4}{3}$

(4) $u_0(x)\in H^2(\Omega),h(x)\in H^1(\Omega),\Omega\subset\mathbb{R}^n,1\leqslant n<5$

则存在周期初值问题(1.2.3)～(1.2.5)的整体吸引子，即存在集合$\mathscr{A}\subset H^2(\Omega)$，使得

(i) $S_t\mathscr{A}=\mathscr{A}, t\in\mathbf{R}^-$；

(ii) $\lim\limits_{t\to\infty}\operatorname{dist}(S_tB,\mathscr{A})=0$，其中 B 为任何有界集$\subset H^2(\Omega)$，

$$\operatorname{dist}(X,Y)=\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}\|x-y\|_E$$

S_t 为问题(1.2.3)～(1.2.5)生成的半群算子。

证明 基于定理1.2.2的结果，我们将验证定理1.2.2的条件(1)～(3)，以证明定理的结论。

在定理的假设下，我们知道存在由问题(1.2.3)～(1.2.5)形成的半群算子。置Banach空间 $E=H^2(\Omega)$，$S_t:H^2(\Omega)\to H^2(\Omega)$。由引理1.2.1～1.2.3的结果，和设 $B\subset H^2(\Omega)$含于球$\{\|u\|_{H^2}\leqslant R\}$，则有

$$\|S_tu_0\|_{H^2}^2=\|u(\cdot,t)\|_{H^2}^2\leqslant\|u_0(x)\|_{H^2}^2+C_1\|h(x)\|^2+C_2\leqslant R^2+C',(t\geqslant 0,u_0\in B)$$

其中 C_1，C_2 和 C' 为绝对常数。这意味着$\{S_t\}$在 $H^2(\Omega)$中一致有界。其次，从上述引理的结果推出

$$\|S_tu_0\|_{H^2}=\|u(\cdot,t)\|_{H^2}^2\leqslant 2(E_0+E_1+E_2),\quad t\geqslant t_0=t_0(R,\|h(x)\|)\tag{1.2.27}$$

因此，$\overline{A}=\{u(\cdot,t)\in H^2(\Omega),\|u\|_{H^2}\leqslant 2(E_0+E_1+E_2)\}$为半群算子 S_t 的有界吸收集。从引理1.2.4的结果有

$$\|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|\leqslant\frac{E(R,t)}{t},t>0,$$

其中$\|u_0\|_{H^2}\leqslant R$，由于紧嵌入：$H^3(\Omega)\hookrightarrow H^2(\Omega)$，可知半群算子 S_t 当 $t>0$ 时是完全连续的。于是完成了本定理的证明。

附注：如同文献[80]中定理1.1.1所指出的，定理1.2.3所得到的整体吸引子$\mathscr{A}$为吸收集$\overline{A}$的ω极限集，即有

$$\mathscr{A}=\omega(\overline{A})=\bigcap_{\tau\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant\tau}S_t\overline{A}}$$

为了建立周期初值问题(1.2.3)～(1.2.5)整体吸引子Hausdorff和分形维数上界的估计，考虑如下(1.2.3)～(1.2.5)线性变

分问题

$$v_t + L(u(t))v = 0 \tag{1.2.28}$$

$$v(0) = v_0 \tag{1.2.29}$$

其中 $L(u(t))v \equiv \alpha\Delta v + \gamma\Delta^2 v + \sum_{k=1}^{n}(f_k(u)v)_{x_k} + \Delta(\varphi(u)v) - g'(u)v$。

因问题(1.2.3)~(1.2.5)的解充分光滑，易于证明线性问题(1.2.28)、(1.2.29)的初值 $v_0(x)$ 适当光滑时，具有整体光滑解，即存在解算子 G_t 使得 $v(t)=G_tv_0$。容易证明半群算子 S_tu_0 在 $L_2(\Omega)$ 中是可微的，即它的 Fréchet 导数 S'_tu_0 存在，而且 $G_tv_0=S'_tu_0$。事实上，置

$$w(t) = S_t(u_0 + v_0) - S_t(u_0) - G_t(u_0)v_0 = \\ u_1(t) - u(t) - v(t)$$

我们有

$$\partial_t w(t) = L_1(u_1(t)) - L_1(u(t)) + L(u(t))v(t) = \\ L_1(u(t) + v(t) + w(t)) - L_1(u(t)) + L(u(t))v(t) \tag{1.2.30}$$

$$w(0) = 0 \tag{1.2.31}$$

其中 $u_t=L_1(u)$ 为方程(1.2.3)的算子形式。因此式(1.2.30)能写成如下形式

$$\partial_t w(t) + L(u(t))w = \Lambda_0(u,v,w) \tag{1.2.32}$$

其中

$$\Lambda_0(u,v,w) = L_1(u(t) + v(t) + w(t)) - \\ L_1(u(t)) + L(u(t))(v + w) \tag{1.2.33}$$

由线性偏微分方程的理论，可得如下 L_2 估计

$$\| w(t) \| \leqslant C \| v_0 \|^2 \tag{1.2.34}$$

这就推出了半群算子 S_t 在 $L_2(\Omega)$ 中可微。

令 $v_1(t),v_2(t),\cdots,v_J(t)$ 为线性方程对应于初值 $v_1(0)=\xi_1$，

$\cdots, v_J(0)=\xi_J$ 的解，其中 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_J)\in L_2$。由文献[80]中的简单计算可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| v_1(t)\wedge\cdots\wedge v_J(t)\|^2+$$
$$2\mathrm{tr}(L(u(t))\cdot Q_J)\| v_1(t)\wedge\cdots\wedge v_J(t)|^2=0$$

(1.2.35)

其中 $L(u(t))=L(S_tu_0)$ 为线性映照：$v\to L(u(t))v$；"$\wedge$"表示外积；tr 表示算子的迹；$Q_J(t)$ 为空间 $L_2(\Omega)$ 到子空间 $=\mathrm{span}\{v_1(t),\cdots,v_J(t)\}$ 的正交投影。因此由式(1.2.31)可得 J 维立方体体积的变化为

$$w_J(t)=\sup_{u_0\in\mathscr{A}}\sup_{\xi_j\in L_2,|\xi_j|\leqslant 1}\| v_1(t)\wedge\cdots\wedge v_J(t)\|^2_{\wedge^J L_2}\leqslant$$
$$\sup_{u_0\in\mathscr{A}}\exp(-\int_0^t\inf(\mathrm{tr}\, L(S_\tau u_0)\cdot Q_J(\tau))\mathrm{d}\tau$$

(1.2.36)

注意到文献[80]中的结果，可知 $w_j(t)$ 为次指数可加的：

$$w_j(t+t')\leqslant w_j(t)w_j(t'),t,t'\geqslant 0 \tag{1.2.37}$$

因此有

$$\lim_{t\to\infty} w_j(t)^{\frac{1}{t}}=\prod_j,1\leqslant j\leqslant J \tag{1.2.38}$$

$$\prod_J\leqslant\exp(-q_J) \tag{1.2.39}$$

其中

$$q_J=\lim_{t\to\infty}\sup(\inf_{u_0\in\mathscr{A}}\frac{1}{t}\int_0^t\inf(\mathrm{tr}\, L(S(\tau)u_0)\cdot Q_J(\tau))\mathrm{d}\tau)$$

(1.2.40)

定义 1.2.1 集合 X 的 Hausdorff 测度定义为

$$n_{\mathrm{H}}(X,d)=\lim_{\epsilon\to 0}n_{\mathrm{H}}(X,d,\epsilon)=\sup_{\epsilon>0}n_{\mathrm{H}}(X,d,\epsilon)$$

其中

$$n_{\mathrm{H}}(X,d,\epsilon)=\inf\sum_i r_i^d$$

这里下界是对所有覆盖集合 X 的半径 $r_i \leqslant \varepsilon$ 的球取的。集合 X 的 Hausdorff 维数定义为数 $d_H(X) \in [0, \infty)$，使得

$$n_H(X, d) = 0, d > d_H(X);$$

$$n_H(X, d) = \infty, d < d_H(X)$$

定义 1.2.2 分形维数定义为数

$$d_F(X) = \lim \sup_{\varepsilon > 0} \frac{\lg n_X(\varepsilon)}{\lg 1/\varepsilon}$$

其中 $n_X(\varepsilon)$ 表示所有覆盖集合 X 的半径 $\leqslant \varepsilon$ 的球的最小数目。由文献[80]的结果知

$$d_F(X) = \inf \{d > 0, n_F(X, d) = 0\}$$

其中 $n_F(X, d) = \lim \sup_{\varepsilon \to 0}(\varepsilon^d n_X(\varepsilon))$。

定理 1.2.4[244] 设 $\mathscr{A}$ 为非线性发展方程(如 Navier-Stokes 方程，方程(1.2.3)等)的吸引子。它在 $H^1(\Omega)$ 中是有界的，则对某个 J，$\mathscr{A}$ 的 Hausdorff 维数 $\leqslant J$，它的分形维数不超过

$$J(1 + \max_{1 \leqslant l \leqslant J} \frac{-q_l}{q_J}) \tag{1.2.41}$$

引理 1.2.7[80] 广义 Sobolev-Lieb-Thirring 不等式：设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 为有界域，$\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots\}$ 为 $L_2(\Omega)$ 中的正交基 $\varphi_j \in H^1(\Omega)$，则有估计

$$\int_\Omega (\sum_{j=1}^N |\varphi_j(x)|^2)^{1+\frac{2}{n}} \mathrm{d}x \leqslant k_0 \sum_{j=1}^N \int_\Omega |\mathrm{grad}\ \varphi_j|^2 \mathrm{d}x \tag{1.2.42}$$

定理 1.2.5 在定理 1.2.3 的条件下，问题(1.2.3)～(1.2.5)的整体吸引子的 Hausdorff 维数和分形维数是有限的，且

$$d_H(\mathscr{A}) \leqslant J_0, d_F(\mathscr{A}) \leqslant 2J_0$$

其中 J_0 为使下式成立的最小整数：

$$J_0 \geqslant \frac{1}{2\gamma c'}[(\alpha + \|\varphi(u)\|_{\infty})c'^{\frac{1}{2}} + \{(\alpha + \|\varphi(u)\|_{\infty})^2 c' +$$

$$4\gamma c'[k_0 c'^{\frac{1}{4}} \|f''(u)\|_{\infty}(\|\nabla u\| + \|\nabla u\|_{L_{\frac{5}{2}}}) +$$

$$\|\varphi'''(u)\|_\infty\|\nabla u\|_\infty^2+\|\varphi'(u)\|_\infty\|\Delta u\|_\infty]\}^{\frac{1}{2}}],(n=2)\tag{1.2.43}$$

$$J_0\geqslant(\frac{4v_1}{c'\gamma})^{\frac{3}{7}},(n=3)\tag{1.2.44}$$

$$v_1=\frac{2}{7}(\frac{5c'\gamma}{28})^{-\frac{5}{2}}[c'^{\frac{1}{2}}(\alpha+\|\varphi'(u)\|_\infty)]^{\frac{2}{7}}+$$
$$\frac{9}{14}(\frac{5c'\gamma}{56})^{-\frac{5}{9}}[k_0\|f''(u)\|_\infty c'^{\frac{1}{4}}(\|\nabla u\|+\|\nabla u\|_{L^{\frac{5}{2}}})^{\frac{14}{9}}+$$
$$\frac{4}{7}(\frac{3c'\gamma}{28})^{-\frac{3}{4}}(\|\varphi'''(u)\|_\infty\|\nabla u\|_\infty^2+\|\varphi'(u)\|_\infty\|\Delta u\|_\infty)^{\frac{7}{4}}\tag{1.2.45}$$

其中 c' 和 k_0 为绝对常数，且

$$\|f''(u)\|_\infty=\max_{k=1,\cdots,n}\|f_k''(u)\|_\infty$$

证明 基于定理 1.2.4 的结果，我们必须估计 $\mathrm{tr}(L(u(t))\cdot Q_J)$ 的下界。

$$\mathrm{tr}(L(u(t)\cdot Q_J)=$$
$$\sum_{j=1}^J\{(\alpha\Delta\varphi_j+\gamma\Delta^2\varphi_j+\sum_{k=1}^n(f_k(u)\varphi_j)_{x_k}-$$
$$\Delta(\varphi'(u)\varphi_j)-g'(u)\varphi_j,\varphi_j)\}=$$
$$\sum_{j=1}^J\{(\gamma\|\Delta\varphi_j\|^2-\alpha\|\nabla\varphi_j\|^2+(\sum_{k=1}^n f_k(u)\varphi_j)_{x_k}-$$
$$\Delta(\varphi'(u)\varphi_j)-g'(u)\varphi_j,\varphi_j)\}\tag{1.2.46}$$

其中

$$|\sum_{j=1}^J((\sum_{k=1}^n f_k(u)\varphi_j)_{x_k},\varphi_j)|=$$
$$|\sum_{j=1}^J(\sum_{k=1}^n f_k(u)\varphi_j,\varphi_{jx_k})|=$$
$$\frac{1}{2}|(\sum_{k=1}^n f_k'(u)u_{x_k},\sum_{j=1}^J\varphi_j^2)|=$$
$$\frac{1}{2}|(\sum_{k=1}^n f_k'(u)u_{x_k},\rho(x))|$$
$$(\rho(x)=\sum_{j=1}^J\varphi_j^2)$$

由引理 1.2.7 有

$$|(\sum_{k=1}^{n} f_k''(u)u_{x_k},\rho(x))| \leqslant \| \sum_{k=1}^{n} f_k''(u)u_{x_k} \| \, \| \rho(x) \| \leqslant$$

$$\| f''(u) \|_{\infty} \| \nabla u \| k_0(\sum_{j=1}^{J}\int |\nabla\varphi_j|^2 \mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}} \quad (n=2)$$

$$|(\sum_{k=1}^{n} f_k''(u)u_{x_k},\rho(x))| \leqslant$$

$$(\int_{\Omega} |\sum_{k=1}^{n} f_k''(u)u_{x_k}|^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x)^{\frac{2}{5}}(\int_{\Omega}|\rho(x)|^{\frac{5}{3}}\mathrm{d}x)^{\frac{3}{5}} \leqslant$$

$$\| f''(u) \|_{\infty} \| \nabla u \|_{L^{\frac{5}{2}}} k_0(\sum_{j=1}^{J}\int |\nabla\varphi_j|^2 \mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}} \quad (n=3)$$

$$|-(\Delta(\varphi'(u)\varphi_j),\varphi_j)| = |(\nabla\varphi'(u)\varphi_j,\nabla\varphi_j)| =$$

$$|(\varphi''(u)\nabla u\varphi_j,\nabla\varphi_j) + (\varphi'(u)\nabla\varphi_j,\nabla\varphi_j)| =$$

$$|-\frac{1}{2}(\nabla\varphi''(u)\nabla u,\varphi_j^2) + (\varphi'(u)\nabla\varphi_j,\nabla\varphi_j)| =$$

$$|-\frac{1}{2}(\varphi'''(u)(\nabla u)^2,\varphi_j^2) - \frac{1}{2}(\varphi''(u)\Delta u,\varphi_j^2) +$$

$$(\varphi'(u)\nabla\varphi_j,\nabla\varphi_j)| \leqslant$$

$$\| \varphi'''(u) \|_{\infty} \| \nabla u \|_{\infty}^2 \| \varphi_j \|^2 +$$

$$\| \varphi''(u) \|_{\infty} \| \Delta u \|_{\infty} \| \varphi_j \|^2 + \| \varphi'(u) \|_{\infty} \| \nabla\varphi_j \|^2$$

现选取 $\varphi_j(x)$ 为满足方程 $-\Delta u=\lambda u$ 具周期边界条件对应于特征值 $\lambda_j(j=1,2,\cdots)$ 的规范特征函数，且

$$\| \nabla\varphi_j \|^2 = \lambda_j, \| \Delta\varphi_j \|^2 = \lambda_j^2, \| \varphi_j \|^2 = 1$$

从文献[80]可得特征值 λ_j 的如下估计：

$$\lambda_j \geqslant \left[\frac{(j-1)^{\frac{1}{n}}}{2} - 1\right]^2 \sim cj^{\frac{2}{n}}$$

因此从式(1.2.46)得

$$\mathrm{tr}(L(u(t)) \cdot Q_J) \geqslant$$

$$\gamma \sum_{j=1}^{J}\lambda_j^2 - \alpha\sum_{j=1}^{J}\lambda_j -$$

$$\| f''(u) \|_{\infty}(\| \nabla u \|_{L_{\frac{5}{2}}} + \| \nabla u \|)k_0(\sum_{j=1}^{J}\lambda_j)^{\frac{1}{2}} -$$

$$J(\| \varphi''(u) \|_{\infty} \| \nabla u \|_{\infty}^2 + \| \varphi''(u) \|_{\infty} \| \nabla u \|_{\infty}) -$$

$$\| \varphi'(u) \|_{\infty} \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \geqslant$$

$$\gamma \sum_{j=1}^{J} \lambda_j^2 - (\alpha + \| \varphi'(u) \|_{\infty}) J^{\frac{1}{2}} (\sum_{j=1}^{J} \lambda_j^2)^{\frac{1}{2}} -$$

$$k_0 \| f''(u) \|_{\infty}(\| \nabla u \| + \| \nabla u \|_{L_{\frac{5}{2}}}) J^{\frac{1}{4}} (\sum_{j=1}^{J} \lambda_j^2)^{\frac{1}{4}} -$$

$$J(\| \varphi'''(u) \|_{\infty} \| \nabla u \|^2 + \| \varphi''(u) \|_{\infty} \| \Delta u \|_{\infty})$$

由不等式 $\lambda_j \geqslant c' j^{\frac{2}{n}}$，当 $n=2$ 和

$$J \geqslant \frac{1}{2\gamma c'}\{(\alpha + \| \varphi'(u) \|_{\infty})c'^{\frac{1}{2}} + [(\alpha + \| \varphi''(u) \|_{\infty})^2 c' +$$

$$4\gamma c'(k_0 c'^{\frac{1}{4}} \| f''(u) \|_{\infty}(\| \nabla u \| + \| \nabla u \|_{L_{\frac{5}{2}}}) +$$

$$\| \varphi'''(u) \|_{\infty} \| \nabla u \|_{\infty}^2 + \| \varphi''(u) \|_{\infty} \| \Delta u \|_{\infty})]^{\frac{1}{2}}\} = J_0$$

有

$$\operatorname{tr}(L(u(t)) \cdot Q_J) > 0$$

由广义 Young 不等式

$$ab \leqslant \varepsilon \frac{a^p}{p} + \varepsilon^{1-p'} \frac{b^{p'}}{p'}, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \qquad (1.2.47)$$

可得

$$c'^{\frac{1}{2}}(\alpha + \| \varphi''(u) \|_{\infty}) J^{\frac{5}{3}} \leqslant$$

$$\frac{c'\gamma}{4} J^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{7}(\frac{5c'\gamma}{28})^{-\frac{5}{2}} \times$$

$$[c'^{\frac{1}{2}}(\alpha + \| \varphi'(u) \|_{\infty})]^{\frac{7}{2}},$$

$$k_0 \| f''(u) \|_{\infty} c'^{\frac{1}{4}}(\| \nabla u \| + \| \nabla u \|_{L_{\frac{5}{2}}}) J^{\frac{5}{6}} \leqslant$$

$$\frac{c'\gamma}{4} J^{\frac{7}{3}} + \frac{9}{14}(\frac{5c'\gamma}{56})^{-\frac{5}{9}} \times$$

$$[k_0 \| f''(u) \|_{\infty} c'^{\frac{1}{4}}(\| \nabla u \| + \| \nabla u \|_{L_{\frac{5}{2}}})]^{\frac{14}{9}},$$

$$(\|\varphi'''(u)\|_\infty\|\nabla u\|_\infty^2+\|\varphi''(u)\|_\infty\|\Delta u\|_\infty)J\leqslant$$

$$\frac{c'\gamma}{4}J^{\frac{7}{3}}+\frac{4}{7}(\frac{3c'\gamma}{28})^{-\frac{3}{4}}(\|\varphi''(u)\|_\infty\|\nabla u\|_\infty^2+$$

$$\|\varphi''(u)\|_\infty\|\Delta u\|_\infty)^{\frac{7}{4}}$$

因此当 $n=3$ 和

$$J>(\frac{4\tau_1}{c'\gamma})^{\frac{3}{7}}$$

时有

$$\mathrm{tr}(L(u(t))\cdot Q_J)>0$$

从 q_l 得定义，容易验证

$$-\frac{q_l}{q_J}\leqslant 1,(l\leqslant J_0-1)$$

因此从定理 1.2.4 可得

$$d_H(\mathscr{A})\leqslant J_0,d_F(\mathscr{A})\leqslant 2J_0$$

定理证毕。

1.3 一类具粘弹性项的非线性波动方程

考虑如下的具粘弹性项的非线性波动方程

$$u_{tt}=\alpha u_{xxt}+\sigma(u_x)_x-f(u)+g(x),$$
$$x\in(0,1),t\in(0,\infty) \tag{1.3.1}$$

具初始条件

$$u(0)=u_0,u_t(0)=u_1 \tag{1.3.2}$$

和边界条件

$$u(0,t)=u(1,t)=0 \tag{1.3.3}$$

这问题来自于均质梁的纵向运动，$u(x,t)$表示在 t 时刻梁的横断面的位移。如果用 $T(x,t)$表示在 t 时刻横断面的应力，则方程(1.3.1)可写为

$$\rho_0u_{tt}=T_x-f(u)+g(x),x\in(0,1),t\in(0,\infty) \tag{1.3.4}$$

其中 ρ_0 为梁的密度。为方便计，$\rho_0=1$。从式(1.3.4)对应力 $T(x,t)$作结构性假设

$$T(x,t)=\alpha u_{xt}(x,t)+\sigma(u_x) \tag{1.3.5}$$

即可得到方程(1.3.1)。其中 $\sigma(s)$为一光滑函数，具有性质

$$\sigma(0)=0,\sigma'(s)\geqslant\gamma_0>0,\ \forall s\in\mathbf{R} \tag{1.3.6}$$

其中 α,γ_0 为正常数。

对于问题(1.3.1)～(1.3.3)，许多数学家、物理学家研究过。当 $f=g=0$ 时，1968 年和 1969 年，Greenberg 等在文献[48,49]中研究整体古典解的存在性和稳定性。1981 年，Fitzgibben 在文献[50]中证明了$(u,u_t)\in W^{1,\infty}\times W^{1,2}$整体解的存在性。1984 年，常、郭在文献[51]中构造了它的差分格式，证明了差分解的收敛性以及整体解的存在性。

当 $\sigma'(s)=1,\sigma(u_x)_x=u_{xx},g(x)=0,f'(u)\leqslant C$，1983 年，Massatt 在文献[215]中证明了在 $X^\alpha\times X^\beta$ 中整体吸引子的存在性和它的维数的有限性，其中 $X^\alpha=D(A^\alpha),0\leqslant\beta\leqslant\alpha<1,A=-\partial_{xx}$。当 $\sigma(s)$为非线性时，1985 年，Berhaliev 在文献[52,53]中证明(E_0,E_1)中存在整体吸引子，其中 $E_0=E_1$。1994 年，郭、陈等在文献[54]中对于问题(1.3.1)～(1.3.3)证明了在空间 $\mathscr{H}=D(A)\times L^2(\Omega)$中存在紧的整体吸引子，并对其维数作了估计。

利用半群方法，我们很容易证明问题(1.3.1)～(1.3.3)局部解的存在性。

定理 1.3.1 设 $\sigma(s)$和 $f(u)$为光滑函数，$\sigma(0)=0,g(x)\in L^2(\Omega),\Omega=[0,1]$ 则对$(u_0,u_1)\in\mathscr{H}=D(A)\times L^2(\Omega)$，存在 $t_0=t_0(u_0,u_1)>0,u(t,u_0,u_1)$，使得$(u(t),u_t(t))$从$[0,t_0]$到 $\mathscr{H}$ 是连续的，$(u(t),u_t(t))\in D(A)\times D(A)$，$(u_t,u_{tt})$几乎处处存在，$t\in(0,t_0)$；$(u(t),u_t(t))$满足(1.3.1)～(1.3.3)。

以下我们作一致先验估计。为此对非线性函数作如下假设：

(i) $\liminf\limits_{|s|\to\infty}\dfrac{F(s)}{|s|^2}\geqslant 0$； (1.3.7)

(ii) 存在 $\omega>0$，使得

$$\varliminf_{|s|\to\infty}\frac{sf(s)-F(s)}{|s|^2}\geqslant 0 \tag{1.3.8}$$

其中 $F(s)=\int_0^s f(s)\mathrm{d}s$。容易看到，对于(i)，可设 $0<\omega\leqslant\frac{1}{2}$。令

$$\|v\|=(\int_\Omega |v|^2\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}},\ (u,v)=\int_\Omega u\cdot v\mathrm{d}x,$$

$$\|(u,v)\|=(\|u\|_{H^2}^2+\|v\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

引理 1.3.1 设 $\sigma(s)$ 满足条件(1.3.6)，$f(s)$ 满足条件(1.3.7)(1.3.8)。则对问题(1.3.1)～(1.3.3)的解，存在常数 $C_1=C_1(\|u_0,u_1\|)$，$C_2=C_2(\|g\|)$，使得

$$\|u_x\|^2+\|u\|^2+\|u_t\|^2\leqslant$$
$$C_1(\|(u_0,u_1)\|)\mathrm{e}^{-\omega t}+C_2(\|g\|) \tag{1.3.9}$$

成立。

证明 令 $v=u_t+\rho u$，其中 ρ 为充分小的待定正数。则式(1.3.1)为

$$v_t-\alpha v_{xx}-\rho v-\sigma(u_x)_x+\alpha\rho u_{xx}+\rho^2 u+f(u)=g(x) \tag{1.3.10}$$

作式(1.3.10)和 v 的内积得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\frac{1}{2}\|v\|^2+\int_\Omega E(u_x)\mathrm{d}x-\frac{\alpha\rho}{2}\|u_x\|^2+$$
$$\frac{\rho^2}{2}\|u\|^2+\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x-(g,u)\}+$$
$$\{\alpha\|v_x\|^2-\rho\|v\|^2+\rho\int_\Omega\sigma(u_x)u_x\mathrm{d}x-\alpha\rho^2\|u_x\|^2+$$
$$\rho^3\|u\|^2+\rho\int_\Omega f(u)u\mathrm{d}x-\rho(g,u)\}=0 \tag{1.3.11}$$

其中 $E(s)=\int_0^s\sigma(s)\mathrm{d}s$，$F(s)=\int_0^s f(s)\mathrm{d}s$。令

$$H_1(u,v)=\frac{1}{2}\|v\|^2+\int_\Omega E(u_x)\mathrm{d}x-\frac{\alpha\rho}{2}\|u_x\|^2+$$
$$\frac{\rho^2}{2}\|u_x\|^2+\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x-(g,u) \tag{1.3.12}$$

$$K_1(u,v)=\alpha\|v_x\|^2-\rho\|v\|^2+\rho\int_\Omega\sigma(u_x)u_x\mathrm{d}x-$$

$$\alpha\rho^2\|u_x\|^2+\rho^3\|u\|^2+\rho\int f(u)u\mathrm{d}x-\rho(g,u) \tag{1.3.13}$$

则式(1.3.11)可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_1(u,v)+K_1(u,v)=0 \tag{1.3.14}$$

现估计 $H_1(u,v)$和 $K_1(u,v)$。选取 ρ 充分小,使得

$$\rho<\min\{\frac{2}{3}\pi^2\alpha,\frac{\gamma_0}{8\alpha}\} \tag{1.3.15}$$

因 $\sigma(s)$满足式(1.3.6),有

$$\sigma(s)s\geqslant E(s)\geqslant\frac{\gamma_0}{2}s^2 \tag{1.3.16}$$

另一方面,因 $f(u)$满足式(1.3.7)、(1.3.8),则存在常数 C_{11},C_{12},使得

$$\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x\geqslant-\frac{\rho^2}{2}\|u\|^2-C_{11} \tag{1.3.17}$$

$$\int_\Omega[f(u)u-\omega F(u)]\mathrm{d}x\geqslant-\frac{\pi\gamma_0}{16}\|u\|^2-C_{12} \tag{1.3.18}$$

因此,因 $0<\omega\leqslant\frac{1}{2}$,则由式(1.3.16)~(1.3.18),有

$$K_1(u,v)-\omega\rho H_1(u,v)=$$

$$\alpha\|v_x\|^2-(\rho+\frac{\rho\omega}{2})\|v\|^2+\rho\int_\Omega[\sigma(u_x)u_x-\omega E(u_x)]\mathrm{d}x-$$

$$(\alpha\rho^2-\frac{\alpha\omega\rho^2}{2})\|u_x\|^2+(\rho^3-\frac{\rho^3\omega}{2})\|u\|^2+$$

$$\rho\int[f(u)u-\omega F(u)]\mathrm{d}x+\rho\omega(g,u)\geqslant$$

$$\alpha\|v_x\|^2-(\rho+\frac{\omega\rho}{2})\|v\|^2+\frac{\rho}{2}\int\sigma(u_x)u_x\mathrm{d}x-$$

$$(\alpha\rho^2-\frac{\alpha\omega\rho^2}{2})\|u_x\|^2+$$

$$(\rho^3 - \frac{\rho^3\omega}{2})\|u\|^2 - \frac{\pi^2\rho\gamma_0}{16}\|u\|^2 - C_{12}\rho - \rho\|g\|\ \|u\| \geqslant$$

$$(\alpha\pi^2 - \frac{3\rho}{2})\|v\|^2 + \frac{\gamma_0\rho}{4}\|u_x\|^2 -$$

$$\alpha\rho^2\|u_x\|^2 - \frac{\pi^2\rho\gamma_0}{8}\|u\|^2 - C_{12}\rho - C(\|g\|) \geqslant - C(\|g\|) \tag{1.3.19}$$

$$H_1(u,v) \geqslant$$

$$\frac{1}{2}\|v\|^2 + \frac{\gamma_0}{2}\|u_x\|^2 - \frac{\alpha\rho}{2}\|u_x\|^2 + \frac{\rho^2}{4}\|u\|^2 - C(\|g\|) \geqslant$$

$$\frac{1}{2}\|v\|^2 + \frac{\gamma_0}{4}\|u_x\|^2 + \frac{\rho^2}{4}\|u\|^2 - C(\|g\|) \tag{1.3.20}$$

从式(1.3.14)、(1.3.19)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_1(u,v) + \rho\omega H_1(u,v) \leqslant C(\|g\|) \tag{1.3.21}$$

因此由 Gronwall 不等式得

$$H_1(u,v) \leqslant H_1(u,v)(0)\mathrm{e}^{-\omega\rho t} + C(\|g\|)(1 - \mathrm{e}^{-\omega\rho t}) \tag{1.3.22}$$

因 $u_0 \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$,$\sigma(s)$是连续的,由嵌人定理和 $H_1(u,v)$的定义,可知$|H_1(u,v)| \leqslant C(\|(u_0,u_1)\|)$。联系式(1.3.20)即得引理的结论。

现估计$\|u_{xx}\|$的一致有界性。作式(1.3.1)和u_{xx}的内积得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\frac{\alpha}{2}\|u_{xx}\|^2 - (u_t,u_{xx})\} + (\sigma'(u_x)u_{xx},u_{xx})$$
$$= \|u_{xt}\|^2 + (f(u) - g(x),u_{xx}) \tag{1.3.23}$$

乘式(1.3.23)以 α 再和式(1.3.14)相加,且注意到

$$\|u_{xt} + \rho u_x\|^2 \geqslant \frac{1}{2}\|u_{xt}\|^2 - \rho^2\|u_x\|^2$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_2(u,u_t) + K_2(u,u_t) \leqslant 0 \tag{1.3.24}$$

其中

$$H_2(u,u_t)=\frac{\alpha^2}{2}\|u_{xx}\|^2-\alpha(u_t,u_{xx})+H_1(u,v) \quad (1.3.25)$$

$$K_2(u,u_t)=$$

$$\alpha\int_\Omega\sigma'(u_x)|u_{xx}|^2\mathrm{d}x-\alpha(f(u)-g,u_{xx})$$

$$-\alpha\rho\|u_x\|^2-\rho\|v\|^2+\rho\int_\Omega\sigma(u_x)u_x\mathrm{d}x$$

$$-\alpha\rho^2\|u_x\|^2+\rho^3\|u\|^2+\rho\int_\Omega f(u)u\mathrm{d}x-\rho(q,u)$$

(1.3.26)

选取 ρ 满足式(1.3.15),可知

$$\frac{\alpha}{2}\int_\Omega\sigma'(u_x)|u_{xx}|^2\mathrm{d}x-\frac{\alpha^2\rho}{2}\|u_{xx}\|^2\geqslant(\frac{\alpha\gamma_0}{2}-\frac{\alpha^2\rho}{2})\|u_{xx}\|^2\geqslant 0$$

$$\alpha\rho|(u_t,u_{xx})|\leqslant\frac{\alpha\gamma_0}{8}\|u_{xx}\|^2+C\|u_t\|^2$$

$$\alpha|(f(u)-g,u_{xx})|\leqslant\frac{\alpha\gamma_0}{8}\|u_{xx}\|^2+C(\|f(u)\|^2+\|g\|^2)$$

因此存在 C_{21},C_{22}使得

$$K_2(u,u_t)-\rho H_2(u,u_t)\geqslant -C_{21}(\|u_t\|^2+$$

$$\|u\|^2+\|u_x\|^2+\|F(u)\|_\infty+\|f(u)\|_\infty)-$$

$$C_{22}(\|g\|)\geqslant -C_3(\|(u_0,u_1)\|)-C_4(\|g\|) \quad (1.3.27)$$

由引理 1.3.1,从式(1.3.27)和式(1.3.24)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_2(u,u_t)+\rho H_2(u,u_t)\leqslant C_3\|(u_0,u_1)\|+C_4(\|g\|)$$

(1.3.28)

因此

$$H_2(u,u_t)\leqslant H_2(u,u_t)(0)\mathrm{e}^{-\rho t}+\rho^{-1}(C_3(\|(u_0,u_1)\|)+C_4)$$

(1.3.29)

因 $H_2(u,u_t)(0)\leqslant C(\|(u_0,u_1)\|)$,从式(1.3.29)可知 $H_2(u,v)$

一致有界。另一方面，

$$H_2(u,u_t) \geqslant \frac{a^2}{4}\|u_{xx}\|^2$$
$$-C(\|u_x\|^2+\|u\|^2+\|u_t\|^2+\|F(u)\|_\infty+\|g\|)$$
(1.3.30)

则由嵌入定理和引理1.3.1可知$\|u_{xx}\|$一致有界。因此有

定理 1.3.2 设$\sigma(s)$,$f(u)$分别满足式(1.3.6)~(1.3.8)。则对任何$(u_0,u_1)\in\mathscr{H}=D(A)\times L^2(\Omega)$,存在问题(1.3.1)~(1.3.3)的整体解$(u,u_t)\in C(0,\infty;\mathscr{H})$。

从定理1.3.1,定理1.3.2可知问题(1.3.1)~(1.3.3)生成非线性半群$S(t)$在$\mathscr{H}$上。$S(t)(u_0,u_1)=(u(t),u_t(t))$,其中$u(t)$为问题(1.3.1)~(1.3.3)的唯一解,而且半群$S(t)$对t和(u_0,u_1)是连续的。我们证明$S(t)$在$\mathscr{H}$中具有有界吸收集。

命题 1.3.1 在定理1.3.2假设下,存在常数M_0,使得对问题(1.3.1)~(1.3.3)具有初值$(u_0,u_1)\in\mathscr{H}$满足$\|(u_0,u_1)\|\leqslant R$的任何解$(u(t),u_t(t))$,存在$T=T(R)>0$使得

$$\|S(t)(u_0,u_1)\| = \|(u(t),u_t(t))\| \leqslant M_0, t\geqslant T(R)$$

换言之,$B=\{(u_1,u_2)\in\mathscr{H}\mid \|(u_1,u_2)\|\leqslant M_0\}$是$S(t)$在$\mathscr{H}$中的一个有界吸收集。

证明 从引理1.3.1。可知存在常数$\rho_{0,\infty}=\rho_{0,\infty}(\|g\|)$和$T_0=T_0(R)$使得

$$\|u_x\|^2+\|u\|^2+\|u_t\|^2\leqslant \rho_{0,\infty}^2, t\geqslant T_0(R)$$
(1.3.31)

由 Sobolev 嵌入定理知$\|u\|_\infty\leqslant\|u_x\|\leqslant\rho_{0,\infty}, t\geqslant T_0(R)$。由式(1.3.29)有

$$K_2(u,u_t)-\rho H_2(u,u_t)\geqslant -C\rho_{0,\infty}^2-C\|g\|^2\equiv \rho_{1,\infty}^2, (t\geqslant T_0(R)) \quad (1.3.32)$$

从式(1.3.24)和式(1.3.31)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_2(u,u_t)+\rho H_2(u,u_t)\leqslant \rho_{1,\infty}^2, t\geqslant T_0(R) \quad (1.3.33)$$

因此

$$H_2(u,u_t) \leqslant H_2(u,u_t)(0)\mathrm{e}^{-\rho t} + \rho^{-1}\rho_{1,\infty}^2, t \geqslant T_0(R)$$

(1.3.34)

由式(1.3.30)可知存在常数 $\rho_{2,\infty}$,使得

$$\| u_{xx} \|^2 \leqslant \rho_{2,\infty}^2, t \geqslant T_1(R) \qquad (1.3.35)$$

由式(1.3.31)、(1.3.35)完成了命题的证明。

为了证明 $S(t)$整体紧的吸引子的存在性,必须对 $S(t)$进行分解。

命题 1.3.2 问题(1.3.1)~(1.3.3)所定义的半群 $S(t)$可作如下分解:

$$S(t) = C(t) + V(t) \qquad (1.3.36)$$

其中:$V(t)$,当 $t>t_0$ 时为一致相对紧的;$C(t)$从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}$ 为连续映照,且满足对任何有界集 $B_1 \subset \mathscr{H}$,

$$r_c(t) = \sup_{\phi \in B_1} \| C(t)\phi \| \to 0, t \to \infty \qquad (1.3.37)$$

证明 设$(u_0,u_1) \in B_1 = \{(u_0,u_1) \mid \| (u_0,u_1) \| \leqslant R\}$。

令$\bar{v}(x,t) \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$,$\forall T>0$,为如下定解问题的唯一解:

$$(P_1)\begin{cases} \bar{v}_t - \alpha \bar{v}_{xx} = 0 \\ \bar{v}(x,0) = u_1 \\ \bar{v}(0,t) = \bar{v}(1,t) = 0 \end{cases}$$

且 $v(x,t)$为如下问题的唯一解:

$$(P_2)\begin{cases} v_t - \alpha v_{xx} = (\sigma(u_x))_x - f(u) + g \\ v(x,0) = 0 \\ v(0,t) = v(1,t) = 0 \end{cases}$$

由上述(P_2)问题解的唯一性,推得 $u_t = \bar{v} + v$。另一方面,从(P_1)有

$$\| \bar{v}(t) \|^2 \leqslant \| u_1 \|^2 \mathrm{e}^{-\alpha\pi^2 t} \qquad (1.3.38)$$

因$(u,u_t) \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))$,由命题 1.3.1 可知,$\bar{G}(x,t) = \sigma(u_x)_x - f(u) + g(x) \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))$且

$$\| \overline{G}(x,t) \| \leqslant \| \sigma'(u_x) \|_{\infty} \| u_{xx} \| - \| f(u) \| + \| g \| \leqslant C(M_0), t \geqslant T_0(R)$$

从问题(P_2)可知，$v(x,t)\in L^{\infty}(0,\infty;H_0^1(\Omega))$且

$$\| v \|^2 + \| v_x \|^2 \leqslant C \| G \|^2 (1 - \mathrm{e}^{-\frac{\alpha\pi^2}{2}t}) \leqslant C(R), t > T \tag{1.3.39}$$

设$\overline{w}(x,t)\in L^{\infty}(0,\infty;H^2\cap H_0^1)$为如下问题的解：

$$(P_3)\begin{cases}\overline{w}_{tt} - \alpha\overline{w}_{xxt} + \alpha^{-1}\sigma'(u_x)(\overline{w}_t - \alpha\overline{w}_{xx}) = \\ \quad \alpha^{-1}\sigma'(u_x)\overline{v}(x,t) \overset{\text{def}}{=\!=} \overline{F}(x,t) \\ \overline{w}(0) = u_0, \overline{w}_t(0) = u_1 \\ \overline{w}(0,t) = \overline{w}(1,t) = 0\end{cases}$$

其中$\overline{v}(x,t)$为问题(P_1)的解。容易证明问题(P_3)的解是唯一的。事实上，令$\overline{\theta}(x,t)$为如下问题的唯一解

$$(P_4)\begin{cases}\dfrac{\partial\overline{\theta}}{\partial t} + \alpha^{-1}\sigma'(u_x)\overline{\theta} = \overline{F}(x,t) \\ \overline{\theta}(x,0) = u_1 - \alpha u_{0xx} \in L^2\end{cases}$$

$\overline{\theta}$能被显式表示为

$$\overline{\theta}(x,t) = \mathrm{e}^{-\alpha^{-1}\int_0^t \sigma'(u_x(x,\tau))\mathrm{d}\tau}(u_1 - \alpha u_{0xx}) + \mathrm{e}^{-\alpha^{-1}\int_0^t \sigma'(u_x(x,\tau))\mathrm{d}\tau} \cdot \int_0^t \overline{F}(x,\tau)\mathrm{e}^{\alpha^{-1}\int_0^\tau \sigma'(u_x(x,s))\mathrm{d}s}\mathrm{d}\tau \tag{1.3.40}$$

从式(1.3.40)可知$\overline{\theta}\in L^{\infty}(0,\infty;L^2(\Omega))$，$\overline{\theta}_t\in L^{\infty}(0,\infty;L^2(\Omega))$，且存在常数$\beta>0$，$C>0$使得

$$\begin{aligned}&\| \overline{\theta} \|^2 \leqslant C(\| u_1 \|^2 + \| u_{0xx} \|^2)\mathrm{e}^{-\beta t}, \\ &\| \overline{\theta}_t \|^2 \leqslant C(\| u_1 \|^2 + \| u_{0xx} \|^2)\mathrm{e}^{-\beta t}\end{aligned} \tag{1.3.41}$$

现求解如下问题

$$(P_5)\begin{cases}\overline{w}_t - \alpha\overline{w}_{xx} = \overline{\theta}(x,t) \\ \overline{w}(x,0) = u_0 \\ \overline{w}(0,t) = \overline{w}(1,t) = 0\end{cases}$$

则$\overline{w}(x,t)\in L^{\infty}(0,\infty;H^2\cap H_0^1)$，$\overline{w}_t(x,t)\in L^{\infty}(0,\infty;L^2(\Omega))$，$\overline{w}(x,t)$为问题$(P_3)$的解。显然，问题$(P_5)$的解是唯一的。由式(1.3.41)和$(P_5)$推出，存在常数$\beta_2$和$C=C(\|(u_0,u_1)\|)$，使得

$$\|(\overline{w},\overline{w}_t)\|\leqslant C(\|(u_0,u_1)\|)e^{-\beta_2 t}\leqslant C(R)e^{-\beta_2 t} \tag{1.3.42}$$

最后，我们考虑如下问题：

$$(P_6)\begin{cases}(w_t-\alpha w_{xx})_t+\alpha^{-1}\sigma'(u_x)(w_t-\alpha w_{xx})=F\\ w(x,0)=0,w_t(x,0)=0\\ w(0,t)=w(1,t)=0\end{cases}$$

其中

$$F(x,t)=\alpha^{-1}\sigma'(u_x)u_t-\alpha^{-1}\sigma'(u_x)\overline{v}-f(u)+g=\\ \alpha^{-1}\sigma'(u_x)v(x,t)-f(u)+g$$

因$(u,u_t)\in\mathscr{H}$，$v(x,t)\in L^{\infty}(0,\infty;H_0^1)$，且满足式(1.3.39)，可知$F(x,t)\in L^{\infty}(0,\infty;H^1)$，且

$$\|F(x,t)\|^2+\|F_x(x,t)\|^2\leqslant C(R_0) \tag{1.3.43}$$

定义

$$\theta(x,t)=e^{-\alpha^{-1}\int_0^t\sigma'(u_x(x,\tau))d\tau}\cdot\int_0^t F(x,t)e^{-\alpha^{-1}\int_0^t\sigma'(u_x(x,s))ds}d\tau \tag{1.3.44}$$

可知$\theta(x,t)\in L^{\infty}(0,\infty;H^1)$，$\theta_t(x,t)\in L^{\infty}(0,\infty;H^1)$，且

$$\|\theta\|_{H^1}^2+\|\theta_t\|_{H^1}^2\leqslant C(R)$$

现求解如下问题

$$\begin{cases}w_t-\alpha w_{xx}=\theta(x,t)\\ w(x,0)=0,\\ w(0,t)=w(1,t)=0\end{cases}$$

则$w(x,t)\in H^3\cap H_0^1$为(P_5)的唯一解，且有

$$\|w(x,t)\|_{H^3}\leqslant C(R) \tag{1.3.45}$$

由问题(P_6)解的唯一性，有$u(x,t)=\overline{w}(x,t)+w(x,t)$。现定义

$$C(t)(u_0,u_1)=(\overline{w},\overline{v})$$

$$U(t)(u_0,u_1)=(w,v)$$

则由式(1.3.38)、(1.3.39)、(1.3.42)、(1.3.45)可知 $S(t)=C(t)+U(t)$,且 $C(t)$,$U(t)$满足命题 1.3.2 的要求的性质。

从命题 1.3.1、1.3.2 及由文献[80]中定理 1.1.1 可得

定理 1.3.3 由问题(1.3.1)~(1.3.3)所定义的半群算子 $S(t)$在 $\mathscr{H}$ 中具有整体紧的吸引子。即存在一个在 $\mathscr{H}$ 中紧的连通的不变集 $\mathscr{A}$,它吸引 $\mathscr{H}$ 中的一切有界集。

以下估计吸引子 $\mathscr{A}$ 的维数。设 $\xi_0=(u_0,u_1)\in\mathscr{H}$,且 $u(t)$为相应的问题(1.3.1)~(1.3.3)的解,即 $S(t)\xi_0=(u(t),u_t(t))$。容易类似地证明 $S(t)$的一致可微性。

命题 1.3.3 设 $\xi_0^1=(u_0^1,u_1^1)$,$\xi_0^2=(u_0^2,u_1^2)\in\mathscr{H}$,且 $\|\xi_0^1\|\leqslant R$,$\|\xi_0^2\|\leqslant R$。则对任何 T,R,$0<T,R<+\infty$,存在常数 $C=C(R,T)$使得

$$\|S(t)\xi_0^1-S(t)\xi_0^2\|^2\leqslant C(R,T)\|\xi_0^1-\xi_0^2\|,0\leqslant t\leqslant T \tag{1.3.46}$$

现考虑问题(1.3.1)~(1.3.3)的线性变分问题

$$U_{tt}-U_{xxt}-(\sigma'(u_x)U_x)_x+f'(u)U=0 \tag{1.3.47}$$

$$U(x,0)=w_0,U_t(x,0)=w_1 \tag{1.3.48}$$

$$U(0,t)=U(1,t)=0 \tag{1.3.49}$$

其中$(u,u_t)=S(t)\xi_0$,$\eta_0=(w_0,w_1)\in\mathscr{H}$。因 $S(t)\xi_0\in C(\mathbf{R}^+;\mathscr{H})$,容易看到线性问题(1.3.47)~(1.3.49)具有唯一解$(U(t),U_t(t))\in C(\mathbf{R}^+;\mathscr{H})$。可以证明

$$(DS(t)\xi_0)\eta_0=(U(t),U_t(t)) \tag{1.3.50}$$

$S(t)$在 ξ_0 处是一致可微的。

命题 1.3.4 对任何 R 和 T,$0<R,T<\infty$,存在一常数 $C=C(R,T)$,使得对任何 $\xi_0=(u_0,u_1)$,$h_0=(h_{01},h_{02})$满足 $\|\xi_0\|\leqslant R$,$\|\xi_0+h_0\|\leqslant R$,$t\leqslant T$ 有

$$\|S(t)(\xi_0+h_0)-S(t)\xi_0-(DS(t)\xi_0)h_0\|\leqslant C(R,T)\|h_0\|^2 \tag{1.3.51}$$

取 $\eta_0^1,\eta_0^2,\cdots,\eta_0^m\in\mathscr{H}$，研究 Gram 行列式的演化：

$$\|\eta^1(t)\wedge\eta^2(t)\wedge\cdots\wedge\eta^m(t)\|_{\Lambda^m(\mathscr{H})}=\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}((\eta^i,\eta^j))\tag{1.3.52}$$

其中 $\eta^j(t)=(DS(t)\xi_0)\eta_0^j$，且 $((\cdot,\cdot))$ 表示在 $\mathscr{H}$ 中的内积。我们将证明对充分大的 m，当 $t\to\infty$ 时，行列式(1.3.52)指数衰减为 0。

定理 1.3.4 设 $f'(u)\geqslant 0$。$\mathscr{A}$ 为问题(1.3.1)～(1.3.3)的整体吸引子。则存在常数 $\mu>0,C_1,C_2>0$ 使得对任何 $\xi_0\in\mathscr{A}$，$m\geqslant 1,t\geqslant 0$，有

$$\begin{aligned}&\|(DS(t)\xi_0)\eta^1\wedge(DS(t)\xi_0)\eta^2\wedge\cdots\wedge(DS(t)\xi_0)\eta^m\|_{\Lambda^m(\mathscr{H})}\\&\leqslant\|\eta_0^1\wedge\eta_0^2\wedge\cdots\wedge\eta_0^m\|_{\Lambda^m(\mathscr{H})}C_1^m\exp(C_2\sqrt{m}-\mu m)t,\\&\qquad\forall\,\eta_0^i\in\mathscr{H}\end{aligned}\tag{1.3.53}$$

证明 我们首先考虑 $\mathscr{H}$ 的等价模。令 $\xi_0\in\mathscr{A}$，$(u,u_t)=S(t)\xi_0$，$\eta(t)=(U(t),U_t(t))=(DS(t)\xi_0)\eta_0$，其中 $\eta_0=(w_0,w_1)\in\mathscr{H}$。则 $U(t)$ 满足式(1.3.46)～(1.3.49)，令 $w(t)=e^{\mu t}U(t)$，其中 μ 为待定正数。则 $w(t)$ 满足

$$\begin{aligned}&w_{tt}-\alpha w_{xxt}-2\mu w_t-(\sigma'(u_x)w_x)_x+\\&\alpha\mu w_{xx}+\mu^2w+f'(u)w=0\end{aligned}\tag{1.3.54}$$

式(1.3.54)乘以 w_t，在 Ω 上积分可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\frac{1}{2}\|w_t\|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega\sigma'(u_x)|w_x|^2\mathrm{d}x-\frac{\alpha\mu}{2}\|w_x\|^2+\\&\frac{\mu^2}{2}\|w\|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega f'(u)|w|^2\mathrm{d}x\Big\}=\\&-\alpha\|w_{xt}\|^2+2\mu\|w_t\|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega\sigma''(u_x)u_{tx}|w_x|^2\mathrm{d}x-\\&\frac{1}{2}\int_\Omega f''(u)u_t|w|^2\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{1.3.55}$$

式(1.3.54)乘以 w_{xx}，在 Ω 上积分可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\frac{\alpha}{2}\|w_{xx}\|^2-(w_t,w_{xx})-\frac{\mu}{2}\|w_x\|^2\Big\}$$

$$\|w_{xt}\|^2-\int_\Omega\sigma'(u_x)|w_{xx}|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega\sigma''(u_x)u_{xx}w_xw_{xx}\mathrm{d}x+$$

$$\alpha\mu\|w_{xx}\|^2-\mu^2\|w_x\|^2-\int_\Omega f'(u)|w_x|^2\mathrm{d}x-$$

$$\int_\Omega f''(u)u_xww_x\mathrm{d}x \tag{1.3.56}$$

式(1.3.55)乘以常数 k 再和式(1.3.56)相加得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J(\xi(t))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J(w,w_t)=K(\xi(t))=K(w,w_t) \tag{1.3.57}$$

其中 $\xi(t)=(w,w_t)\in\mathscr{H}$。

$$J(\xi)=\frac{\alpha}{2}\|\xi_{1xx}\|^2-(\xi_2,\xi_{1xx})-\frac{\mu}{2}\|\xi_{1x}\|^2+$$

$$\frac{k}{2}\|\xi_2\|^2+\frac{k}{2}[\int_\Omega\sigma'(u_x)\xi_{1x}-\alpha\mu\|\xi_{1x}\|^2]+$$

$$\frac{\mu^2k}{2}\|\xi_1\|^2+\frac{k}{2}\int_\Omega f'(u)|\xi_1|^2\mathrm{d}x \tag{1.3.58}$$

$$K(\xi)=(-\alpha k+1)\|\xi_{2x}\|^2+2\mu k\|\xi_2\|^2-\int_\Omega\sigma'(u_x)|\xi_{1xx}|^2\mathrm{d}x+$$

$$\alpha\mu\|\xi_{1xx}\|^2-\mu^2\|\xi_{1x}\|^2+\frac{2}{k}\int_\Omega\sigma''(u_x)u_{xt}|\xi_{1x}|^2\mathrm{d}x+$$

$$\frac{k}{2}\int_\Omega f''(u)u_t|\xi_1|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega f'(u)|\xi_{1x}|^2\mathrm{d}x-$$

$$\int_\Omega f''(u)u_x\xi_1\xi_{1x}\mathrm{d}x-\int_\Omega\sigma''(u_x)u_{xx}\xi_{1x}\xi_{1xx}\mathrm{d}x \tag{1.3.59}$$

对于 $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in\mathscr{H},\xi_{2x}\in L^2(\Omega)$。现选取 $k=\frac{1}{\alpha}$,μ 满足

$$0<\mu<\min(\frac{\gamma_0}{2\alpha},\frac{\alpha\pi^2}{4},1) \tag{1.3.60}$$

因 $f'(u)\geqslant0$,我们有

$$J(\xi)\geqslant\frac{\alpha}{2}\|\xi_{1xx}\|^2-\frac{\alpha}{4}\|\xi_{1xx}\|^2-\frac{1}{2}\|\xi_2\|^2+\frac{k}{2}\|\xi_2\|^2+$$

$$\frac{k\gamma_0}{4}\|\xi_{1x}\|^2-\frac{\mu}{2}\|\xi_{1x}\|^2-\frac{k\alpha\mu}{4}\|\xi_{1x}\|^2+$$

$$\frac{\mu^2k}{2}\|\xi_1\|^2+\frac{k}{2}\int_\Omega f'(u)|\xi_1|^2\mathrm{d}x\geqslant$$

$$\frac{\alpha}{4}\|\xi_{1xx}\|^2+\frac{1}{\alpha}\|\xi_2\|^2+\frac{\gamma_0}{4\alpha}\|\xi_{1x}\|^2+\frac{2\mu^2}{\alpha}\|\xi_1\|^2 \tag{1.3.61}$$

因 $S(t)\xi_0=(u(t),u_t(t))\in\mathscr{A}$，可知 $\|u_x\|_\infty$，$\|u\|_\infty$，$\|u_{xx}\|$，$\|u_t\|$ 为一致有界。由定义式(1.3.58)和式(1.3.61)可知存在正常数 k_0,k_1，使得

$$k_0\|\xi\|^2\leqslant J(\xi)\leqslant k_1\|\xi\|^2 \tag{1.3.62}$$

因此 $J(\xi)^{\frac{1}{2}}$ 为 $\mathscr{H}$ 的等价模。至于 $K(\xi)$，有

$$\left|\frac{k}{2}\int_\Omega\sigma''(u_x)u_{xt}|\xi_{1x}|^2\mathrm{d}x\right|=$$

$$\left|-\frac{k}{2}\int_\Omega\sigma'''(u_x)u_{xx}u_t|\xi_{1x}|^2\mathrm{d}x-k\int_\Omega\sigma''(u_x)u_t\xi_{1x}\xi_{1xx}\mathrm{d}x\right|\leqslant$$

$$C(\|\xi_{1x}\|_\infty^2+\|\xi_{1x}\|\|\xi_{1xx}\|)\leqslant$$

$$C(\|\xi_1\|_{H^2}^2+\|\xi_2\|^2)^{\frac{3}{4}}\|\xi_{1x}\|^{\frac{1}{2}}$$

$K(\xi)$ 的其他后面三项具有相同估计。由于 k,μ 在式(1.3.62)中的选取，$K(\xi)$ 的前三项 $\leqslant 0$，即

$$(-\alpha k+1)\|\xi_{2x}\|^2+2\mu k\|\xi_2\|^2-$$

$$\int_\Omega\sigma'(u_x)|\xi_{1xx}|^2\mathrm{d}x+\alpha\mu\|\xi_{1xx}\|^2\mathrm{d}x\leqslant 0$$

因此有

$$K(\xi)\leqslant C(\|\xi_1\|_{H^2}^2+\|\xi_2\|^2)^{\frac{3}{4}}\|\xi_{1x}\|^{\frac{1}{2}} \tag{1.3.63}$$

为了估计 m 维体积的变化，我们需要以下引理：

引理 1.3.2 设 $\phi(\cdot,\cdot)$，$\phi_1(\cdot,\cdot)$ 为在 Hilbert 空间上的两个数量积，它是连续和强制的。即有

$$\alpha\phi(\xi,\xi)\leqslant\phi_1(\xi,\xi)\leqslant\beta\phi(\xi,\xi),\ \forall\xi\in H \tag{1.3.64}$$

则有

$$\alpha^m \det_{1\leqslant i,j\leqslant m} \phi(\xi^i,\xi^j) \leqslant \det_{1\leqslant i,j\leqslant m} \phi_1(\xi^i,\xi^j) \leqslant$$

$$\beta^m \det_{1\leqslant i,j\leqslant m} \phi(\xi^i,\xi^j), \forall\ \xi^i \in H, i=1,2,\cdots,m \quad (1.3.65)$$

置 $w^i(t)=e^{\mu t}U^i(t), i=1,2,\cdots,m$。于此 $(U^i(t),U_t^i(t))=(DS(t)\xi_0)\eta_0^i$。令 $\bar{\eta}^i(t)=(w^i(t),w_t^i-\mu w^i)$，$\xi^i(t)=(w^i(t),w_t^i(t))$ 则

$$\| \eta^1(t) \wedge \eta^2(t) \wedge \cdots \wedge \eta^m(t) \|^2_{\Lambda^m(\mathscr{H})} =$$

$$e^{-2\mu mt} \| \bar{\eta}^1(t) \wedge \bar{\eta}^2(t) \wedge \cdots \wedge \bar{\eta}^m(t) \|_{\Lambda^m(\mathscr{H})} =$$

$$e^{-2\mu mt} \det_{1\leqslant i,j\leqslant m} ((\bar{\eta}^i(t),\bar{\eta}^j(t))) =$$

$$e^{-2\mu mt} \det_{1\leqslant i,j\leqslant m} \phi_1(\xi^i(t),\xi^j(t)) \quad (1.3.66)$$

其中 $\phi_1(\xi,\eta)$ 为数量积，$\phi_1(\xi,\eta)=((\xi_1,\eta_1))_{2s}+(\xi_2-\mu\xi_1,\eta_2-\mu\eta_1)$，$\xi=(\xi_1,\xi_2),\eta=(\eta_1,\eta_2)\in\mathscr{H}$。因 $\mu<1$ 可知 $\phi_1(\cdot,\cdot)$ 满足引理 1.3.2 条件。因此存在常数 C，使得

$$\det_{1\leqslant i,j\leqslant m} \phi_1(\xi^i(t),\xi^j(t)) \leqslant C \det_{1\leqslant i,j\leqslant m} ((\xi^i(t),\xi^j(t))) \quad (1.3.67)$$

为了估计 $\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}((\xi^i(t),\xi^j(t)))$，我们引入如下双线性对称形式在 $\mathscr{H}$ 上，对任何 $\xi=(\xi_1,\xi_2),\eta=(\eta_1,\eta_2)\in\mathscr{H}$，

$$\phi(\xi,\eta) = \frac{\alpha}{2}(\xi_{1xx},\eta_{1xx}) =$$

$$\frac{1}{2}[(\xi_2,\eta_{1xx}) + (\eta_2,\xi_{1xx})] - \frac{\mu}{2}(\xi_{1x},\eta_{1x}) +$$

$$\frac{k}{2}(\xi_2,\eta_2) + \frac{k}{2}\int_\Omega \sigma'(u_x)\xi_{1x}\eta_{1x}\mathrm{d}x - \frac{\alpha\mu k}{2}(\xi_{1x},\eta_{1x}) +$$

$$\frac{\mu^2 k}{2}(\xi_1,\eta_1) + \frac{k}{2}\int_\Omega f'(u)\xi_1\eta_1\mathrm{d}x \quad (1.3.68)$$

则 $\phi(\eta,\eta)=J(\eta)$。由式(1.3.62)可知 $\phi(\eta,\eta)^{\frac{1}{2}}$ 为一个等价模。因此由引理 1.3.2，有

$$k_0^m \det_{1\leqslant i,j\leqslant m} ((\xi^i(t),\xi^j(t))) \leqslant \det_{1\leqslant i,j\leqslant m} \phi(\xi^i(t),\xi^j(t))$$

$$\leqslant k_1^m \det_{1\leqslant i,j\leqslant m} ((\xi^i(t),\xi^j(t))) \quad (1.3.69)$$

因此,我们需要估计 $H_m(t)=\det\limits_{1\leqslant i,j\leqslant m}\phi(\xi^i(t),\xi^j(t))$,如同文献[13]中所证有

$$\frac{\mathrm{d}H_m(t)}{\mathrm{d}t}=H_m(t)\sum_{l=1}^{m}\max_{\substack{F\subset K^m\\ \dim F=l}}\min_{\substack{x\in F\\ x\neq 0}}\frac{K(\sum_{j=1}^{m}x_j\xi^j(t))}{J(\sum_{j=1}^{m}x_j\xi^j(t))} \tag{1.3.70}$$

由式(1.3.62)、(1.3.63),有

$$\frac{\mathrm{d}H_m(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant\frac{C}{k_0}H_m(t)\times$$

$$\sum_{l=1}^{m}\max_{\substack{F\subset R^m\\ \dim F=l}}\min_{\substack{x\in F\\ x\neq 0}}\frac{\|\sum_{j=1}^{m}x_j\xi^j(t)\|_{\dot H}^{\frac{3}{2}}\|\sum_{j=1}^{m}x_j\xi^j(t)\|^{\frac{1}{2}}}{\|\sum_{j=1}^{m}x_j\xi^j(t)\|_H^2}\leqslant$$

$$CH_m(t)\sum_{l=1}^{m}\max_{\substack{F\subset K^m\\ \dim F=l}}\min_{\substack{x\in F\\ x\neq 0}}\frac{\|\sum_{j=1}^{m}x_j\xi^j(t)\|^{\frac{1}{2}}}{\|\sum_{j=1}^{m}x_j\xi^j(t)\|_{\dot H}^{\frac{1}{2}}}\leqslant$$

$$CH_m(t)\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{\lambda_l^{1/4}}\leqslant$$

$$C\sqrt{m}H_m(t) \tag{1.3.71}$$

因 $\mathscr{A}$ 的特征值 $\lambda_l=\pi^2l^2$。因此

$$H_m(t)\leqslant H_m(0)\mathrm{e}^{C\sqrt{m}t} \tag{1.3.72}$$

联系式(1.3.66)、(1.3.69)、(1.3.71),即得定理的结论。

作为定理 1.3.4 的推论,有

定理 1.3.5 设 $f'(u)\geqslant 0$,则定理 1.3.4 所确定的整体吸引子具有有限的分形和 Hausdorff 维数。

证明 从定理 1.3.4 可知,$\forall\xi_0\subset\mathscr{A}$,

$$\omega_m(DS(t)\xi_0)\leqslant C_1^m\exp(C_2\sqrt{m}-\mu m)t$$

其中 ω_m 为 Lyaponov 指数。故 $\overline{\omega}_m(\mathscr{A})<1$。只要 m 充分大,$m>$

$(\frac{C_2}{\mu})^2$，于此$\overline{\omega}_m(\mathscr{A})$为 $\mathscr{A}$ 的一致 Lyapunov 指数。由文献[80]中的定理 V.3.1 可得到 $\mathscr{A}$ 具有有限的分形和 Hausdorff 维数。

1.4 KdV 耦合方程组

考虑如下的 KdV 耦合方程组

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x + 2vv_x \tag{1.4.1}$$

$$v_t = 2(uv)_x \tag{1.4.2}$$

该方程组是 1985 年 Kupershmidt 在文献[55]中提出的，它描写两个内长波的相互作用。Ito 在文献[56]中提出了循环算子方法，指出方程(1.4.1)、(1.4.2)具有无穷多个对称和运动常数。郭、谭 1991 年在文献[57]中首次证明方程组柯西问题整体光滑解的存在、唯一性。1996 年在文献[58]中，郭、杨考虑相应的耗散方程组，证明了整体吸引子的存在性和维数的有限性。

现考虑如下具耗散的 KdV 耦合方程组的周期初值问题

$$u_t + f(u)_x - \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} + 2vv_x = G_1(u,v) + h_1(x) \tag{1.4.3}$$

$$v_t - \gamma v_{xx} + 2(uv)_x = G_2(u,v) + h_2(x), x \in \mathbf{R}, t > 0 \tag{1.4.4}$$

$$u(x+D,t) = u(x-D,t), v(x+D,t) = v(x-D,t)$$
$$x \in \mathbf{R}, t \geqslant 0 \tag{1.4.5}$$

$$u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), x \in \mathbf{R} \tag{1.4.6}$$

其中 $D>0, \alpha>0, \beta\neq 0, \gamma>0$ 为实数。我们先作问题(1.4.3)～(1.4.6)对 t 无关的一致先验估计，再证明整体吸引子的存在性，再估计它的维数的上界。

引理 1.4.1 设

(1) $G_I(0,0)=0, I=1,2$，对任何$(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^2$ 为常数。

$$(\xi,\eta)\begin{pmatrix} -G_{1u} & -G_{1v} \\ -G_{2u} & -G_{2v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \geqslant b_0(\xi^2+\eta^2), b_0>0 \text{ 为常数}$$

(2) $u_0(x), v_0(x) \in L^2(\Omega), h_i(x) \in L^2(\Omega), I = 1,2, \Omega = (-D,D)$。

则对问题(1.4.3)～(1.4.6)的光滑解有如下估计：

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 \leqslant e^{-b_0 t}(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2) + \frac{1}{b_0^2}(1 - e^{-b_0 t})(\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2) \tag{1.4.7}$$

更进一步有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}(\|u(\cdot,t)\|^2 + \|v(\cdot,t)\|^2) \leqslant \frac{1}{b_0^2}(\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2) \equiv E_0 \tag{1.4.8}$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t [\alpha \|u_x(\cdot,\tau)\|^2 + \gamma \|v_x(\cdot,\tau)\|^2] d\tau \leqslant \frac{1}{2b_0}(\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2) \tag{1.4.9}$$

证明 作式(1.4.3)和 u,式(1.4.3)和 v 的内积,得

$$(u, u_t + f(u)_x - \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} + 2vv_x) = (u, G_1(u,v) + h_1) \tag{1.4.10}$$

$$(v, v_t - \gamma v_{xx} + 2(uv)_x) = (v, G_2(u,v) + h_2) \tag{1.4.11}$$

其中 $(u,w) = \int_{-D}^{D} u(x,t)w(x,t)dx$ 且

$$(u, f(u)_x) = 0, (u, -\alpha u_{xx}) = \alpha \|u_x\|^2, (u, u_{xxx}) = 0,$$

$$(u, 2vv_x) + (u, 2(uv)_x) = 0,$$

$$(u, G_1(u,v)) + (v, G_2(u,v)) \leqslant -b_0(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

式(1.4.10)+式(1.4.11),得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u\|^2 + \|v\|^2) + \alpha \|u_x\|^2 + \gamma \|v_x\|^2 + \frac{b_0}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2) \leqslant \frac{1}{2b_0}(\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2) \tag{1.4.12}$$

由不等式(1.4.12)推出式(1.4.8)、(1.4.9)。

引理 1.4.2 在引理 1.4.1 条件下,设

(1) $f\in C^2, G_i\in C^1, i=1,2$ 且

$$|f(u)|\leqslant A|u|^{5-\delta},\delta>0,A>0$$

$$|G_i(u,v)\leqslant B_i(|u|^5+|v|^5),B_i>0,I=1,2$$

(2) $u_{0x},v_{0x}\in L^2(\Omega)$。则有

$$\|u_x\|^2+\|v_x\|^2\leqslant$$

$$2\mathrm{e}^{-2b_0t}(\|u_{0x}\|^2+\|v_{0x}\|^2-\frac{2}{\beta}\int F(u_0(x))\mathrm{d}x)+$$

$$2\mathrm{e}^{-2b_0t}\int_0^t C_1\mathrm{e}^{2b_0s}\mathrm{d}s+$$

$$\frac{1}{b_0}(1-\mathrm{e}^{-2b_0t})(\frac{4}{\gamma}\|h_2\|^2+\frac{3}{\alpha}\|h_1\|^2)+C_2 \tag{1.4.13}$$

其中函数 C_1,C_2 依赖于 $\|u\|,\|v\|$。更进一步有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}(\|u_x(\cdot,t)\|^2+\|v_x(\cdot,t)\|^2)\leqslant$$

$$\frac{1}{b_0}\max_{t\geqslant0}C_1+\frac{1}{b_0}(\frac{4}{\gamma}\|h_2\|^2+\frac{3}{\alpha}\|h_1\|^2)+\max_{t\geqslant0}C_2\stackrel{\text{def}}{=\!=}E_1 \tag{1.4.14}$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t[\alpha\|u_{xx}(\cdot,\tau)\|^2+\gamma\|v_{xx}(\cdot,\tau)\|^2]\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$\max_{t\geqslant0}(b_0C_2+C_1)+\frac{4}{\gamma}\|h_2\|^2+\frac{3}{\alpha}\|h_1\|^2 \tag{1.4.15}$$

证明 作式(1.4.3)和 u_{xx} 的内积得

$$(u_{xx},u_t+f(u)_x-\alpha u_{xx}+\beta u_{xxx}+2vv_x)$$
$$=(u_{xx},G_1(u,v)+h_1(x)) \tag{1.4.16}$$

其中

$$(u_{xx},f(u)_x)=-(u_{xxx},f(u))=$$

$$\frac{1}{\beta}(u_t+f(u)_x-\alpha u_{xx}+2vv_x-G_1(u,v)-h_1,f(u))=$$

$$\frac{1}{\beta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int F(u(x,t))\mathrm{d}x - \frac{\alpha}{\beta}(u_{xx},f(u)) +$$

$$\frac{2}{\beta}(vv_x,f(u)) - \frac{1}{\beta}(G_1+h_1,f)$$

$F(u)=\int_0^u f(s)\mathrm{d}s$。由 Sobolev 插值不等式得到

$$|(u_{xx},f(w))| \leqslant \|u_{xx}\| \|f(u)\| \leqslant A\|u_{xx}\| \|u\|^{\frac{5}{2(5-\delta)}} \leqslant$$

$$\frac{|\beta|}{12}\|u_{xx}\|^2 + C(\|u\|),$$

$$\left|\frac{2}{\beta}(vv_x,f(u))\right| \leqslant \frac{2}{|\beta|}\|v\|_4\|v_x\|_4\|f(u)\|_2 \leqslant$$

$$\frac{\alpha}{12}\|u_{xx}\|^2 + \frac{\gamma}{8}\|v_{xx}\|^2 + C(\|u\|,\|v\|),$$

$$\left|\frac{1}{\beta}(G_1,f)\right| \leqslant \frac{AB_1}{|\beta|}[\|u\|^{10-\delta}_{10-\delta} + \|u\|^{5-\delta}_{2(5-\delta)}\|v\|^{5}_{10}] \leqslant$$

$$\frac{\alpha}{12}\|u_{xx}\|^2 + \frac{\gamma}{8}\|v_{xx}\|^2 + C(\|u\|,\|v\|),$$

$$\left|\frac{1}{\beta}(h_1,f(u))\right| \leqslant \frac{1}{|\beta|}\|h_1\| \|f\| \leqslant \frac{\alpha}{12}\|u_{xx}\|^2 + C$$

$$|(u_{xx},h_1)| \leqslant \|u_{xx}\| \|h_1\| \leqslant \frac{\alpha}{12}\|u_{xx}\|^2 + \frac{3}{\alpha}\|h_1\|^2$$

从式(1.4.16)有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|u_x\|^2 - \frac{2}{\beta}\int F(u)\mathrm{d}x] + \frac{7\alpha}{12}\|u_{xx}\|^2 - 2(u_{xx},vv_x) \leqslant$$

$$-(u_{xx},G_1(u,v)) + \frac{\gamma}{4}\|v_{xx}\|^2 + \frac{3}{\alpha}\|h_1\|^2 + C \tag{1.4.17}$$

其中 C 依赖于 $\|u\|$，$\|v\|$ 和 $\|h_1\|$。

作式(1.4.4)和 v_{xx}的内积得

$$(v_{xx},v_t - \gamma v_{xx} + 2(uv)_x) = (v_{xx},G_2(u,v) + h_2)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v_x\|^2 + \gamma\|v_{xx}\|^2 - 2(v_{xx},(uv)_x) =$$

$$-(v_{xx},G_2)-(v_{xx},h_2) \qquad (1.4.18)$$

式(1.4.17)+式(1.4.18),得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\|u_x\|^2+\|v_x\|^2-\frac{2}{\beta}\int F(u)\mathrm{d}x\right]+$$

$$\frac{7\alpha}{12}\|u_{xx}\|^2+\frac{3\gamma}{4}\|v_{xx}\|^2\leqslant$$

$$-(u_{xx},G_1)-(v_{xx},G_2)+2[(u_{xx},vv_x)+(v_{xx},(uv)_x)]+$$

$$(v_{xx},h_2)+\frac{3}{\alpha}\|h_1\|^2+C$$

其中

$$-(u_{xx},G_1)-(v_{xx},G_2)=$$

$$\int[u_x(G_{1u}u_x+G_{1v}v_x)+v_x(G_{2u}u_x+G_{2v}v_x)]\mathrm{d}x\leqslant$$

$$-b_0[\|u_x\|^2+\|v_x\|^2]$$

$$|(v_{xx},h_2)|\leqslant\frac{\gamma}{8}\|v_{xx}\|^2+\frac{4}{\gamma}\|h_2\|^2,$$

$$|2(u_{xx},vv_x)+2(v_{xx},(uv)_x)|=$$

$$3\left|\int u_xv_x^2\mathrm{d}x\right|\leqslant 3\|u_x\|\,\|v_x\|_4^2\leqslant$$

$$\frac{\alpha}{24}\|u_{xx}\|^2+\frac{\gamma}{8}\|v_{xx}\|^2+C$$

$$\left|\frac{2b_0}{\beta}\int F(u)\mathrm{d}x\right|\leqslant C\|u\|_{6-\delta}^{6-\delta}\leqslant\frac{\alpha}{24}\|u_{xx}\|^2+C$$

令 $\phi(t)=\|u_x\|^2+\|v_x\|^2-\frac{2}{\beta}\int F(u)\mathrm{d}x$。则有

$$\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t}+\alpha\|u_{xx}\|^2+\gamma\|v_{xx}\|^2+2b_0\phi(t)\leqslant$$

$$\frac{3}{\alpha}\|h_1\|^2+\frac{4}{\gamma}\|h_2\|^2+C$$

积分上面不等式有

$$\phi(t)\leqslant e^{-2b_0t}\phi(0)+e^{-2b_0t}\int_0^t Ce^{2b_0s}\mathrm{d}s+$$

$$\frac{1}{2b_0}(1-e^{-2b_0t})(\frac{4}{\gamma}\|h_2\|^2+\frac{3}{\alpha}\|h_1\|^2)$$

注意到

$$|\frac{2}{\beta}\int F(u)dx| \leqslant A\|u\|_{6-\delta}^{6-\delta} \leqslant \frac{1}{2}\|u_{xx}\|^2+C$$

因此可得

$$\|u_x\|^2+\|v_x\|^2 \leqslant 2e^{-2b_0t}\phi(0)+2e^{-2b_0t}\int_0^t C_1e^{2b_0s}ds+$$

$$\frac{1}{b_0}(1-e^{-2b_0t})(\frac{4}{\gamma}\|h_2\|^2+\frac{3}{\alpha}\|h_1\|^2)+C_2 \quad (1.4.19)$$

其中函数 C_1,C_2 依赖于 $\|u\|,\|v\|$。从式(1.4.19)即得式(1.4.14)、(1.4.15)。

引理 1.4.3 在引理 1.4.2 条件下,且设

(1) $f(u)\in C^2, G_i(u,v)\in C^2, i=1,2$;

(2) $u_0(x),v_0(x)\in H^2(\Omega), h_i(x)\in H^1(\Omega), i=1,2$;

则对问题(1.4.3)～(1.4.6)的光滑解有

$$\|u_{xx}\|^2+\|v_{xx}\|^2 \leqslant e^{-2b_0t}[\|u_{0xx}\|^2+\|v_{0xx}\|^2]+$$

$$\frac{1-e^{-2b_0t}}{2b_0}[\frac{5}{\alpha}\|h_{1x}\|^2+\frac{2}{\gamma}\|h_{2x}\|^2]+$$

$$e^{-2b_0t}\int_0^t C_3e^{2b_0s}ds \quad (1.4.20)$$

其中函数 C_3 依赖 $\|u\|_{H^1},\|v\|_{H^1}$。更进一步有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}[\|u_{xx}\|^2+\|v_{xx}\|^2] \leqslant$$

$$\frac{1}{2b_0}\max_{t\geqslant 0}C_3+\frac{1}{2b_0}[\frac{5}{\alpha}\|h_{1x}\|^2+\frac{2}{\gamma}\|h_{2x}\|^2] \quad (1.4.21)$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t[\alpha\|u_{xx}\|^2+\|v_{xxx}\|^2]dx \leqslant$$

$$\max_{t\geqslant 0}C_3+[\frac{5}{\alpha}\|h_{1x}\|^2+\frac{2}{\gamma}\|h_{2x}\|^2] \quad (1.4.22)$$

证明 首先,从引理 1.4.1,1.4.2 和 Sobolev 嵌入定理有

$$\|u\|_\infty^2+\|v\|_\infty^2 \leqslant C^*(\|u\|_{H^1}^2+\|v\|_{H^1}^2)$$

其中 C^* 为 Sobolev 嵌入常数。

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}[\|u(\cdot,t)\|_\infty^2+\|v(\cdot t)\|_\infty^2]\leqslant C^*(E_0+E_1)$$

作式(1.4.3)和 u_{xxxx} 的内积

$$(u_{xxxx},u_t+f(u)_x-\alpha u_{xx}+\beta u_{xxx}+2vv_x)=$$
$$(u_{xxxx},G_1(u,v)+h_1)\tag{1.4.23}$$

其中

$$|(u_{xxxx},f(u)_x)|=$$
$$|(u_{xxx},f''(u)u_x^2+f'(u)u_{xx})|\leqslant$$
$$\|f'(u)\|_\infty\|u_{xxx}\|\ \|u_{xx}\|+\|f''(u)\|_\infty\|u_{xxx}\|\ \|u_x\|_4^2\leqslant$$
$$\frac{\alpha}{10}\|u_{xxx}\|^2+C,$$
$$|(u_{xxxx},2vv_x)|\leqslant|(u_{xxx},2v_x^2+2vv_{xx})|\leqslant$$
$$\frac{\alpha}{10}\|u_{xxx}\|^2+\frac{\gamma}{8}\|v_{xxx}\|^2+C,$$
$$|(u_{xxxx},h_1)|\leqslant\|u_{xxx}\|\ \|h_{1x}\|\leqslant\frac{\alpha}{10}\|u_{xxx}\|^2+\frac{5}{\alpha}\|h_{1x}\|^2$$

作式(1.4.4)和 v_{xxxx} 的内积得

$$(v_{xxxx},v_t-\gamma v_{xx}+(2uv)_x)=(v_{xxxx},G_2(u,v)+h_2)\tag{1.4.24}$$

注意到

$$|(v_{xxxx},2(uv)_x)|\leqslant\frac{\alpha}{10}\|u_{xxx}\|^2+\frac{\gamma}{8}\|v_{xxx}\|^2+C$$

且

$$(u_{xxxx},G_1(u,v))+(v_{xxxx},G_2(u,v))=$$
$$(u_{xx},G_{1u}u_{xx}+G_{1v}v_{xx}+G_{1uu}u_x^2+2G_{1uv}u_xv_x+G_{1vv}v_x^2)+$$
$$(v_{xx},G_{2u}u_{xx}+G_{2v}v_{xx}+G_{2uu}u_x^2+2G_{2uv}u_xv_x+G_{2vv}v_x^2)\leqslant$$
$$-b_0(\|u_{xx}\|^2+\|v_{xx}\|^2)+\frac{\alpha}{10}\|u_{xxx}\|^2+\frac{\gamma}{8}\|v_{xxx}\|^2+C$$

其中函数 C 依赖于 $\|u\|_{H^1}$ 和 $\|v\|_{H^1}$。从式(1.4.23)、(1.4.24)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|u_{xx}\|^2+\|v_{xx}\|^2]+\alpha\|u_{xxx}\|^2+$$
$$\gamma\|v_{xxx}\|^2+2b_0[\|u_{xx}\|^2+\|v_{xx}\|^2]\leqslant$$
$$\frac{5}{\alpha}\|h_{1x}\|^2-\frac{2}{\gamma}\|h_{2x}\|^2+C$$

因此有

$$\|u_{xx}\|^2+\|v_{xx}\|^2\leqslant$$
$$\mathrm{e}^{-2b_0t}[\|u_{0xx}\|^2+\|v_{0xx}\|^2]+\mathrm{e}^{-2b_0t}\int_0^t C_4\mathrm{e}^{2b_0s}\mathrm{d}s+$$
$$\frac{1}{2b_0}(1-\mathrm{e}^{-2b_0t})(\frac{5}{\alpha}\|h_{1x}\|^2+\frac{2}{\gamma}\|h_{2x}\|^2) \qquad (1.4.25)$$
$$\overline{\lim_{t\to\infty}}[\|u_{xx}\|^2+\|v_{xx}\|^2]\leqslant$$
$$\frac{1}{2b_0}[\max_{t\geqslant0}C_4+\frac{5}{\alpha}\|h_{1x}\|^2+\frac{2}{\gamma}\|h_{2x}\|^2]\equiv E_2$$

引理 1.4.4 在引理 1.4.3 条件下，设

(1) $f(u)\in C^3,G_i\in C^2,i=1,2$；

(2) $u_0(x)\in H^2(\Omega),h_i\in H^2(\Omega),v_0\in H^2(\Omega),i=1,2$；

则对问题(1.4.3)～(1.4.6)的光滑解，有如下估计

$$\|u_{xxx}\|^2+\|v_{xxx}\|^2\leqslant\frac{E_3}{t},t>0 \qquad (1.4.26)$$

其中常数 E_3 依赖于 $\|u_0\|_{H^2}$，$\|v_0\|_{H^2}$，$\|h_i\|_{H^2}(i=1,2)$和 t。

证明 作式(1.4.3)和 $t^2\frac{\partial^6u}{\partial x^6}$，式(1.4.4)和 $t^2\frac{\partial^6v}{\partial x^6}$的内积，得

$$(t^2\frac{\partial^6u}{\partial x^6},u_t-\alpha u_{xx}+\beta u_{xxx}+2vv_x+f(u)_x)=$$
$$(t^2\frac{\partial^6u}{\partial x^6},G_1+h_1(x))$$
$$(t^2\frac{\partial^6v}{\partial x^6},v_t-\gamma v_{xx}+2(uv)_x)=(t^2\frac{\partial^6v}{\partial x^6},G_2+h_2(x))$$

因

$$(t^2\frac{\partial^6u}{\partial x^6},u_t)=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|tu_{xxx}\|^2+\|\sqrt{t}u_{xxx}\|^2,$$

$$(t^2 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}, -\alpha u_{xx}) = -\alpha \| t u_{xxxx} \|^2,$$

$$|(t^2 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}, f(u)_x)| = |(t^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, f(u)_{xxx})| \leqslant$$

$$\frac{\alpha}{12} \| t u_{xxxx} \|^2 + C(\| t u_{xxx} \|^2 + 1),$$

$$|(t^2 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}, 2vv_x)| \leqslant \frac{\alpha}{12} \| t u_{xxxx} \|^2 + C(\| t v_{xxx} \|^2 + 1),$$

$$|(t^2 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}, G_1(u, v))| \leqslant \frac{\alpha}{12} \| t u_{xxxx} \|^2 +$$

$$C(\| t u_{xxx} \|^2 + \| t v_{xxx} \|^2 + 1),$$

$$\| \sqrt{t} u_{xxx} \|^2 = t \| u_{xxx} \|^2 \leqslant \frac{\alpha}{12} \| t u_{xxxx} \|^2 + C,$$

$$|(t^2 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}, h_1)| \leqslant \frac{\alpha}{12} \| t u_{xxxx} \|^2 + C,$$

其中常数 C 依赖于 $\| u \|_{H^2}$，$\| v \|_{H^2}$和 t。由此可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\| t u_{xxx} \|^2 + \| t v_{xxx} \|^2] + \alpha \| t u_{xxxx} \|^2 + \gamma \| t v_{xxxx} \|^2 \leqslant$$

$$C(\| t u_{xxx} \|^2 + \| t v_{xxx} \|^2 + 1)$$

因此

$$\| u_{xxx} \|^2 + \| v_{xxx} \|^2 \leqslant E_3 / t, t > 0$$

我们应用 Galerkin 方法证明问题(1.4.3)～(1.4.6)整体光滑解的存在性。设 $w_j(x), j=1,2,\cdots$ 为方程 $u_{xx}+\alpha u=0$ 具周期边界条件对应于特征值 $\alpha_j (j=1,2,\cdots)$ 的标准特征函数。$\{w_j\}$ 形成标准正交基。问题(1.4.3)～(1.4.6)的近似解 $u_N(x,t), v_N(x,t)$ 具有形式：

$$u_N(x,t) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{jN}(t) w_j(t), v_N(x,t) = \sum_{j=1}^{N} \beta_{jN}(t) w_j(t) \tag{1.4.27}$$

其中 $\alpha_{jN}, \beta_{jN} (j=1,2,\cdots,N; N=1,2,\cdots)$ 为变元 $t \in \mathbf{R}^+$ 的系数函数。按照 Galerkin 方法，系数 α_{jN}, β_{jN} 必须满足如下的一阶非线性

常微分方程组

$$(u_{Nt}+f(u_N)_x-\alpha u_{Nxx}+\beta u_{Nxxx}$$
$$-G_1(u_N,v_N)-h_1,w_j)=0$$
$$(v_{Nt}-\gamma v_{Nxx}+2(u_Nv_N)_x-G_2(u_N,v_N)-h_2,w_j)=0,$$
$$j=1,2,\cdots,N \tag{1.4.28}$$

具初始条件

$$\alpha_{jN}(0)=(u_N(x,0),w_j(x))=(u_0(x),w_j(x))$$
$$\beta_{jN}(0)=(v_N(x,0),w_j(x))=(v_0(x),w_j(x)) \tag{1.4.29}$$

从常微分方程组解的存在理论，可知存在问题(1.4.28)～(1.4.29)的局部光滑解。类似于前面引理1.4.1～1.4.4的证明，我们能建立Galerkin方法近似解$\{u_N(x,t)\}$，$\{v_N(x,t)\}$关于N的一致积分估计。这种一致先验估计不仅保证了问题(1.4.28)、(1.4.29)整体解α_{jN}，β_{jN}的存在性，而且还能证明近似解$\{u_N(x,t)\}$，$\{v_N(x,t)\}$收敛于问题(1.4.3)～(1.4.6)的整体解。我们有

定理 1.4.1 设以下条件满足

(1) $f(u)\in C^m$，$G_i\in C^{m-1}$，$i=1,2$，且

$$|f(u)|\leqslant A|u|^{5-\delta},\ |G_i(u,v)|\leqslant B(|u|^5+|v|^5),$$
$$B>0,\ i=1,2。$$

(2) $G_i(0,0)=0$，$i=1,2$，且对$\forall(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^2$，

$$(\xi,\eta)\begin{pmatrix}-G_{1u} & -G_{1v}\\ -G_{2u} & -G_{2v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\geqslant -b_0(\xi^2+\eta^2),\ b_0>0\text{ 为常数。}$$

(3) $u_0,v_0\in H^m(\Omega)$，$h_i(x)\in H^m(\Omega)$，$i=1,2$。

则存在问题(1.4.3)～(1.4.6)的唯一整体解，$u(x,t)$，$v(x,t)\in L^\infty(0,T;H^m(\Omega))$。

为了证明周期初值问题(1.4.3)～(1.4.6)整体吸引子的存在性，我们利用如下定理：

定理 1.4.2[221] 设E为一Banach空间，$\{S_t,t\geqslant0\}$为半群算子的集合，$S_t:E\to E$，$S_t\cdot S_\tau=S_{t+\tau}$，$S_0=I$，其中$I$为恒等算子。设$S_t$

满足：

(1) S_t 是有界的，即对任何的 $R>0$，如果 $\|u\|_E\leqslant R$，则存在一个常数 $C(R)$，使得

$$\|S_tu\|_E\leqslant C(R),t\in[0,\infty)$$

(2) 存在一个有界吸收集 $B_0\subset E$，即对任何有界集 $B\subset E$，存在一个常数 T，使得

$$S_tB\subset B_0,t\geqslant T$$

(3) S_t 是一个完全连续算子($t>0$)。

则半群算子 S_t 具有一个紧的整体吸引子。

定理 1.4.3 设问题(1.4.3)～(1.4.6)具有一个整体的唯一光滑解且引理 1.4.4 的条件满足，则存在周期问题(1.4.3)～(1.4.6)的整体吸引子 $\mathscr{A}$，具有性质

(1) $S_t\mathscr{A}=\mathscr{A},\forall t\in R^+$。

(2) $\lim\limits_{t\to\infty}\operatorname{dist}(S_tB,\mathscr{A})=0,\forall$ 有界集 $B\subset H^2(\Omega)$，其中

$$\operatorname{dist}(X,Y)=\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}\|x-y\|_E$$

S_tu_0 为问题(1.4.3)～(1.4.6)生成的半群。

证明 基于定理 1.4.2，我们仅需要验证定理 1.4.2 的条件(1)～(3)成立。在定理的假设下，我们知道问题(1.4.3)～(1.4.6)生成半群 S_t。我们可置 Banach 空间 $E=H^2\times H^2,(u,v)\in E$，$\|(u,v)\|_E^2=\|u\|_{H^2}^2+\|v\|_{H^2}^2,S_t:E\to E$。利用引理 1.4.1～1.4.3 的结果，设 $B\subset E$ 为球$\{\|(u,v)\|_E\leqslant R\}$，则有

$$\begin{aligned}&\|S_t(u_0,v_0)\|_E^2=\|(u,v)\|_E^2=\|u\|_{H^2}^2+\|v\|_{H^2}^2\leqslant\\&C(\|u_0\|_{H^2}^2+\|v_0\|_{H^2}^2,\|h_i\|_{H^1}^2)\leqslant\\&C(R^2,\|h_1\|_{H^1}^2+\|h_2\|_{H^1}^2),(t\geqslant 0,(u_0,v_0)\in B)\end{aligned}$$

这就意味着$\{S_t\}$在 E 中一致有界，更进一步，利用以上引理的结果有

$$\|S_t(u_0,v_0)\|_E^2=\|u\|_{H^2}^2+\|v\|_{H^2}^2\leqslant 2(E_0+E_1+E_2),$$
$$t\geqslant t_0(R,\|h_1\|_{H^1}^2+\|h_2\|_{H^1}^2)\tag{1.4.30}$$

因此

$$\bar{A}=\{(u(\cdot,t),v(\cdot,t))\in E,\|(u,v)\|_E^2\leqslant 2(E_0+E_1+E_2)\}$$

为半群算子 S_t 的有界吸收集。从引理 1.4.4 可知

$$\|u_{xxx}\|^2+\|v_{xxx}\|^2\leqslant\frac{E_3}{t},\forall t>0,\|(u_0,v_0)\|_E\leqslant R$$

利用 $H^3(\Omega)\hookrightarrow H^2(\Omega)$ 的紧嵌入,可知半群算子 $S_t:E\rightarrow E$ 对 $t>0$ 是完全连续的。这就证明了定理。

附注:如文献[80]所指出,定理 1.4.3 中所得到的吸引子 $\mathscr{A}$ 为吸收集的 ω 极限集,有

$$\mathscr{A}=\omega(\bar{A})=\bigcap_{\tau\geqslant 0}\bigcup_{t\geqslant\tau}S_tA \tag{1.4.31}$$

为了建立周期初值问题(1.4.3)~(1.4.6)整体吸引子 Hausdorff、分形维数的上界,我们需要考虑对应于问题(1.4.3)~(1.4.6)的变分问题:

$$\nu_t+L(u,v)\nu=0 \tag{1.4.32}$$

$$\nu(0)=\nu_0 \tag{1.4.33}$$

其中

$$\nu=\begin{pmatrix}\eta\\ \xi\end{pmatrix},\nu_0=\begin{pmatrix}\eta_0\\ \xi_0\end{pmatrix}$$

$$L(u,v)\nu=$$

$$\begin{bmatrix}-\alpha\eta_{xx}+\beta\eta_{xxx}+(f'(u)\eta)_x+2(v\xi)_x-G_{1u}\eta-G_{1v}\xi\\ -\gamma\xi_{xx}+2(u\xi+v\eta)_x-G_{2u}\eta-G_{2v}\xi\end{bmatrix}$$

因问题(1.4.3)~(1.4.6)的解充分光滑,我们能证明线性问题(1.4.32)、(1.4.33)具有整体光滑解,只要初值 ν_0 中等光滑即可。即存在解算子 G_t,使得 $\nu(t)=G_t\nu_0$。能证明半群算子 S_tU_0 在 $L^2(\Omega)$ 中是可微的,即 Fréchet 导数 $S_t'U_0$ 存在,且 $G_t\nu_0=S_t'U_0,U_0=\begin{pmatrix}u_0\\ v_0\end{pmatrix}$。

事实上,置

$$w(t)=S_t(U_0+\nu_0)-S_t(U_0)-G_t(U_0)\nu_0=$$

$$U_1(t)-U(t)-\nu(t)$$

其中 $U(t)=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$，则有

$$\partial_t w(t) = L_1(U_1) - L_1(U) + L(U(t))\nu(t) =$$

$$L_1(U+\nu+w) - L_1(U) + L(U(t))\nu(t) \tag{1.4.34}$$

$$w(0) = 0 \tag{1.4.35}$$

其中 $U_t = L_1(U)$ 为问题(1.4.3)～(1.4.6)的标子形式。因此(1.4.34)能写成

$$\partial_t w + L(U)w = \Lambda_0(U,\nu,w) \tag{1.4.36}$$

其中

$$\Lambda_0(U,\nu,w) = L_1(U,\nu,w) - L_1(U) + L(U)(\nu+w)(t) \tag{1.4.37}$$

应用线性偏微分方程的理论，有如下的 L_2 估计

$$\|w(t)\| \leqslant C\|\nu_0\|^2 \tag{1.4.38}$$

这就推出半群算子 S_t 在 $L^2(\Omega)$ 中是可微的。

用 $\nu_1(t),\nu_2(t),\cdots,\nu_J(t)$ 表示线性方程(1.4.32)具初值 $\nu_1(0)=\xi_1,\nu_2(0)=\xi_2,\cdots,\nu_J(0)=\xi_J$ 的解。这里 $\xi_j\in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$，$j=1,2,\cdots,J$。由简单计算可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nu_1(t)\wedge\nu_2(t)\wedge\cdots\wedge\nu_J(t)\|^2 +$$

$$2\mathrm{tr}(L(U(t))Q_J)\|\nu_1(t)\wedge\nu_2(t)\wedge\cdots\wedge\nu_J(t)\|^2 = 0 \tag{1.4.39}$$

其中：$L(U(t))=L(S_tU_0)$ 为线性映照 $\nu\to L(U(t))\nu$；$\wedge$ 表示外积；tr 表示算子的迹；$Q_J(t)$ 表示空间 $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 到由 $\nu_1(t),\nu_2(t),\cdots,\nu_J(t)$ 所成的子空间上的正交投影。从式(1.4.39)可得 J 维立方体的体积 $\wedge_{j=1}^J\xi_j$ 的变化

$$w_J(t) = \sup_{u_0\in\mathscr{A}}\sup_{\substack{\xi_j\in L^2\\|\xi_j|\leqslant 1}}\|\nu_1(t)\wedge\nu_2(t)\wedge\cdots\wedge\nu_J(t)\|^2_{\wedge^J L^2} \leqslant$$

$$\sup_{u_0\in\mathscr{A}}\exp\left(-2\int_0^t\mathrm{tr}(L(S_\tau U_0)Q_J(\tau))\mathrm{d}\tau\right),$$

$\mathscr{A}$ 为吸引子

注意到文献[80]中的结果，可知 $w_J(t)$ 对于 t 是次可加的，即

$$w_J(t+t_1)\leqslant w_J(t)w_J(t_1),t,t_1\geqslant 0 \qquad (1.4.40)$$

因此，我们有

$$\lim_{t\to\infty} w_J(t)^{\frac{1}{t}}=\pi_J\leqslant \exp(-2q_J) \qquad (1.4.41)$$

其中

$$q_J=\lim_{t\to\infty}\sup_{u_0\in A}\Big(\sup_{\substack{\xi_j\in L^2\\ |\xi_j|\leqslant 1}}\frac{1}{t}\int_0^t \operatorname{tr}(L(S_\tau U_0)Q_J(\tau))\mathrm{d}\tau\Big) \qquad (1.4.42)$$

利用如下定理和引理

定理1.4.4[244]　设 $\mathscr{A}$ 为非线性发展方程的吸引子，它是在 $H^1(\Omega)$ 中有界的。如果对 $q_J>0$。对某个 J，则 $\mathscr{A}$ 的 Hausdorff 维数 $\leqslant J$，它的分形维数 $\leqslant J(1+\max\limits_{1\leqslant j\leqslant J}(-\frac{q_j}{q_J}))$。

定理1.4.5　广义 Sobolev-Lieb-Thirring 不等式[80]：设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为有界域，且 $\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_N\}$ 为在 $L^2(\Omega)$ 中的正交基，$\phi_i\in H^m$，$(i=1,2,\cdots,N)$，且几乎对一切 $x\in\Omega,\rho(x)=\sum_{j=1}^N|\phi_i(x)|^2$。则有如下估计

$$\int\rho(x)^{1+2m/n}\mathrm{d}x\leqslant\frac{k_0}{|\Omega|^{2m/n}}\int\rho(x)\mathrm{d}x+k_0\sum_{j=1}^N\int|D^m\phi_j|^2\mathrm{d}x$$

$$(1.4.43)$$

其中常数 k_0 依赖于 m、n、Ω，但与 N 和 ϕ_j 无关。

定理1.4.6　在定理1.4.1，1.4.3条件下，则周期初值问题(1.4.3)～(1.4.6)的整体吸引子具有有限的 Hausdorff、分形维数。

$$d_H(\mathscr{A})\leqslant J_0,d_F(\mathscr{A})\leqslant J_0(1+\frac{2b\sqrt{(b/(3a))}}{3(aJ_0^3-bJ_0)})$$

其中 J_0 为最小整数，使得

$$J_0>[k_0+\frac{4k_0D^2}{\min\{\alpha,\gamma\}}(\frac{1}{\sqrt{2D}}(\frac{1}{2}\|f''(u)\|_\infty+1)$$

$$(\|u_x\| + \|v_x\|) - b_0)]^{\frac{1}{2}} \geqslant J_0 - 1$$

于此

$$a = \frac{\min\{\alpha,\gamma\}}{4k_0D^2}$$

$$b = \frac{\min\{\alpha,\gamma\}}{4D^2} +$$

$$\frac{1}{\sqrt{2D}}(\frac{1}{2}\|f''(u)\|_\infty + 1)(\|u_x\| + \|v_x\|) - b_0$$

证明 由定理1.4.4，我们仅需估计 $\mathrm{tr}(L(U)Q_J)$ 的下界。

设 $\{\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_J\}$，$\Phi_j = \begin{pmatrix}\phi_j\\ \psi_j\end{pmatrix}$ 为子空间 $Q_J(L^2\times L^2)$ 的标准正交基。我们有

$$\mathrm{tr}(L(U(t))Q_J) =$$

$$\sum_{j=1}^{J}[(-\alpha\phi_{jxx} - \beta\phi_{jxxx} + (f'(u)\phi_j)_x +$$

$$(2v\psi_j)_x - G_{1u}(u,v)\phi_j - G_{1v}\psi_j,\phi_j) +$$

$$(-\gamma\psi_{jxx} + 2(u\psi_j + v\phi_j)_x - G_{2u}\phi_j - G_{2v}\psi_j,\psi_j))] =$$

$$\sum_{j=1}^{J}[\alpha\|\phi_{jx}\|^2 + \gamma\|\psi_{jx}\|^2 + \frac{1}{2}\int f''(u)u_x\phi_j^2\mathrm{d}x + \int u_x\psi_j^2\mathrm{d}x +$$

$$2\int v_x\phi_j\psi_j\mathrm{d}x - \int(G_{1u}\phi_j^2 - G_{1v}\phi_j\phi_j + G_{2u}\phi_j\psi_j + G_{2v}\psi_j^2)\mathrm{d}x] \geqslant$$

$$\sum_{j=1}^{J}[\min\{\alpha,\gamma\}(\|\phi_{jx}\|^2 + \|\psi_{jx}\|^2 -$$

$$\int(\frac{1}{2}|f''(u)u_x| + |u_x| + |v_x|)\times$$

$$(\phi_j^2 + \psi_j^2)\mathrm{d}x + b_0\int(\phi_j^2 + \psi_j^2)\mathrm{d}x] \geqslant$$

$$\min\{\alpha,\gamma\}[\frac{1}{k_0}\int\rho(x)^3\mathrm{d}x - \frac{1}{(2D)^2}J] + b_0J -$$

$$\|(\frac{1}{2}|f''(u)u_x| + |u_x| + |v_x|\|_{3/2}(\int\rho(x)^3\mathrm{d}x)^{\frac{1}{3}} \geqslant$$

$$\min\{\alpha,\gamma\}\frac{1}{k_0}\int\rho(x)^3\mathrm{d}x + (b_0 - \frac{\min\{\alpha,\gamma\}}{4D^2})J -$$

$$[(\frac{1}{2}\|f''(u)\|_\infty+1)(2D)^{\frac{1}{6}}(\|u_x\|+\|v_x\|)](\int\rho^3(x)\mathrm{d}x)^{\frac{1}{3}}$$

(1.4.44)

因

$$J=\int\rho(x)\mathrm{d}x\leqslant(\int\rho^3(x)\mathrm{d}x)^{\frac{1}{3}}(2D)^{\frac{2}{3}}$$

因此

$$\int_\Omega\rho(x)^3\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{(2D)^2}J^3 \tag{1.4.45}$$

因此从式(1.4.44)、(1.4.45)可得

$$\mathrm{tr}(L(U(t))\cdot Q_J)\geqslant\frac{\min\{\alpha,\gamma\}}{4k_0D^2}J^3+(b_0-\frac{\min\{\alpha,\gamma\}}{4D^2})J-$$

$$(\frac{1}{2}\|f''(u)\|_\infty+1)(\|u_x\|+\|v_x\|)\frac{1}{\sqrt{2D}}J>0$$

如果

$$J>(\frac{b}{a})^{\frac{1}{2}}$$

$$a=\frac{\min\{\alpha,\gamma\}}{4k_0D^2}$$

$$b=\frac{\min\{\alpha,\gamma\}}{4D^2}+$$

$$\frac{1}{\sqrt{2D}}(\frac{1}{2}\|f''(u)\|_\infty+1)(\|u_x\|+\|v_x\|)-b_0$$

令

$$J_0-1\leqslant(\frac{b}{a})^{\frac{1}{2}}\leqslant J_0$$

$$-\frac{q_l}{q_{J_0}}\leqslant\frac{bl-al^3}{aJ_0^3-bJ_0}\leqslant\frac{2b\sqrt{b/3a}}{3(aJ_0^3-bJ_0)}$$

则由定理1.4.6，有

$$d_H(\mathscr{A})\leqslant J_0$$

$$d_F(\mathscr{A}) \leqslant J_0\left(1 + \frac{2b\sqrt{b/3a}}{3(aJ_0^3 - bJ_0)}\right)$$

于是定理得到证明。

1.5 Davey-Stewartson 方程

考虑如下的 Davey-Stewartson 方程组

$$\frac{\partial A}{\partial t} - a\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - b\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \chi A - \beta|A|^2 A + \gamma QA,$$

$$t > 0, (x,y) \in \Omega \tag{1.5.1}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(|A|^2) \tag{1.5.2}$$

具边界条件

$$A(t,x,y) = 0, Q(t,x,y) = 0, t \geqslant 0, (x,y) \in \partial\Omega \tag{1.5.3}$$

和初值条件

$$A(0,x,y) = A_0(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \tag{1.5.4}$$

其中 $a=a_1+\mathrm{i}a_2, b=b_1+\mathrm{i}b_2, \beta=\beta_1+\mathrm{i}\beta_2, \gamma=\gamma_1+\mathrm{i}\gamma_2, \chi=\chi_1+\mathrm{i}\chi_2$ 为复数，$\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 为光滑有界区域。这个方程组是 Davey 等在文献[26]中研究平面 Poiseuille 流在非线性的三维扰动演化中得到的。这里 $A(t,x,y)$ 表示复的振幅，$Q(t,x,y)$ 描述实的速度的扰动。

如令 $Q=|A|^2-\frac{\partial\varphi}{\partial x}$，连同式(1.5.2)有

$$\Delta Q = \Delta|A|^2 - \frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi = \frac{\partial^2}{\partial y^2}|A|^2$$

其中 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$，由此可得

$$\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial x}|A|^2 \tag{1.5.5}$$

于是振幅方程变为

$$\frac{\partial A}{\partial t}-a\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}-b\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}=\chi A-\tilde{\beta}|A|^2A-\gamma A\frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{1.5.6}$$

其中$\tilde{\beta}=\beta+\gamma$，方程组(1.5.5)、(1.5.6)也是 Davey-Stewartson 在文献[27,28]首先提出的。Ablowitz 和 Haberman 在文献[29]中研究广义二维非线性 Schrödinger 方程完全可积系统也得到了这一方程组的某些特殊情况。近年来不少数学物理学家对这一方程组进行一系列的研究，例如局部解、整体广义解的存在性，平面波解的稳定性，孤立波解的性质，解的奇性发展等，详见 Davey，Hocking 和 Stewartson 的文献[26]，Holmes 的文献[30]，Ghidaglia 和 Saut 的文献[31]，Anker 和 Freeman 的文献[32]，Ablowitz 和 Fokas 的文献[33]，Tsutsumi 的文献[34]，Hayashi 和 Saut 的文献[35]，Linares 和 Ponce 的文献[36]等，1997年，杨、郭在文献[37]中证明了一类 DS 方程组整体光滑解的存在性，郭、李在文献[38]中证明了一类 DS 方程组整体吸引子的存在性，并具有有限的分形维数。

从式(1.5.2)和式(1.5.3)能解出 Q 作为 A 的函数。

$$Q=-(-\Delta)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial y^2}|A|^2\triangleq E(|A|^2) \tag{1.5.7}$$

其中$(-\Delta)^{-1}$为 Laplace 算子具 Dirichlet 边界条件的逆算子。我们能将式(1.5.1)、(1.5.2)化为如下的非线性 Schrödinger (Ginzburg-Landau)型方程

$$\frac{\partial A}{\partial t}-a\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}-b\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}=\chi A-\beta|A|^2A-\gamma AE(|A|^2),$$

$$t>0,(x,y)\in\Omega \tag{1.5.8}$$

$$A(t,x,y)=0,t\geqslant 0,\quad (x,y)\in\partial\Omega \tag{1.5.9}$$

$$A(0,x,y)=A_0(x,y)\quad (x,y)\in\Omega \tag{1.5.10}$$

由 Sobolev 不等式，存在 $C(p)>0(1<p<\infty)$，使得

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\|_p\leqslant C(p)\|\Delta u\|_p,\quad u\in C_0^\infty(\Omega)$$

其中$\|\cdot\|_p$表示$L^p(\Omega)$的模。因此

$$\|E(u)\|_p \leqslant C(p)\|u\|_p, \quad u \in C_0^\infty(\Omega) \qquad (1.5.11)$$

$E=(-\Delta)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$能拓展为$L^p(\Omega)$的有界线性算子$(1<p<\infty)$具模$C(p)$。事实上，$\frac{\partial^2}{\partial y^2}$和$\Delta$在$W^{2,p}(\Omega)$中可交换，$(-\Delta)^{-1}$为$L^p(\Omega)$到$W^{2,p}(\Omega)$的线性有界算子，因此$\overline{E}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}(-\Delta)^{-1}$为$E$在$L^p(\Omega)$的扩张。且$\|\overline{E}\|_{\mathscr{L}(L^p(\Omega))}=C(p)$。

我们以下将证明如下定理

定理1.5.1 设条件

[H] $a_1>0, b_1>0, \beta_1>0, \beta_1+C(2)\gamma_1>0, \chi_1>0$，

则由方程组(1.5.8)、(1.5.9)生成的半群算子具有一个在$H_0^1(\Omega)$中的紧的整体吸引子，且其Hausdorff和分形维数是有限的。

引理1.5.1 设条件[H]满足，$A_0\in L^2(\Omega)$，则$A\in L^\infty(\mathbf{R}^+, L^2(\Omega))$满足

$$\|A(t)\|^2 \leqslant \|A_0\|^2 e^{-t} + C, \forall t \geqslant 0$$

因此存在$t_1(R)>0$使得

$$\|A(t)\| \leqslant C, \forall t \geqslant t_1(R)$$

其中$\|A_0\|\leqslant R$，$C=C(\beta_1,\gamma_1,\chi_1,\Omega)$。进一步，对$\forall r>0$，有

$$\int_t^{t+r}(\|\nabla A(s)\|^2 + \|A(s)\|_4^4)ds \leqslant C(r,\beta_1,\gamma_1,\chi_1,\Omega),$$

$$\forall t \geqslant t_1(R)$$

证明 式(1.5.8)乘以$\overline{A}$，在Ω上积分，再取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|A\|^2 + a_1\|A_x\|^2 + b_1\|A_y\|^2 =$$

$$\chi_1\|A\|^2 - \beta_1\|A\|_4^4 - \gamma_1\int|A|^2E(|A|^2)dxdy \quad (1.5.12)$$

注意到

$$\int|A|^2E(|A|^2)dxdy = \int|[(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}|A|^2]_y|^2dxdy \geqslant 0,$$

$$\int |A|^2 E(|A|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \| |A|^2 \| \|E(|A|^2)\| \leqslant$$
$$C(2)\| |A|^2 \|^2 = C(2)\|A\|_4^4 \tag{1.5.13}$$

我们有

$$-\beta_1\|A\|_4^4 - \gamma_1\int |A|^2 E(|A|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant -K\|A\|_4^4 \tag{1.5.14}$$

其中 $K=\beta_1>0$ 当 $\gamma_1\geqslant 0$，$K=\beta_1+C(2)\gamma_1>0$ 当 $\gamma_1<0$。由 Hölder 不等式

$$\chi_1\|A\|^2 \leqslant \frac{1}{2}K\|A\|_4^4 + C \tag{1.5.15}$$

其中 C 仅依赖 β_1,γ_1,χ_1 和 Ω。联系式(1.5.12)~(1.5.15)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A\|^2 + \alpha_0\|\nabla A\|^2 + \frac{1}{2}K\|A\|_4^4 \leqslant C \tag{1.5.16}$$

类似于式(1.5.15)，$\|A\|^2\leqslant\frac{1}{2}K\|A\|_4^4+C$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A\|^2 + \|A\|^2 \leqslant C$$

由 Gronwall 不等式推得

$$\|A\|^2 \leqslant \|A_0\|^2\mathrm{e}^{-t} + C(1-\mathrm{e}^{-t}) \tag{1.5.17}$$

因此存在 $t_1(R)>0$，使得 $\|A\|^2\leqslant 1+C$，$t\geqslant t_1(R)\|A_0\|\leqslant R$。从式(1.5.16)和式(1.5.17)得

$$2\alpha_0\int_t^{t+r}\|\nabla A(s)\|^2\mathrm{d}s + K\int_t^{t+r}\|A(s)\|_4^4\mathrm{d}s \leqslant$$
$$Cr - \|A(s)\|^2\Big|_{s=t}^{s=t+r} \leqslant$$
$$Cr + \|A_0\|^2\mathrm{e}^{-t} + C(1-\mathrm{e}^{-t}) \leqslant Cr + C$$

$\forall t>t_1(R),r>0$，引理得证。

引理 1.5.2 设条件[H]成立，$A_0\in H_0^1(\Omega)$，则存在 $A\in L^\infty(\mathbf{R}^+;H_0^1(\Omega))$，且存在 $t_2(R)>0$，$C>0$，使得

$$\|\nabla A(t)\|^2 \leqslant C,\ \forall t \geqslant t_2(R)$$

其中$\|A_0\|_{H^1}\leqslant R$。

证明 式(1.5.8)乘以$-\Delta\overline{A}$，在Ω上积分，再取实部得

$$\mathrm{Re}\int aA_{xx}\Delta\overline{A}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a_1\|A_{xx}\|^2 + a_1\|A_{xy}\|^2,$$

$$\mathrm{Re}\int bA_{yy}\Delta\overline{A}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = b_1\|A_{yy}\|^2 + b_1\|A_{xy}\|^2$$

我们有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla A\|^2 + a_1\|A_{xx}\|^2 + b_1\|A_{yy}\|^2 +$$

$$(a_1+b_1)\|A_{xy}\|^2 = \chi_1\|\nabla A\|^2 - \mathrm{Re}\,\beta\int|A|^2A\Delta\overline{A}\mathrm{d}x\mathrm{d}y -$$

$$\mathrm{Re}\,\gamma\int AE(|A|^2)\Delta\overline{A}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.5.18}$$

注意到

$$a_1\|A_{xx}\|^2 + (a_1+b_1)\|A_{xy}\|^2 + b_1\|A_{yy}\|^2 \geqslant \alpha_0\|\Delta A\|^2,$$

由 Gagliardo-Nirenberg 不等式

$$\|u\|_6 \leqslant C\|u\|^{1/3}\|\nabla u\|^{2/3},\forall\ u\in H_0^1(\Omega)$$

我们可得到如下估计

$$\left|\mathrm{Re}\,\beta\int|A|^2A\Delta\overline{A}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant |\beta|\,\|A\|_6^3\|\Delta A\| \leqslant$$

$$C\|A\|\|\nabla A\|^2\|\Delta A\| \leqslant$$

$$\frac{1}{6}a_0\|\Delta A\|^2 + C\|A\|^2\|\nabla A\|^4,$$

$$\left|\mathrm{Re}\,\gamma\int AE(|A|^2)\Delta\overline{A}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant |\gamma|\,\|A\|_6\|E(|A|^2)\|_3\|\Delta A\| \leqslant$$

$$|\gamma|\,\|A\|_6^3\|\Delta A\| \leqslant C\|A\|\|\nabla A\|^2\|\Delta A\| \leqslant$$

$$\frac{1}{6}a_0\|\Delta A\|^2 + C\|A\|^2\|\nabla A\|^4,$$

$$\chi_1\|\nabla A\|^2 \leqslant \frac{1}{6}a_0\|\Delta A\|^2 + C\|A\|^2$$

因此可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla A\|^2+\frac{1}{2}\alpha_2\|\Delta A\|^2\leqslant C\|A\|^2+C\|A\|^2\|\nabla A\|^4 \tag{1.5.19}$$

为了证明引理的结论

$$\|\nabla A(t)\|^2\leqslant C,\quad \forall t\geqslant t_2(R)$$

我们需要以下引理

引理1.5.3 一致 Gronwall 不等式[80]：设 $g(t),h(t),y(t)\geqslant 0$满足

$$y'(t)\leqslant g(t)y(t)+h(t),\quad \forall t\geqslant s$$

如 $\int_t^{t+r}g(s)\mathrm{d}s\leqslant k_1,\int_t^{t+r}h(s)\mathrm{d}s\leqslant k_2,\int_t^{t+r}y(s)\mathrm{d}s\leqslant k_3,r>0$，则

$$y(t+r)\leqslant\left(\frac{k_3}{r}+k_2\right)\mathrm{e}^{k_1},\quad \forall t\geqslant s$$

现取 $y(t)=\|\nabla A(t)\|^2,g(t)=C\|A(t)\|^2\|\nabla A(t)\|^2,h(t)=C\|A(t)\|^2$，则由引理1.5.2，对任何 $r>0,t\geqslant t_1(R)$，

$$\int_t^{t+r}y(s)\mathrm{d}s\leqslant Cr+C\overset{\mathrm{def}}{=\!=}k_3,$$

$$\int_t^{t+r}g(s)\mathrm{d}s\leqslant C\int_t^{t+r}\|\nabla A\|^2\mathrm{d}s\leqslant Cr+C\overset{\mathrm{def}}{=\!=}k_1,$$

$$\int_t^{t+r}h(s)\mathrm{d}s\leqslant Cr\overset{\mathrm{def}}{=\!=}k_2,$$

其中 $|A_0|_{H_0^1(\Omega)}\leqslant R$。由一致 Gronwall 不等式有

$$y(t+r)=\|\nabla A(t+r)\|\leqslant\left(\frac{C}{r}+C+Cr\right)\mathrm{e}^{Cr+C},$$

$$t\geqslant t_1(R),r>0$$

因此引理1.5.3得证。更进一步，从式(1.5.19)有

$$\int_t^{t+r}\|\Delta A(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant C(r),\quad \forall t\geqslant 0$$

引理1.5.4 设引理1.5.2的条件满足，则有

$$\|\Delta A(t)\|^2\leqslant C+\frac{C}{t},\quad \forall t>0$$

证明 令Δ作用于式(1.5.8)的两端，再乘以$-t\Delta\overline{A}$，对x在Ω上积分后，取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t\|\Delta A\|^2)-\frac{1}{2}\|\Delta A\|^2+$$
$$t(a_1\|\Delta A_x\|^2+b_1\|\Delta A_y\|^2)=$$
$$\chi_1 t\|\Delta A\|^2+\mathrm{Re}\,\beta t\int\Delta(|A|^2A)\Delta\overline{A}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+$$
$$\mathrm{Re}\,\gamma t\int\Delta(AE(|A|^2))\Delta\overline{A}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (1.5.20)$$

注意到

$$a_1\|\Delta A_x|^2+b_1\|\Delta A_y\|^2\geqslant\alpha_0|\nabla\Delta A\|^2,$$
$$\|\nabla A\|_4\leqslant C\|A\|_4^{\frac{3}{5}}\|\nabla\Delta A\|^{\frac{2}{5}},$$
$$\|\Delta A\|_4\leqslant C\|A\|_4^{\frac{1}{5}}\|\nabla\Delta A\|^{\frac{4}{5}},$$

可得

$$|\mathrm{Re}\,\beta\int\Delta(|A|^2A)\Delta\overline{A}\mathrm{d}x\mathrm{d}y|\leqslant$$
$$2|\beta|\int(|A|^2|\Delta A|^2+|\nabla A|^2|A||\Delta A|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant$$
$$C(\|A\|_4^2\|\Delta A\|_4^2+\|\nabla A\|_4^2\|A\|_4\|\Delta A\|_4)\leqslant$$
$$C\|A\|_4^{\frac{12}{5}}\|\nabla\Delta A\|_4^{\frac{8}{5}}\leqslant$$
$$\frac{1}{4}\alpha_0\|\nabla\Delta A\|^2+C\|A\|_{H^1}^{12},$$
$$\left|\mathrm{Re}\,\gamma\int\Delta(AE(|A|^2))\Delta\overline{A}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant|\gamma||\Delta A\|_4^2\|E(|A|^2)\|+$$
$$2|\gamma|\|\nabla A\|_4\|\nabla E(|A|^2)\|\|\Delta A\|_4+$$
$$|\gamma|\|A\|_4\|\Delta A\|_4\|\Delta E(|A|^2)\|\leqslant$$
$$C|A\|_4^2\|\Delta A\|_4^2-C\|\nabla A\|_4\|\nabla|A|^2\|\|\Delta A\|_4+$$
$$C\|A\|_4\|\Delta A\|_4\left\|\frac{\partial^2|A|^2}{\partial y^2}\right\|\leqslant$$
$$C|A\|_4\|\Delta A\|_4^2-C\|\nabla A\|_4^2\|A\|_4\|\Delta A\|_4+$$

$$C\|A\|_4\|\Delta A\|_4(2\|A\|_4\left\|\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right\|_4+2\left\|\frac{\partial A}{\partial y}\right\|_4^2)\leqslant$$

$$C\|A\|_4^{\frac{12}{5}}\|\nabla\Delta A\|^{\frac{8}{5}}\leqslant$$

$$\frac{1}{4}\alpha_0\|\nabla\Delta A\|^2+C\|A\|_{H^1}^{12}$$

由式(1.5.20)和以上估计得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t\|\Delta A\|^2)+\frac{1}{2}\alpha_0\lambda_1 t\|\Delta A\|^2\leqslant$$

$$Ct\|A\|_{H^1}^{12}+\frac{1}{2}\|\Delta A\|^2\leqslant Ct+\frac{1}{2}\|\Delta A\|^2$$

其中 $\lambda_1\|u\|^2\leqslant\|\nabla u\|^2,u\in H_0^1(\Omega)$，$\lambda_1$ 为 $-\Delta$ 具 Dirichlet 边界条件的第一特征值。令 $\alpha_0=\min\{a,b\}$。如 $\alpha_0>0$，则

$$a_1\|u_x\|^2+b_1\|u_y\|^2\geqslant\alpha_0\lambda_1\|u\|^2$$

由 $\int_0^r\|\Delta A(t)\|^2\mathrm{d}t\leqslant C(r),\forall r>0$，由 Gronwall 不等式有

$$t\|\Delta A\|^2\leqslant G(t)\overset{\text{def}}{=\!=}\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha_0\lambda_1(t-s)}(Cs+\|\Delta A(s)\|^2)\mathrm{d}s \tag{1.5.21}$$

因此有

$$\|\Delta A\|^2\leqslant\frac{C(r)}{t},\quad\forall 0<t\leqslant r \tag{1.5.22}$$

从式(1.5.21)有

$$\|\Delta A\|^2\leqslant\frac{1}{t}G(t),\quad\forall t>0 \tag{1.5.23}$$

微商 $G(t)$ 并用式(1.5.23)代入得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t)=Ct+\|\Delta A(t)\|^2-\alpha_0\lambda_1 G(t)\leqslant$$

$$Ct-(\alpha_0\lambda_1-\frac{1}{t})G(t)$$

取 $r_*>\frac{2}{\alpha_0\lambda_1}$，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t)+\frac{1}{2}\alpha_0\lambda_1 G(t)\leqslant Ct,\quad\forall t\geqslant r_*$$

由 Gronwall 不等式得

$$G(t) \leqslant G(r_*)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha_0\lambda_1(t-r_*)} + \int_{r_*}^{t} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha_0\lambda_1(t-s)}Cs\mathrm{d}s \leqslant$$

$$G(r_*) + C\int_0^t s\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha_0\lambda_1(t-s)}\mathrm{d}s \leqslant$$

$$G(r_*) + \frac{2C}{\alpha_0\lambda_1}t + \frac{4C}{\alpha_0^2\lambda_1^2}, \quad \forall t \geqslant r_*$$

因此

$$\|\Delta A\|^2 \leqslant \frac{C(r_*)}{t} + C, \quad \forall t \geqslant r_* \qquad (1.5.24)$$

由式(1.5.22)和式(1.5.24)推出引理。

现写式(1.5.8)、(1.5.9)为泛函形式

$$A_t = F(A) \stackrel{\text{def}}{=\!=} LA + f(A),\ A|_{t=0} = A_0 \qquad (1.5.25)$$

其中 $L=P(D)=a\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+b\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$为在 $X=L^2(\Omega)$上的微分算子，$D(L)=W^{2,p}\cap W_0^{1,p}(\Omega)(1<p<\infty)$，非线性映照 $f(A)=\chi A-\beta|A|^2A-\gamma E(|A|^2)$。显然$0\in\rho(L)$，$\rho(L)$为 ρ 的预解式。$L=P(D)$的象征为 $P(\xi)=a\xi_1^2+b\xi_2^2$，它的实部 $\mathrm{Re}\,P(\xi)\geqslant\alpha_0|\xi|^2$。因此 $P(\xi)$为强椭圆多项式，且 $L=P(D)$生成在 X 上的有界解析半群。因此我们能定义$-L$ 的分数幂$(-L)^\alpha$，其定义域为 $D((-L)^\alpha)=X^\alpha$。特别，当 $p=2\alpha=\dfrac{1}{2}$时，我们看到 $D((-L)^{1/2})=H_0^1(\Omega)$，非线性映照 $f(A)$是局部 Lipschitz 连续从 $X^{1/2}$到 $X^{1/2}$，即

$$\|f(A_1) - f(A_2)\|_X \leqslant C(R)\|A_1 - A_2\|_{X^{1/2}},$$

$$\forall\ A_1,A_2 \in X^{1/2} = H_0^1(\Omega), \quad \|A_k\| \leqslant R, \quad k = 1,2$$

因此，对于 $A_0\in X^{1/2}$，式(1.5.25)具有唯一局部解

$$A \in C([0,t_0),X^{1/2}) \cap C^1((0,t_0),X)$$

由引理1.5.1～1.5.4的先验估计，可知此局部解能延拓为整体解。因此有

定理 1.5.2　设条件[H]成立，$A_0\in H_0^1(\Omega)$。则方程组

(1.5.8)、(1.5.9)具有唯一整体解

$$A \in C([0, +\infty); \quad H_0^1(\Omega)) \cap C^1((0, +\infty), \quad L^2(\Omega))$$

解算子 $S(t): A_0 \mapsto A(t)$ 是在 $H_0^1(\Omega)$ 中的连续半群。且 $S(t)$ 具有有界的吸收集 $\mathscr{B} \subset H_0^1(\Omega)$。

由定理1.5.2及引理1.5.4，对任意有界集 $B \subset H_0^1(\Omega)$，$\overline{\bigcup_{t \geq 1} S(t) B}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界。即 $S(t)$ 对 t 充分大是紧的。由文献[80]可知

定理 1.5.3 设条件[H]成立，$S(t)$ 为问题(1.5.8)、(1.5.9)生成的半群，$\mathscr{B}$ 为 $S(t)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的吸收集，则 $\mathscr{B}$ 的 ω 极限集

$$\mathscr{A} = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t) \mathscr{B}}$$

其中闭包"—"是取在 $H_0^1(\Omega)$ 拓扑下的，它满足

(1) $S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}, \forall t \geq 0$，　(不变性)。

(2) $\lim\limits_{t \to \infty} \operatorname{dist}(S(t)B, \mathscr{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{t \to \infty} \sup\limits_{A_0 \in B} \operatorname{dist}(S(t)A_0, \mathscr{A}) = 0$，$\forall B \subset H_0^1(\Omega)$ (吸引性)。

(3) $\mathscr{A}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中是紧的。

以下证明 $\mathscr{A}$ 具有有限的 Hausdorff 和分形维数。

从定理1.5.2和引理1.5.4知 $A_0 \in H_0^1(\Omega)$，(1.5.25)方程具有唯一解

$$A \in C([0, +\infty); \quad H_0^1(\Omega)) \cap L_{loc}^2([0, +\infty); \quad H^2(\Omega)) \cap L^\infty((t_*, +\infty); H^2(\Omega)) (\forall t_* > 0)$$

令 $U(t, \cdot, \cdot)$ 为如下变分问题的解

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = F'(A(t))U =$$

$$aU_{xx} + bU_{yy} + \chi U - 2\beta |A|^2 U - \beta A^2 \overline{U} -$$

$$\gamma E(|A|^2)U - \gamma E(\overline{A}U + A\overline{U})A,$$

$$t > 0, (x, y) \in \Omega,$$

$$U(t, x, y) = 0, t \geq 0, (x, y) \in \partial\Omega,$$

$$U(0,\cdot,\cdot)=U_0\in H_0^1(\Omega),(x,y)\in\Omega$$

不难验证上述问题具有唯一解

$$U\in C_b(\mathbf{R}^+;H_0^1(\Omega))\cap L^2_{loc}(\mathbf{R}^+;H^2(\Omega)),$$

这意味着 $S(t)$在 $H_0^1(\Omega)$中是 Fréchet 可微的。而且 $U(t,\cdot,\cdot)=(DS(t)A_0)U_0$为 $S(t)$在 $A_0\in H_0^1(\Omega)$处的 Fréchet 微分。我们有

$$\|S(t)(A_0+U_0)-S(t)A_0-(DS(t)A_0)U_0\|_{H_0^1(\Omega)}\leqslant$$

$$C(R,T)\|U_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

对于$0\leqslant t\leqslant T$,A_0,$U_0\in H_0^1(\Omega)$,$\|A_0\|_{H_0^1(\Omega)}\leqslant R$。设 $U_{k0}\in H_0^1(\Omega)$线性无关,$U_k=(DS(t)A_0)U_{k0}$,$1\leqslant k\leqslant m$,则

$$\|U_1(t)\wedge U_2(t)\wedge\cdots\wedge U_m(t)\|^2_{\wedge^m H_0^1(\Omega)}=$$

$$\|U_{10}\wedge U_{20}\wedge\cdots\wedge U_{m0}\|^2_{\wedge^m H_0^1(\Omega)}\times$$

$$\exp\int_0^t \mathrm{Re}\ \mathrm{tr}(F'(S(\tau)A_0)\cdot Q_m(\tau))\mathrm{d}\tau \qquad (1.5.26)$$

其中$(\cdot,\cdot)_{H_0^1(\Omega)}$为在 $H_0^1(\Omega)$中的内积。$(\cdot,\cdot)$表示在 $L^2(\Omega)$中的内积。省略变量 τ 有

$$\mathrm{Re}\ (F'(A)\phi_j,\phi_j)_{H_0^1(\Omega)}=$$

$$-a_1\|\nabla\phi_{jx}\|^2-b_1\|\nabla\phi_{jy}\|^2+\chi\|\nabla\phi_j\|-$$

$$2\mathrm{Re}\ \beta(\nabla(|A|^2\phi_j),\nabla\phi_j)-\mathrm{Re}\ \beta(\nabla(A^2\overline{\phi}_j),\nabla\phi_j)-$$

$$\mathrm{Re}\ \gamma(\nabla(E(|A|^2)\phi_j),\nabla\phi_j)-$$

$$\mathrm{Re}\ \gamma(\nabla(E(\overline{A}\phi_j+A\overline{\phi}_j)A),\nabla\phi_j)$$

利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式得

$$|2\mathrm{Re}\ \beta(\nabla(|A|^2\phi_j),\nabla\phi_j)|\leqslant$$

$$C(\|A\|_\infty\|\nabla A\|_3\|\phi_j\|_6+\|A\|^2_\infty\|\nabla\phi_j\|)\|\nabla\phi_j\|\leqslant$$

$$C\|\nabla A\|_3^2\|\nabla\phi_j\|^2\leqslant C\|A\|^{2/3}\|\Delta A\|^{4/3}\|\nabla\phi_j\|^2,$$

类似地有

$$|\mathrm{Re}\ (\nabla(A^2\overline{\phi}_j),\nabla\phi_j)|\leqslant C\|A\|^{2/3}\|\Delta A\|^{4/3}\|\nabla\phi_j\|^2,$$

$$|\mathrm{Re}\ \gamma(\nabla(E(|A|^2)\phi_j),\nabla\phi_j)|\leqslant$$

$$|\gamma|\|E(|A|^2)\|_\infty\|\nabla\phi_j\|^2 +$$
$$C|\gamma|\|\nabla|A|^2\|_3\|\phi_j\|_6\|\nabla\phi_j\| \leqslant$$
$$C|\gamma|\|\nabla E(|A|^2)\|_3\|\nabla\phi_j\|^2 +$$
$$C|\gamma|\|A\|_\infty\|\nabla|A|\|_3\|\nabla\phi_j\|^2 \leqslant$$
$$C\|A\|^{2/3}\|\Delta A\|^{4/3}\|\nabla\phi_j\|^2,$$
$$|\mathrm{Re}\,\gamma(\nabla E(\overline{A}\phi_j + A\overline{\phi}_j),\nabla\phi_j)| \leqslant$$
$$|\gamma|\|E(\overline{A}\phi_j + A\overline{\phi}_j)\|_6\|\nabla A\|_3\|\nabla\phi_j\| +$$
$$|\gamma|\|\nabla E(\overline{A}\phi_j + A\overline{\phi}_j)\|\|A\|_\infty\|\nabla\phi_j\| \leqslant$$
$$C|\gamma|\|A\|_\infty\|\phi_j\|_6\|\nabla A\|_3\|\nabla\phi_j\| \leqslant$$
$$C\|A\|^{2/3}\|\Delta A\|^{4/3}\|\nabla\phi_j\|^2$$

因此可得

$$\mathrm{Re}\,(F'(A)\phi_j,\phi_j)_{H_0^1(\Omega)} \leqslant$$
$$-\alpha_0\|\Delta\phi_j\|^2 + \chi_1\|\nabla\phi_j\|^2 + C\|A\|^{2/3}\|\Delta A\|^{4/3}\|\nabla\phi_j\|^2 \leqslant$$
$$-\alpha_0\|\Delta\phi_j\|^2 + \chi_1\|\nabla\phi_j\|^2 + C_0(\|A\|^2 + \|\Delta A\|^2)\|\nabla\phi_j\|^2,$$

其中常数 C_0 仅依赖于 β,γ 和 Ω。因 $\|\nabla\phi_j\|=1$，有

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(F'(A)\cdot Q_m) \leqslant$$
$$-\alpha_0\sum_{j=1}^m\|\Delta\phi_j\|^2 + m(\chi_1 + C_0\|A\|^2) + C_0 m\|\Delta A\|^2 \tag{1.5.27}$$

令 $\rho_m(x,y) = \sum_{j=1}^m|\nabla\phi_j(x,y)|^2$，$\sigma_m(x,y) = \sum_{j=1}^m|\Delta\phi_j(x,y)|^2$，则 $\int_\Omega\rho_m(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = m$。由广义 Sobolev-Lieb-Thirring 不等式

$$\int_\Omega\rho_m^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant k_0\int_\Omega\sigma_m(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 k_0 仅依赖于 Ω，因此由 Hölder 不等式有

$$m = \int_\Omega\rho_m(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant |\Omega|^{1/2}\left(\int_\Omega\rho_m^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2} \leqslant$$
$$k_0|\Omega|^{1/2}\left(\int_\Omega\sigma_m(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}$$

因此

$$\sum_{j=1}^{m}\|\Delta\phi_j\|^2=\int_\Omega\sigma_m(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\frac{m^2}{k_0^2|\Omega|}\qquad(1.5.28)$$

对 $A_0\in\mathscr{A}$（整体吸引子），$A(t)=S(t)A_0$，有

$$\|A(t)\|\leqslant C_1,\quad\int_0^t\|\Delta A(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant C_2t+C_3,\quad\forall t\geqslant 0$$

因此，由式(1.5.27)、(1.5.28)得

$$\int_0^t\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}(F'(S(\tau)A_0)\cdot Q_m(\tau))\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$-\frac{\alpha_0m^2}{k_0^2|\Omega|}t+m(\chi_1+C_0C_1)t+C_0C_2mt+C_0C_3m$$

因此可得

$$q_m=\lim_{t\to\infty}\sup\sup_{A_0\in\mathscr{A}}\sup_{\|U_{j0}\|\leqslant 1}\frac{1}{t}\times$$

$$\int_0^t\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}(F'(S(\tau)A_0)\cdot Q_m(\tau))\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$-\frac{\alpha_0m^2}{k_0^2|\Omega|}+m(\chi_1+C_0C_1+C_0C_2)$$

令 m_0为最小整数，满足

$$m_0>\frac{\chi_1+C_0C_1+C_0C_2}{\alpha_0}|\Omega|k_0\qquad(1.5.29)$$

有 $q_m<0,m\geqslant m_0$。则由文献[80]可得

定理1.5.4 设 $\mathscr{A}$ 为问题(1.5.8)、(1.5.9)在 $H_0^1(\Omega)$中的吸引子。m_0由式(1.5.29)确定，则有

(1) $\mathscr{A}$ 的 Hausdorff 维数$\leqslant m_0$。

(2) $\mathscr{A}$ 的分形维数$\leqslant 2m_0$。

1.6 导数 Ginzburg-Landau 方程

导数 Ginzburg-Landau 方程出现在许多物理问题中，例如，Rayleigh-Benard 对流，在流体力学中的 Taylo-Couette 流，在等离子体中的耗散Drift流，化学反应中的湍流等，详见文献[17,18,

19]。

广义(具导数项)Ginzburg-Landau 方程在空间一维时具有如下形式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha_0 u + \alpha_1 u_{xx} + \alpha_2 |u|^2 u + \alpha_3 |u|^2 u_x + \alpha_4 u^2 u_x^* + \alpha_5 |u|^{2\sigma} u \tag{1.6.1}$$

其中：$\sigma > 0$；$\alpha_k = a_k + ib_k$；$\alpha_0 = a_0 > 0$；a_k, b_k 为实常数；u_x^* 表示 u_x 的复数共轭。1992 年 Duan，Holmes 和 Titi 在文献[20]中对 $\sigma = 2$，证明了方程(1.6.1)在有界域上整体解的存在唯一性。1994 年，Duan 和 Holmes 在文献[21]中证明了式(1.6.1)柯西问题的适定性。1994 年郭和高在文献[22]中证明了式(1.6.1)的周期初值问题整体吸引子的存在性和分形维数、Hausdorff 维数的有限性。

如 $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$，则方程(1.6.1)归结为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \rho u + (1 + i\nu)\Delta u - (1 + i\mu)|u|^{2\sigma} u \tag{1.6.2}$$

1990 年，Bartuccelli，Constantin，Doering，Gibbon 和 Gisselfalt 在文献[23]中研究了方程(1.6.2)的“硬的”和“软的”湍流状态。1994 年，Doering，Gibbon Levermore 在文献[24]中证明方程(1.6.2)在空间二维时弱解和强解的存在性。

现考虑二维有界域上如下的广义 Ginzburg-Landau 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \rho u + (1 + i\nu)\Delta u - (1 + i\mu)|u|^{2\sigma} u + \alpha \boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|u|^2 u) + \beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u)|u|^2 \tag{1.6.3}$$

具有初值条件

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega \tag{1.6.4}$$

和周期边界条件

$$\Omega = (0, L_1) \times (0, L_1) \quad u \text{ 在 } \Omega \text{ 上是周期的} \tag{1.6.5}$$

其中：$u(x,t)$ 为未知复值函数；$\sigma > 0$；$\rho > 0$；ν, μ, α 和 β 均为实常数；$\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2$ 为实向量。

1996 年，郭和王在文献[25]中证明了：如 $u_0 \in H^2_{\mathrm{per}}(\Omega)$，$\exists\ \delta >$

0,使得

$$3 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu-\nu\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2}-1} \tag{1.6.6}$$

则存在问题(1.6.1)～(1.6.5)的整体唯一解 $u(x,t)$

$$u(x,t) \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^3(\Omega)), \forall T>0$$

并且具有整体吸引子及吸引子的 Hausdorff、分形维数的有限性。

现对问题(1.6.3)～(1.6.5)的解作一致先验估计。

引理 1.6.1 设 $u_0 \in H^2_{\text{per}}(\Omega)$，则对问题(1.6.3)～(1.6.5)的解，有

$$\| u(t) \|^2 \leqslant C_1, \forall t \geqslant t_1$$

证明 作式(1.6.3)和 u 的 L^2 内积，再取实部得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u \|^2 = \rho\int_\Omega |u|^2\mathrm{d}x - \| \nabla u \|^2 - \int_\Omega |u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x + \\ \alpha\mathrm{Re}\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|u|^2u))u^*\mathrm{d}x + \\ \beta\mathrm{Re}\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u)|u|^2u^*\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{1.6.7}$$

记 $\boldsymbol{\lambda}_2=(a,b)$，则有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u)|u|^2u^*\mathrm{d}x = \\ &\mathrm{Re}\int_\Omega\left(a\frac{\partial u}{\partial x_1}u^* + b\frac{\partial u}{\partial x_2}u^*\right)|u|^2\mathrm{d}x = \\ &\frac{1}{2}\int_\Omega a|u|^2\frac{\partial}{\partial x_1}|u|^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega b|u|^2\frac{\partial}{\partial x_2}|u|^2\mathrm{d}x = \\ &\frac{1}{2}\int_0^{L_2}\mathrm{d}x_2\int_0^{L_1}a|u|^2\frac{\partial}{\partial x_1}|u|^2\mathrm{d}x_1 + \\ &\frac{1}{2}\int_0^{L_1}\mathrm{d}x_1\int_0^{L_2}b|u|^2\frac{\partial}{\partial x_2}|u|^2\mathrm{d}x_2 = 0\end{aligned} \tag{1.6.8}$$

$$\mathrm{Re}\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|u|^2u))u^*\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla|u|^2)|u|^2\mathrm{d}x +$$

$$\mathrm{Re}\int_{\Omega}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla u)|u|^2u^*\mathrm{d}x=\int_{\Omega}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla|u|^2)|u|^2\mathrm{d}x+$$

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla|u|^2)|u|^2\mathrm{d}x=0 \tag{1.6.9}$$

于是，从式(1.6.7)～(1.6.9)得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\|\nabla u\|^2+\int_{\Omega}|u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x=\rho\int_{\Omega}|u|^2\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}|u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x+C\quad(\text{由 Young 不等式}) \tag{1.6.10}$$

其中常数 C 依赖于参数数据 σ,ρ。今后仍用常数 C 表示依赖于参数(σ,ρ,ν,μ)。由式(1.6.10)有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\|\nabla u\|^2+\frac{1}{2}\int_{\Omega}|u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\leqslant C$$

由此得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\int_{\Omega}|u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\leqslant C \tag{1.6.11}$$

由 Young 不等式有

$$|u|^2=|u|^2\cdot 1\leqslant|u|^{2\sigma+2}+C \tag{1.6.12}$$

积分式(1.6.12)得

$$\|u\|^2\leqslant\int_{\Omega}|u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x+C \tag{1.6.13}$$

由式(1.6.11)和式(1.6.13)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\|u\|^2\leqslant C$$

由 Gronwall 不等式得

$$\|u(t)\|^2\leqslant\|u_0\|^2\mathrm{e}^{-t}+C\leqslant R^2\mathrm{e}^{-t}+C,\forall t\geqslant 0$$

$$\leqslant 2C,\forall t\geqslant t_*,$$

其中 $t_*=\ln\dfrac{R^2}{C}$ 引理得证。

引理 1.6.2 设满足引理 1.6.1 条件，且∃ $\delta>0$ 使得式(1.6.6)成立，则$\forall\varepsilon>0$ 我们有

$$\frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}|u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x \leqslant -\frac{1}{2}\int_{\Omega}|u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x + \varepsilon\|\Delta u\|^2 +$$

$$\varepsilon\|\nabla u\|^4 - \frac{1}{4}\int_{\Omega}|u|^{2\sigma-2}((1+2\sigma)|\nabla|u|^2|^2 -$$

$$2\nu\sigma\nabla|u|^2\cdot \mathrm{i}(u\nabla u^* - u^*\nabla u) + |u\nabla u^* - u^*\nabla u|^2)\mathrm{d}x +$$

$$C_3 + C_2(\varepsilon)(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}} \quad \forall t \geqslant t_2$$

其中：C_3 依赖于参数数据(σ,ρ,ν,μ)；$C_2(\varepsilon)$依赖于参数数据和 ε；t_2 依赖于参数和 R，$\|u_0\|\leqslant R$。

证明 作式(1.6.3)和$|u|^{2\sigma}u$ 的 L^2 内积得

$$\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial t}|u|^{2\sigma}u^*\mathrm{d}x = \rho\int_{\Omega}|u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x +$$

$$(1+\mathrm{i}\nu)\int_{\Omega}\Delta u\cdot|u|^{2\sigma}u^*\mathrm{d}x - (1+\mathrm{i}\mu)\int_{\Omega}|u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x +$$

$$\alpha\int_{\Omega}(\lambda_1\cdot\nabla(|u|^2u))|u|^{2\sigma}u^*\mathrm{d}x +$$

$$\beta\int_{\Omega}(\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^{2\sigma+2}u^*\mathrm{d}x \tag{1.6.14}$$

由于

$$(1+\mathrm{i}\nu)\int_{\Omega}\Delta u\cdot|u|^{2\sigma}u^*\mathrm{d}x = -(1+\mathrm{i}\nu)\int_{\Omega}|\nabla u|^2|u|^{2\sigma}\mathrm{d}x -$$

$$(1+\mathrm{i}\nu)\int_{\Omega}\sigma|u|^{2\sigma-2}u^*\nabla u\cdot\nabla|u|^2\mathrm{d}x \tag{1.6.15}$$

取式(1.6.14)的实部，可得

$$\frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}|u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x = \rho\int_{\Omega}|u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x -$$

$$\int_{\Omega}|\nabla u|^2|u|^{2\sigma}\mathrm{d}x - \frac{\sigma}{2}\int_{\Omega}|u|^{2\sigma-2}|\nabla|u|^2|^2\mathrm{d}x +$$

$$\frac{1}{2}\nu\sigma\int_{\Omega}|u|^{2\sigma-2}\nabla|u|^2\cdot\mathrm{i}(u\nabla u^* - u^*\nabla u)\mathrm{d}x -$$

$$\int_{\Omega}|u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x + \mathrm{Re}\,\alpha\int_{\Omega}(\lambda_1\cdot(|u|^2u))|u|^{2\sigma}u^*\mathrm{d}x +$$

$$\operatorname{Re} \beta \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^{2\sigma+2} u^* \mathrm{d}x \tag{1.6.16}$$

由于

$$|u|^2 |\nabla u|^2 = \frac{1}{4} |\nabla |u|^2|^2 + \frac{1}{4} |u \nabla u^* - u^* \nabla u|^2 \tag{1.6.17}$$

由此可知

$$-\int_{\Omega} |\nabla u|^2 |u|^{2\sigma} \mathrm{d}x - \frac{\sigma}{2} \int_{\Omega} |u|^{2\sigma-2} |\nabla |u|^2|^2 \mathrm{d}x +$$
$$\frac{1}{2} \nu\sigma \int_{\Omega} |u|^{2\sigma-2} \nabla |u|^2 \cdot \mathrm{i}(u \nabla u^* - u^* \nabla u) \mathrm{d}x =$$
$$-\frac{1}{4} \int_{\Omega} |u|^{2\sigma-2} ((1+2\sigma) |\nabla |u|^2|^2 -$$
$$2\nu\sigma \nabla |u|^2 \cdot \mathrm{i}(u \nabla u^* - u^* \nabla u) + |u \nabla u^* - u^* \nabla u|^2) \mathrm{d}x \tag{1.6.18}$$

$$\rho \int_{\Omega} |u|^{2\sigma+2} \mathrm{d}x = \rho \int_{\Omega} |u|^{2\sigma+1} \cdot |u| \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{6} \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} \mathrm{d}x +$$
$$\frac{3}{2} \rho^2 \int_{\Omega} |u|^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{6} \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} \mathrm{d}x + C, \quad \forall t \geqslant t_1 \tag{1.6.19}$$

$$\left|\operatorname{Re} \beta \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^{2\sigma+2} u^* \mathrm{d}x\right| \leqslant$$
$$|\beta \lambda_2| \int_{\Omega} |\nabla u| |u|^2 |u|^{2\sigma+1} \mathrm{d}x \leqslant$$
$$3 |\beta \lambda_2|^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 |u|^4 \mathrm{d}x + \frac{1}{12} \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} \mathrm{d}x <$$
$$3 |\beta \lambda_2|^2 \| \nabla u \|_4^2 \| u \|_8^4 + \frac{1}{12} \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} \tag{1.6.20}$$

由 Sobolev 插值不等式

$$\| u \|_4 \leqslant K \| u \|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \| u \|^{\frac{1}{2}}, \forall u \in H^1(\Omega) \tag{1.6.21}$$

$$\| u \|_8 \leqslant K \| u \|_{H^2}^{\theta} \| u \|_q^{1-\theta}, \forall\, u \in H^2(\Omega) \quad (1.6.22)$$

其中

$$\theta = \frac{8-q}{4q+8} \text{ 当 } 1 < q < 8; \quad \theta = 0 \text{ 当 } q \geqslant 8$$

于是有

$$\| \nabla u \|_4^2 \leqslant C \| \nabla u \|_{H^1} \| \nabla u \|_2 \leqslant C \| u \|_{H^2} \| u \|_{H^1} \quad (1.6.23)$$

由式(1.6.20)～(1.6.23)，当 $q>3$ 且 $0<\gamma\leqslant 1$ 时有

$$\left|\mathrm{Re}\ \beta\int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u)|u|^{2\sigma+2}u^* \mathrm{d}x\right| \leqslant$$

$$C|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|^2 \| u \|_{H^2}^{4\theta+1} \| u \|_{H^1} \| u \|_q^{4(1-\theta)} + \frac{1}{12}\int_\Omega |u|^{4\sigma-2}\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\gamma \| u \|_{H^2}^2 + C(\gamma)|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|^{\frac{4}{1-4\theta}} \| u \|_{H^1}^{\frac{2}{1-4\theta}} \| u \|_q^{\frac{8(1-\theta)}{1-4\theta}} +$$

$$\frac{1}{12}\int_\Omega |u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x$$

当 $q>\frac{14}{3}$ 时有

$$\left|\mathrm{Re}\ \beta\int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u)|u|^{2\sigma+2}u^* \mathrm{d}x\right| \leqslant$$

$$\gamma \| u \|_{H^2}^2 + \gamma \| u \|_{H^1}^4 + C(\gamma)|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|^{\frac{8}{1-8\theta}} \| u \|_q^{\frac{16(1-\theta)}{1-8\theta}} +$$

$$\frac{1}{12}\int_\Omega |u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x$$

当 $q > \frac{34}{3}$ 时有

$$\left|\mathrm{Re}\ \beta\int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u|u|^{2\sigma+2}u^* \mathrm{d}x\right| \leqslant \gamma \| u \|_{H^2}^2 + \gamma \| u \|_{H^1}^4 +$$

$$\frac{1}{12} \| u \|_q^q + C(\gamma)|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|^{\frac{8q}{q-8q\theta-16+16\theta}} + \frac{1}{12}\int_\Omega |u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x$$

由于 $\sigma\geqslant 3$ 因而 $q=4\sigma+2>\frac{34}{3}$，于是有

$$\left|\mathrm{Re}\ \beta\int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u)|u|^{2\sigma+2}u^* \mathrm{d}x\right| \leqslant \gamma \| u \|_{H^2}^2 + \gamma \| u \|_{H^1}^4 +$$

$$\frac{1}{12}\|u\|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2}+C(\gamma)|\beta\lambda_2|^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}+\frac{1}{12}\int_\Omega|u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x$$

$$|\mathrm{Re}\ \beta\int_\Omega(\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^{2\sigma+2}u^*\mathrm{d}x|\leqslant\gamma\|u\|_{H^2}^2+\gamma\|u\|_{H^1}^4+$$

$$\frac{1}{6}\int\Omega|u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x+C(\gamma)|\beta\lambda_2|^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}\leqslant$$

$$\gamma C\|\Delta u\|^2+8\gamma\|\nabla u\|^4+\frac{1}{6}\int_\Omega|u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x+C$$

$$+C(\gamma)|\beta\lambda_2|^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}\tag{1.6.24}$$

由于

$$\nabla(|u|^2u)=|u|^2\nabla u+u\nabla|u|^2=2|u|^2\nabla u+u^2\nabla u\tag{1.6.25}$$

类似地我们有

$$|\mathrm{Re}\ \alpha\int_\Omega(\lambda_1\cdot\nabla(|u|^2u))|u|^{2\sigma}u^*\mathrm{d}x|\leqslant$$

$$3|\alpha\lambda_1|\int_\Omega|\nabla u||u|^2\cdot|u|^{2\sigma+1}\mathrm{d}x\leqslant\gamma C\|\Delta u\|^2+$$

$$8\gamma\|\nabla u\|^4+\frac{1}{6}\int_\Omega|u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x+C(\gamma)|\alpha\lambda_1|^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}\tag{1.6.26}$$

由式(1.6.16)、(1.6.18)、(1.6.19)、(1.6.24)和式(1.6.26)可得

$$\frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\leqslant-\frac{1}{2}\int_\Omega|u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x+\gamma C\|\Delta u|^2+$$

$$16\gamma\|\nabla u\|^4+C+C(\gamma)(|\alpha\lambda_1|+|\beta\lambda_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}-$$

$$\frac{1}{4}\int_\Omega|u|^{2\sigma-2}((1+2\sigma)|\nabla|u|^2|^2-$$

$$2\nu\sigma\nabla|u|^2\cdot\mathrm{i}(u\nabla u^*-u^*\nabla u)+|u\nabla u^*-u^*\nabla u|^2)\mathrm{d}x$$

当选取 γ 适当小，即得引理的结论。

引理1.6.3 设引理1.6.2条件满足，则有

$$\|\nabla u\|^2\leqslant C_3+C_3(|\alpha\lambda_1|+|\beta\lambda_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}$$

$$\forall t\geqslant t_3\tag{1.6.27}$$

其中:C_3依赖于参数数据;t_3依赖于参数数据和R;$\|u_0\|_{H^1}\leqslant R$。

证明 作式(1.6.3)和Δu的L^2内积得,

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|^2+\|\Delta u\|^2=\rho\|\nabla u\|^2+$$

$$\mathrm{Re}(1+\mathrm{i}\mu)\int_\Omega|u|^{2\sigma}u\Delta u^*\mathrm{d}x-\alpha\mathrm{Re}\int_\Omega(\lambda_1\cdot\nabla(|u|^2u))\Delta u^*\mathrm{d}x-$$

$$\beta\mathrm{Re}\int_\Omega(\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^2\Delta u^*\mathrm{d}x \tag{1.6.28}$$

$\forall\ \epsilon>0$,由 Young 不等式得

$$\rho\|\nabla u\|^2\leqslant\epsilon\|\nabla u\|^4+C(\epsilon) \tag{1.6.29}$$

$$\mathrm{Re}(1+\mathrm{i}\mu)\int_\Omega|u|^{2\sigma}u\Delta u^*\mathrm{d}x=$$

$$-\mathrm{Re}\ (1+\mathrm{i}\mu)\int_\Omega|u|^{2\sigma}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-$$

$$\mathrm{Re}\ (1+\mathrm{i}\mu)\int_\Omega\sigma|u|^{2\sigma-2}u\nabla u^*\cdot\nabla|u|^2\mathrm{d}x=$$

$$-\int_\Omega|u|^{2\sigma}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{\sigma}{2}\int_\Omega|u|^{2\sigma-2}|\nabla|u|^2|^2\mathrm{d}x+$$

$$\frac{1}{2}\mu\sigma\int_\Omega|u|^{2\sigma-2}\nabla|u|^2\cdot\mathrm{i}(u^*\nabla u-u\nabla u^*)\mathrm{d}x=$$

$$-\frac{1}{4}\int_\Omega|u|^{2\sigma-2}((1+2\sigma)|\nabla|u|^2|^2-$$

$$2\mu\sigma\nabla|u|^2\cdot\mathrm{i}(u^*\nabla u-u\nabla u^*)+$$

$$|u^*\nabla u-u\nabla u^*|^2)\mathrm{d}x\quad(\text{由}(1.6.25)) \tag{1.6.30}$$

$$\left|-\beta\mathrm{Re}\int_\Omega(\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^2\Delta u^*\mathrm{d}x\right|\leqslant$$

$$|\beta\lambda_2|\int_\Omega|\nabla u||u|^2|\Delta u|\mathrm{d}x\leqslant$$

$$|\beta\lambda_2|\|\Delta u\|\|\nabla u\|_4\|u\|_8^2\quad(\text{由 Hölder 不等式})$$

$$\leqslant C|\beta\lambda_2|\|\Delta u\|\|\nabla u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^2}^{2\theta}\|u\|_q^{2(1-\theta)}\leqslant$$

$$C|\beta\lambda_2|\|u\|_{H^2}^{2\theta\cdot\frac{3}{2}}\|\nabla u\|^{\frac{1}{2}}\|u\|_q^{2(1-\theta)}\leqslant$$

$$\gamma\|u\|_{H^2}^2 + C(\gamma)|\beta\lambda_2|^{\frac{4}{1-4\theta}}\|\nabla u\|^{\frac{2}{1-4\theta}}\|u\|_q^{\frac{8(1-\theta)}{1-4\theta}}$$

$$（当 q > 3, 0 < \gamma \leqslant 1）$$

$$|-\beta\mathrm{Re}\int_\Omega(\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^2\Delta u^*\mathrm{d}x| \leqslant \gamma\|u\|_{H^2}^2 + \gamma\|\nabla u\|^4 + C(\gamma)|\beta\lambda_2|^{\frac{8}{1-8\theta}}\|u\|_q^{\frac{16(1-\theta)}{1-8\theta}} \qquad (当 q > \frac{14}{3})$$

$$|-\beta\mathrm{Re}\int_\Omega(\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^2\Delta u^*\mathrm{d}x| \leqslant \gamma\|u\|_{H^2}^2 + \gamma\|\nabla u\|^4 + \gamma\|u\|_q^q + C(\gamma)|\beta\lambda_2|^{\frac{8q}{q-8q\theta-16+16\theta}} \quad (当 q > \frac{34}{3})$$

$$|-\beta\mathrm{Re}\int_\Omega(\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^2\Delta u^*\mathrm{d}x| \leqslant \gamma\|\Delta u\|^2 + \gamma\|\nabla u\|^4 + \gamma\|u\|_q^q + C(\gamma)|\beta\lambda_2|^{\frac{8q}{q-8q\theta-16+16\theta}} \leqslant \gamma\|\Delta u\|^2 + \gamma\|\nabla u\|^4 + \gamma\|u\|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2} + C(\gamma)|\beta\lambda_2|^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}$$

$$(\sigma \geqslant 3, q = 4\sigma + 2 > \frac{34}{3})$$

$$|-\beta\mathrm{Re}\int_\Omega(\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^2\Delta u^*\mathrm{d}x| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon\|\Delta u\|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\|\nabla u\|^4 + \frac{1}{2}\varepsilon\|u\|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2} + C(\varepsilon)|\beta\lambda_2|^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}} \tag{1.6.31}$$

类似地，由式(1.6.25)得

$$|-\alpha\mathrm{Re}\int_\Omega(\lambda_1\cdot\nabla(|u|^2u))\Delta u^*\mathrm{d}x| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon\|\Delta u\|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\|\nabla u\|^4 + \frac{1}{2}\varepsilon\|u\|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2} + C(\varepsilon)|\alpha\lambda_1|^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}} \tag{1.6.32}$$

由式(1.6.28)～(1.6.32)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 \leqslant$$

$$\varepsilon\|\Delta u\|^2 + 2\varepsilon\|\nabla u\|^4 + \varepsilon\|u\|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2} +$$

$$C(\varepsilon) + C(\varepsilon)(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}} -$$

$$\frac{1}{4}\int_{\Omega}|u|^{2\sigma-2}((1+2\sigma)|\nabla|u|^2|^2-$$

$$2\mu\sigma\nabla|u|^2\cdot\mathrm{i}(u^*\nabla u-u\nabla u^*)+|u^*\nabla u-u\nabla u^*|^2)\mathrm{d}x \tag{1.6.33}$$

由式(1.6.33)和引理1.6.2可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla u\|^2+\frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_{\Omega}|u|^{2\sigma-2}\mathrm{d}x)+\|\Delta u\|^2+$$

$$\frac{\delta^2}{2}\int_{\Omega}|u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon(1+\delta^2)\|\Delta u\|^2+\varepsilon(2+\delta^2)\|\nabla u\|^4+$$

$$\varepsilon\int_{\Omega}|u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x+C(\varepsilon)+C(\varepsilon)(|\alpha\lambda_1|+|\beta\lambda_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}-$$

$$\frac{1}{4}\int_{\Omega}|u|^{2\sigma-2}((1+2\sigma)(1+\delta^2)|\nabla|u|^2|^2+$$

$$2\sigma(\nu\delta^2-\mu)\nabla|u|^2\cdot\mathrm{i}(u^*\nabla u-u\nabla u^*)+$$

$$(1+\delta^2)|u^*\nabla u-u\nabla u^*|^2)\mathrm{d}x \tag{1.6.34}$$

由于

$$\|\nabla u\|^2=(-\Delta u,u)\leqslant\|\Delta u\|\|u\|\leqslant K\|\Delta u\| \tag{1.6.35}$$

其中 K 仅依赖于参数数据，但与 ε 无关。我们有

$$\varepsilon(1+\delta^2)\|\Delta u\|^2+\varepsilon(2+\delta^2)\|\nabla u\|^4\leqslant$$

$$\varepsilon K_0\|\Delta u\|^2\quad(K_0\text{ 与 }\varepsilon\text{ 无关})$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\|\Delta u\|^2\quad(\text{选取 }\varepsilon<\frac{1}{2K_0}) \tag{1.6.36}$$

考察条件(1.6.6)推出矩阵

$$\begin{pmatrix}(1+2\sigma)(1+\delta^2) & \sigma(\nu\delta^2-\mu)\\ \sigma(\nu\delta^2-\mu) & 1+\delta^2\end{pmatrix}$$

为非负定。因此在式(1.6.34)中右端最后一项为非正的。选取 $\varepsilon\leqslant\frac{\delta^2}{4}$ 充分小，使得式(1.6.36)成立。因此由式(1.6.34)和式(1.6.36)推得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla u\|^2+\frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_{\Omega}|u|^{2\sigma-2}\mathrm{d}x)+$$

$$\frac{1}{2}\|\Delta u\|^2 + \frac{1}{4}\delta^2\int_\Omega |u|^{4\sigma-2}\mathrm{d}x \leqslant$$

$$C + C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}} \tag{1.6.37}$$

由式(1.6.35)得

$$\|\nabla u\|^2 \leqslant K\|\Delta u\| \leqslant \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{4}K^2 \tag{1.6.38}$$

$$\frac{\delta^2}{2(1+\sigma)}\int_\Omega |u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x = \frac{\delta^2}{2(1+\sigma)}\int_\Omega |u|^{2\sigma+1}|u|\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\frac{\delta^2}{4}\int_\Omega |u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x + C\int_\Omega |u|^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{\delta^2}{4}\int_\Omega |u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x + C \tag{1.6.39}$$

由式(1.6.37)～(1.6.39)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla u\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_\Omega |u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x) +$$

$$\|\nabla u\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_\Omega |u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x \leqslant$$

$$C + C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}, \forall t \geqslant t_*$$

其中:$t_* = \max\{t_1, t_2\}$;t_1, t_2如引理1.6.1和引理1.6.2中所述。

由 Gronwall 不等式推得

$$\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_\Omega |u(t)|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x \leqslant (\|\nabla u(t_*)\|^2 +$$

$$\frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_\Omega |u(t_*)|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x)\mathrm{e}^{-(t-t_*)} + C +$$

$$C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}, \forall t \geqslant t_* \tag{1.6.40}$$

从问题(1.6.3)～(1.6.5)整体解的存在性的证明中,易知

$$\|\nabla u(t_*)\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_\Omega |u(t_*)|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x \leqslant C(R) \tag{1.6.41}$$

其中:$C(R)$依赖于参数数据和 R;$\|u_0\|_{H^1} \leqslant R$。

于是,由式(1.6.40)和式(1.6.41)推得

$$\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_\Omega |u(t)|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x \leqslant C(R)\mathrm{e}^{-(t-t_*)} +$$

$$C + C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}, \forall t \geqslant t_*$$

$$\leqslant 2C + 2C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{\frac{8(1-\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}, \forall t \geqslant t'_*.$$

其中

$$t'_* = \max\{t_*, t_* + \ln C(R) - \ln(C + C(|\alpha\lambda_1| +$$

$$|\beta\lambda_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1-2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}})\}$$

这就推出引理的结果。

引理1.6.4 设引理1.6.2的条件满足，则有

$$\|\Delta u(t)\|^2 \leqslant C_4 + C_4(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{\frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}} +$$

$$C_4(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{8+\frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}, \ \forall t \geqslant t_4,$$

其中：C_4依赖于参数数据；t_4依赖于参数数据和 R；$\|u_0\|_{H^2}\leqslant R$。

证明 作式(1.6.3)和 $\Delta^2 u$ 的内积，再取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta u\|^2 = \rho\|\Delta u\|^2 - \|\nabla\Delta u\|^2 -$$

$$\mathrm{Re}\,(1+\mathrm{i}\mu)\int_\Omega |u|^{2\sigma}u\Delta^2 u^*\mathrm{d}x +$$

$$\alpha\mathrm{Re}\int_\Omega(\lambda_1\cdot\nabla(|u|^2 u))\Delta^2 u^*\mathrm{d}x +$$

$$\beta\mathrm{Re}\int_\Omega(\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^2\Delta^2 u^*\mathrm{d}x \qquad (1.6.42)$$

应用引理1.6.1和引理1.6.3等可得，$\forall t\geqslant t_*$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta u\|^2 + \|\nabla\Delta u\|^2 + \|\Delta u\|^2 \leqslant C +$$

$$C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{\frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}} +$$

$$C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{8+\frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}} \qquad (1.6.43)$$

由 Gronwall 引理推得

$$\|\Delta u(t)\|^2 \leqslant \|\Delta u(t_*)\|^2\mathrm{e}^{-(t-t_*)} + C +$$

$$C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{\frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}} +$$

$$C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{8+\frac{240(1+\sigma)(1-2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}, \forall t \geqslant t_*. \qquad (1.6.44)$$

由整体解得先验估计有

$$\|\Delta u(t_*)\|^2 \leqslant C(R)$$

其中:$C(R)$依赖于参数数据和 R;$\|u_0\|_{H^2}\leqslant R$。当 t 充分大时有

$$\|\Delta u(t)\|^2 \leqslant 2C + 2C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{\frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}} +$$

$$2C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{8+\frac{240(1-\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}$$

这就证明了引理1.6.4。

我们注意到

$$\|u\|_{H^2}^2 \leqslant C(\|\Delta u\| + \|u\|)^2 \leqslant$$

$$C + C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{\frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}} +$$

$$C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{8+\frac{240(1+\sigma)(1-2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}, \forall t \geqslant t_*. \qquad (1.6.45)$$

其中 C 仅依赖于参数数据(σ,ρ,ν,μ)。

$$\|u\|_\infty^2 \leqslant C\|u\|\|u\|_{H^2} \leqslant$$

$$C + C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}} +$$

$$C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{4+\frac{120(1-\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}, \forall t \geqslant t_*. \qquad (1.6.46)$$

引理1.6.5　设引理1.6.2的条件满足，则有

$$\|\nabla\Delta u(t)\|^2 \leqslant K, \forall t \geqslant t_5$$

其中:K 依赖于参数数据$(\sigma,\rho,\nu,\mu,\alpha,\beta,\lambda_1,\lambda_2,\Omega)$;$t_5$依赖于参数数据$(\sigma,\rho,\nu,\mu,\alpha,\beta,\lambda_1,\lambda_2,\Omega)$和 R;$\|u_0\|_{H^2}\leqslant R$。

证明　作式(1.6.3)和 $\Delta^3 u$ 的内积，再取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\Delta u\|^2 = \rho\|\nabla\Delta u\|^2 - \|\Delta^2 u\|^2 +$$

$$\mathrm{Re}\ (1+\mathrm{i}\mu)\int_\Omega |u|^{2\sigma}u\Delta^3 u^*\,\mathrm{d}x -$$

$$\operatorname{Re}\alpha\int_{\Omega}(\lambda_1\cdot(\nabla|u|^2u))\Delta^3u^*\mathrm{d}x-$$

$$\operatorname{Re}\beta\int_{\Omega}(\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^2\Delta^3u^*\mathrm{d}x\quad(1.6.47)$$

应用引理1.6.1，1.6.3和1.6.4，再进行复杂的运算后得

$$|\operatorname{Re}(1+\mathrm{i}\mu)\int_{\Omega}|u|^{2\sigma}u\Delta^3u^*\mathrm{d}x|\leqslant K\|\Delta^2u\|\leqslant$$

$$\frac{1}{6}\|\Delta^2u\|^2+K\times\qquad(1.6.48)$$

$$|\alpha\int_{\Omega}(\lambda_1\cdot\nabla(|u|^2u))\Delta^3u^*\mathrm{d}x|\leqslant$$

$$\frac{1}{6}\|\Delta^2u\|^2+K\|\nabla\Delta u\|^2+K\times\qquad(1.6.49)$$

$$|\beta\int_{\Omega}(\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^2\Delta^3u^*\mathrm{d}x|\leqslant$$

$$\frac{1}{6}\|\Delta^2u\|^2+K\|\nabla\Delta u\|^2-K\qquad(1.6.50)$$

由式(1.6.47)～(1.6.50)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\Delta u\|^2\leqslant\rho\|\nabla\Delta u\|^2-\|\Delta^2u\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta^2u\|^2+$$

$$K\|\nabla\Delta u\|^2+K\leqslant(K+\rho)\|\nabla\Delta u\|^2+K$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\Delta u\|^2\leqslant K\|\nabla\Delta u\|^2+K\qquad(1.6.51)$$

由式(1.6.43)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta u\|^2+\|\nabla\Delta u\|^2\leqslant K,\quad\forall t\geqslant t_*\qquad(1.6.52)$$

积分式(1.6.52)从t到$t+1$，可得

$$\|\Delta u(t+1)\|^2-\|\Delta u(t)\|^2+\int_t^{t+1}\|\nabla\Delta u\|^2\mathrm{d}t\leqslant K,$$

$$\forall t\geqslant t_*$$

再应用引理1.6.4，有

$$\int_{t}^{t+1}\|\nabla\Delta u\|^2\mathrm{d}t\leqslant K,\quad \forall t\geqslant t_* \tag{1.6.53}$$

由式(1.6.51)和式(1.6.53)和一致Gronwall引理，可得

$$\|\nabla\Delta u(t)\|^2\leqslant K,\quad \forall t\geqslant t_*+1$$

引理1.6.5得证。

现建立问题(1.6.3)～(1.6.5)整体吸引子的存在性和它的Hausdorff、分形维数的估计。由式(1.6.45)推出球

$$B=\{u\in H^2(\Omega):\|u\|_{H^2}\leqslant K_0\}$$

是 $S(t)$ 在 $H^2(\Omega)$ 中的吸收集。由引理1.6.5可知，半群 $S(t)$ 在 $H^2(\Omega)$ 对充分大的 t 是一致紧的。因此由文献[80]可得整体吸引子的存在性。即有

定理1.6.1 设式(1.6.6)成立，则 ω 极限集

$$\mathscr{A}=\omega(B)=\bigcap_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant s}S(t)B}$$

是 $S(t)$ 在 $H^2(\Omega)$ 上的紧吸引子，这些闭包是取在 $H^2(\Omega)$ 上的。

下面证明整体吸引子 $\mathscr{A}$ 的维数是有限的。为此，写方程(1.6.3)为抽象形式：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=F(u) \tag{1.6.54}$$

这里 $F(u)$ 表示式(1.6.3)的右端。

考虑问题(1.6.3)～(1.6.5)的一次变分方程

$$v_t=F'(u(t))v \tag{1.6.55}$$

具初值

$$v(0)=v_0\in H \tag{1.6.56}$$

其中

$$\begin{aligned}F'(u(t))v=&\rho v+(1+\mathrm{i}\nu)\Delta v-(1+\mathrm{i}\mu)(1+\sigma)|u|^{2\sigma}v-\\&(1+\mathrm{i}\mu)\sigma|u|^{2\sigma-2}u^2v^*+2\alpha(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u|^2v))+\\&\alpha(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(u^2v^*))+\beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla v)|u|^2+\\&\beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)(vu^*+uv^*)\end{aligned}$$

$u(t)=S(t)u_0$ 为问题(1.6.3)～(1.6.5)的解，$u_0\in\mathscr{A}$。

我们知道，对 $u_0\in\mathscr{A}$，存在解 $S(t)u_0\in H^2(\Omega)$。用标准方法能证明$\forall\ v_0\in H$，线性初值问题(1.6.55)、(1.6.56)具有唯一解 $v(t)$，使得

$$v(t)\in L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap L^\infty(0,T;H),\quad \forall\ T>0 \tag{1.6.57}$$

对于$\forall\ v_0\in H$，令 $G(t)v_0$表示问题(1.6.55)、(1.6.56)的解，且通过复杂的计算和能量估计，可以证明，对于$\forall\ w_0,u_0\in\mathscr{A}$：

$$\frac{\|S(t)w_0-S(t)u_0-G(t)(w_0-u_0)\|^2}{\|w_0-u_0\|^2}\leqslant K\|w_0-u_0\|,$$

$$\forall\ 0\leqslant t\leqslant T$$

其中：K 依赖于参数数据$(\sigma,\rho,\nu,\mu,\alpha,\beta,\lambda_1,\lambda_2,\Omega)$，$T$ 和 R；$\|u_0\|_{H^2}\leqslant R$。这个不等式表明半群 $S(t)$在 $\mathscr{A}$ 上是一致可微的，且$S(t)$在 H 上 $u_0\in\mathscr{A}$ 的微分为算子 $L(t,u_0)$：$v_0\in H\to G(t)v_0\in H$。$\forall\ m$，我们考虑 $v_0=v_{01},\cdots,v_{0m}$为 H 中的 m 个元素。相应的式(1.6.55)、(1.6.56)的解 $v(t)=v_1(t),\cdots,v_m(t)$，则由文献[80]有

$$|v_1(t)\wedge\cdots\wedge v_m(t)|_{\wedge^m H}=$$

$$|v_{01}\wedge\cdots\wedge v_{0m}|_{\wedge^m H}\exp\int_0^t \mathrm{Re}\ \mathrm{tr}\ F'(u(\tau))\cdot Q_m(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.6.58}$$

其中

$$Q_m(\tau)=Q_m(\tau,u_0,v_{01},\cdots,v_{0m})$$

为 H 在$\{v_1(\tau),\cdots,v_m(\tau)\}$所张成空间的正交投影。设对给定时间 τ，$\varphi_j(\tau)$，$j\in N$，为 H 的正交基，且 $Q_m(\tau)H=\mathrm{span}\{v_1(\tau),\cdots,v_m(\tau)\}$。$v_j(\tau)\in H^1(\Omega)$。

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}\ F'(u(\tau))\cdot Q_m(\tau)=\\&\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{Re}\ (F'(u(\tau))\cdot Q_m(\tau)\varphi_j(\tau),\varphi_j(\tau))=\\&\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Re}\ (F'(u(\tau))\varphi_j(\tau),\varphi_j(\tau))\end{aligned} \tag{1.6.59}$$

省略 τ，可得

$$\operatorname{Re}\,(F'(u)\varphi_j,\varphi_j) = \rho\|\varphi_j\|^2 - \|\nabla\varphi_j\|^2 -$$

$$(1+\sigma)\int_\Omega |u|^{2\sigma}|\varphi_j|^2\mathrm{d}x -$$

$$\operatorname{Re}\,(1+\mathrm{i}\mu)\sigma\int_\Omega |u|^{2\sigma-2}u^2(\varphi_j^*)^2\mathrm{d}x +$$

$$\operatorname{Re}\,2\alpha\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u|^2\varphi_j))\varphi_j^*\,\mathrm{d}x +$$

$$\operatorname{Re}\,\alpha\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(u^2\varphi_j^*))\varphi_j^*\,\mathrm{d}x + \operatorname{Re}\beta\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla\varphi_j)|u|^2\varphi_j^*\,\mathrm{d}x +$$

$$\operatorname{Re}\,\beta\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)\ \ (u^*|\varphi_j|^2\mathrm{d}x + u(\varphi_j^*)^2)\mathrm{d}x \qquad (1.6.60)$$

现估计式(1.6.60)右端各项：

$$-\operatorname{Re}\,(1+\mathrm{i}\mu)\sigma\int_\Omega|u|^{2\sigma-2}u^2(\varphi_j^*)^2\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\sigma|1+\mathrm{i}\mu|\|u\|_\infty^{2\sigma}\|\varphi_j\|^2\leqslant C\|\varphi_j\|^2 +$$

$$C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1| + |\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{\frac{8\sigma(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}} +$$

$$C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1| + |\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{4\sigma+\frac{120\sigma(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}, \qquad (1.6.61)$$

$$\operatorname{Re}\,2\alpha\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u|^2\varphi_j))\varphi_j^*\,\mathrm{d}x =$$

$$-2\alpha\operatorname{Re}\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla\varphi_j^*)|u|^2\varphi_j\mathrm{d}x\leqslant$$

$$2|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|\,\|u\|_\infty^2\|\nabla\varphi_j\|\|\varphi_j\|\leqslant\frac{1}{8}\|\nabla\varphi_j\|^2 +$$

$$C|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|^2\|u\|_\infty^4\|\varphi_j\|^2\leqslant$$

$$\frac{1}{8}\|\nabla\varphi_j\|^2 + C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1| + |\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^2 +$$

$$C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1| + |\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{2+\frac{15(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}} +$$

$$C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1| + |\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{10+\frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}, \qquad (1.6.62)$$

$$\operatorname{Re}\,\alpha\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(u^2\varphi_j^*))\varphi_j^*\,\mathrm{d}x = -\alpha\operatorname{Re}\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla\varphi_j^*)u^2\varphi_j^*\,\mathrm{d}x\leqslant$$

$$|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|\|u\|_\infty^2\|\nabla\varphi_j\|\|\varphi_j\|\leqslant$$

$$\frac{1}{8}\|\nabla\varphi_j\|^2+C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^2+$$

$$C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{2+\frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}}+$$

$$C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{10+\frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}},\tag{1.6.63}$$

$$\mathrm{Re}\ \beta\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla\varphi_j)|u|^2\varphi_j^*\mathrm{d}x\leqslant$$

$$|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|\|u\|_\infty^2\|\nabla\varphi_j\|\|\varphi_j\|\leqslant\frac{1}{8}\|\nabla\varphi_j\|^2+$$

$$C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^2+C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+$$

$$|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{2+\frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}}+$$

$$C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{10+\frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}},\tag{1.6.64}$$

$$\mathrm{Re}\ \beta\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)(u^*|\varphi_j|^2+u(\varphi_j^*)^2)\mathrm{d}x\leqslant$$

$$2|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|\|u\|_\infty\|\nabla u\|\|\varphi_j\|_4^2\leqslant$$

$$C|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|\|u\|_\infty\|\nabla u\|\|\varphi_j\|\|\varphi_j\|_{H^1}\leqslant$$

$$\frac{1}{8}\|\varphi_j\|_{H^1}^2+C|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|^2\|u\|_\infty^2\|\nabla u\|^2\|\varphi_j\|^2\leqslant$$

$$\frac{1}{8}\|\varphi_j\|_{H^1}^2+C|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|^2\|u\|_\infty^2(-\Delta u,u)\|\varphi_j\|^2\leqslant$$

$$\frac{1}{8}\|\varphi_j\|_{H^1}^2+C|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|^2\|u\|\|u\|_{H^2}\|\Delta u\|\|u\|\|\varphi_j\|^2\leqslant$$

$$\frac{1}{8}\|\varphi_j\|_{H^1}^2+C|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|^2\|u\|_{H^2}^2\|\varphi_j\|^2\leqslant\frac{1}{8}\|\nabla\varphi_j\|^2+$$

$$\frac{1}{8}\|\varphi_j\|^2+C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^2+$$

$$C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{2+\frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}}+$$

$$C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{10+\frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}},\tag{1.6.65}$$

由式(1.6.61)～(1.6.65)有

$$\text{Re tr } F'(u(\tau)) \cdot Q_m(\tau) \leqslant -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\|\nabla \varphi_j\|^2 + E\sum_{j=1}^{m}\|\varphi_j\|^2 \tag{1.6.66}$$

其中

$$\begin{aligned} E = {} & C + C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2\ )^2 + \\ & C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{\frac{8\sigma(1-\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}} + \\ & C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{4\sigma+\frac{120\sigma(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}} + \\ & C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{2+\frac{16(1+\sigma)(1-2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}} + \\ & C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{10+\frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}} \end{aligned} \tag{1.6.67}$$

令

$$\eta = \eta(x,\tau) = \sum_{j=1}^{m}|\varphi_j|^2 \tag{1.6.68}$$

因$\{\varphi_j; j=1,\cdots,m\}$在 H 中是标准正交的，有

$$\sum_{j=1}^{m}\|\varphi_j\|^2 = \int_\Omega \eta \mathrm{d}x = m \tag{1.6.69}$$

由 Sobolev-Lieb-Thirring 不等式有

$$\int_\Omega \eta^2 \mathrm{d}x \leqslant C_0\int_\Omega \eta \mathrm{d}x + C_0\sum_{j=1}^{m}\|\nabla\varphi_j\|^2 \tag{1.6.70}$$

其中 C_0 仅依赖 Ω 的形状。

由 Hölder 不等式有

$$\left(\int_\Omega \eta \mathrm{d}x\right)^2 \leqslant |\Omega|\int_\Omega \eta^2 \mathrm{d}x \tag{1.6.71}$$

由式(1.6.66)～(1.6.71)有

$$\begin{aligned} \text{Re tr } F'(u(\tau)) \cdot Q_m(\tau) \leqslant {} & -\frac{m^2}{2C_0|\Omega|} + \\ \frac{m}{2} + Em \leqslant {} & -\frac{m^2}{4C_0|\Omega|} + C_0|\Omega|\left(E + \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned} \tag{1.6.72}$$

对 $i=1,\cdots,m$ 和 $v_{0i}\in H$，定义

$$q_m(t) = \sup_{u_0\in\mathscr{A}}\sup_{\|v_{0i}\|\leqslant 1}\left(\frac{1}{t}\int_0^t \text{Re tr } F'(S(\tau)u_0) \cdot Q_m(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$$

$$q_m = \lim_{t\to\infty} \sup q_m(t)$$

则从式(1.6.72)得

$$q_m \leqslant -\frac{m^2}{4C_0|\Omega|} + C_0|\Omega|(E+\frac{1}{2})^2$$

因此,如 m 满足

$$m-1 < \sqrt{8}C_0|\Omega|(E+\frac{1}{2}) \leqslant m \qquad (1.6.73)$$

则 $q_m<0$。由此即得

定理1.6.2 设 $\mathscr{A}$ 为问题(1.6.3)～(1.6.5)的整体吸引子,则 $\mathscr{A}$ 的 Hausdorff 维数$\leqslant m$,而它的分形维数$\leqslant 2m$,其中 m 为式(1.6.73)所确定。

1.7 超导中的 Ginzburg-Landau 模型

考虑超导中发展型 Ginzburg-Landau 模型

$$\eta\Psi_t + \mathrm{i}\eta k\Phi\Psi + (\frac{\mathrm{i}}{k}\nabla + \mathbf{A})^2\Psi - \Psi + |\Psi|^2\Psi = 0,$$

$$(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}^+ \qquad (1.7.1)$$

$$\mathbf{A}_t + \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{curl}^2\mathbf{A} + \frac{\mathrm{i}}{2k}(\Psi^*\operatorname{grad}\Psi - \Psi\operatorname{grad}\Psi^*) +$$

$$|\Psi|^2\mathbf{A} = 0 \qquad (1.7.2)$$

具边界条件

$$\nabla\Psi\cdot\mathbf{n} = 0, (\frac{\mathrm{i}}{k}\nabla\Psi + \mathbf{A}\Psi)\times\mathbf{n} = 0, (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}^+$$

$$(1.7.3)$$

及初始条件

$$\Psi(x,0) = \Psi_0(x), \mathbf{A}(x,0) = \mathbf{A}_0(x), x\in\Omega \quad (1.7.4)$$

其中:$\Omega\subset\mathbf{R}^N$,$(N=2,3)$为具光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界域;$\mathbf{R}^+=[0,\infty)$;η,k 为表示已知物理量的正常数;$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$;$\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向向量。在方程(1.7.1)、(1.7.2)中 $\Psi,\mathbf{A},\Phi$ 均为未知函数,

Ψ 为复值函数，在 GL 理论中称之为序参量，Ψ^* 表示 Ψ 的复数共轭，$|\Psi|^2$表示超导电源截体质的密度，Φ 为实的数量函数，称为电势、向量函数 $\mathbf{A}$ 是实的称为磁势，在磁场中，有 $H=\text{curl}\ \mathbf{A}$。1950年 Ginzburg-Landau 从流体的二阶相变理论中研究定态状况的这一方程，1968年，Gor'kov 和 Eliashberg 从 BCS 理论得到方程组(1.7.2)、(1.7.3)。

高温超导的发现带来了潜在的商业用途。超导中的 Ginzburg-Landau 模型已引起许多人的兴趣。1984年以来，Berger M，Chen Y，Chapman S J，Yang Y 等在文献[64,65,66]中对该数学问题整体解的存在性、唯一性、正则性等已作了多方面的研究，但对解当 $t\to\infty$时的渐进状态，则研究得不多。1995年，郭、吴在文献[67]中从无穷维动力系统研究它的长时间行态，其中包括吸引子的存在性等。

从方程组(1.7.1)、(1.7.2)可以看出，未知函数的个数多于方程的个数。为保证解的唯一性，通常必须附加三种类型的规范变换：

(1) 库仑规范。此时 $\mathbf{A}$ 的散度为零。即 $\text{div}\ \mathbf{A}=0$。此时可得

$$\eta\Psi_t - i\eta k\Phi\Psi + \left(\frac{i}{k}\nabla + \mathbf{A}\right)^2\Psi - \Psi + |\Psi|^2\Psi = 0,\quad (x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}^+ \tag{1.7.5}$$

$$\mathbf{A}_t + \text{grad}\ \Phi + \text{curl}^2\mathbf{A} + \frac{i}{2k}(\Psi^*\text{grad}\ \Psi - \Psi\text{grad}\ \Psi^*) + |\Psi|^2\mathbf{A} = 0 \tag{1.7.6}$$

$$-\Delta\Phi = \text{div}\left[\frac{i}{2k}(\Psi^*\text{grad}\ \Psi^*) + |\Psi|^2\mathbf{A}\right]$$

(2) 瞬时规范。 $\Phi=\text{div}\mathbf{A}$，此时模型为

$$\eta\Psi_t + i\eta k\text{div}\ \mathbf{A}\Psi + \left(\frac{i}{k}\nabla + \mathbf{A}\right)^2\Psi - \Psi + |\Psi|^2\Psi = 0 \tag{1.7.7}$$

$$\mathbf{A}_t - \Delta\mathbf{A} + \frac{i}{2k}(\Psi^*\text{grad}\ \Psi - \Psi\text{grad}\ \Psi^*) + |\Psi|^2\mathbf{A} = 0 \tag{1.7.8}$$

$$(x,t) \in \Omega \times \mathbf{R}^+$$

(3) 零电势规范。 $\Phi(x)=0$。此时有

$$\eta\Psi_t + (\frac{\mathrm{i}}{k}\nabla + \mathbf{A})^2\Psi - \Psi + |\Psi|^2\Psi = 0,$$

$$(x,t) \in \Omega \times \mathbf{R}^+ \tag{1.7.9}$$

$$\mathbf{A}_t + \mathrm{curl}^2\mathbf{A} + \frac{\mathrm{i}}{2k}(\Psi^*\mathrm{grad}\ \Psi^*) + |\Psi|^2\mathbf{A} = 0,$$

$$(x,t) \in \Omega \times \mathbf{R}^+ \tag{1.7.10}$$

整体解的存在性对于各种规范下均已得到。但对解的渐进性质并不是在任何规范下都能得到满意的结果，主要是由于某些规范下很难得到它的一致有界性估计。这里我们在瞬时规范下得到解的一致 H^2估计。$H^m(\Omega)$表示通常的 m 阶导数属于 $L^2(\Omega)$的 Sobolev 空间，$\mathscr{H}^m$ 表示相应的复值函数空间

$$H_n^1(\Omega) = \{\mathbf{A} \in H^1(\Omega), \mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = 0, x \in \partial\Omega\} \tag{1.7.11}$$

具有模$(\|\mathrm{div}\ \mathbf{A}\|^2+\|\mathrm{curl}\ \mathbf{A}\|^2)^{\frac{1}{2}}$。$\mathbf{A}\in H_n^1(\Omega)$，模$(\|\mathrm{div}\ \mathbf{A}\|^2+\mathrm{curl}\ \mathbf{A}\|^2)^{\frac{1}{2}}$等价于模$\|\nabla\mathbf{A}\|$。即有

$$\|u\| \leqslant K_1\|\nabla u\|, u \in H_n^1(\Omega) \tag{1.7.12}$$

以下作一致先验估计。令 $D_A=\frac{\mathrm{i}}{k}\nabla+\mathbf{A}$，则方程组(1.7.1)、(1.7.2)在规范 $\Phi=\mathrm{div}\ \mathbf{A}$ 下可写为

$$\eta\Psi_t + \mathrm{i}\eta k\mathrm{div}\ \mathbf{A}\Psi + D_A^2\Psi - \Psi + |\Psi|^2\Psi = 0,\ \Omega\times\mathbf{R}^+ \tag{1.7.13}$$

$$\mathbf{A}_t - \Delta\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\Psi^*D_A\Psi + \Psi(D_A\Psi)^*],\ \Omega\times\mathbf{R}^+ \tag{1.7.14}$$

容易看到，对于 $\Psi,\Phi\in\mathscr{H}^1$，$\mathbf{A}\in H^1$，$D_A$ 满足

$$(D_A^2\Psi,\Phi^*) = (D_A\Psi, D_A\Phi^*) \tag{1.7.15}$$

$$(D_A\Psi)_t = D_A\Psi_t + \mathbf{A}_t\Psi \tag{1.7.16}$$

以下我们恒设$|\Psi_0(x)|\leqslant 1, x\in\Omega$。易知$|\Psi(x,t)|\leqslant 1,(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}^+$。乘式(1.7.13)以 Ψ^*，分部积分后再取实部得

$$\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Psi\|^2+2\|D_A\Psi\|^2-\|\Psi\|^2+\|\Psi\|_4^4=0 \quad (1.7.17)$$

式(1.7.13)两边乘以它们的共轭,分部积分可得

$$\eta^2\|\Psi_t\|^2+\|D_A^2\Psi\|^2-\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D_A\Psi\|^2=\eta(\mathbf{A}_t\Psi,(D_A\Psi)^*)+$$

$$\eta(\mathbf{A}_t\Psi^*,D_A\Psi)\leqslant 2\|D_A\Psi\|\|\mathbf{A}_t\|\leqslant\|D_A\Psi\|^2+\|\mathbf{A}_t\|^2 \quad (1.7.18)$$

式(1.7.14)两边乘以它们自己,分部积分可得

$$\|\mathbf{A}_t\|^2+\|\Delta\mathbf{A}\|^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|\mathrm{div}\ \mathbf{A}\|^2+\|\mathrm{curl}\ \mathbf{A}\|^2]=$$

$$\frac{1}{4}\int_\Omega[\Psi^*D_A\Psi+\Psi(D_A\Psi)^*]^2\mathrm{d}x\leqslant\|D_A\Psi\|^2 \quad (1.7.19)$$

最后不等式来自$|\Psi(0)|\leqslant 1, x\in\Omega$。由此可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|\mathrm{div}\ \mathbf{A}\|^2+\|\mathrm{curl}\ \mathbf{A}\|^2+\eta\|\Psi\|^2]+$$

$$\|\mathbf{A}_t\|^2+\|\Delta\mathbf{A}\|^2+\|D_A\Psi\|^2\leqslant C|\Omega| \quad (1.7.20)$$

式(1.7.13)乘以$2\Psi_t^*$,式(1.7.14)乘以$\mathbf{A}_t$,分部积分后相加可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|\mathrm{div}\ \mathbf{A}\|^2+\|\mathrm{curl}\ \mathbf{A}\|^2+\frac{1}{2}\|\Psi\|_4^4-\|\Psi\|^2+$$

$$\|D_A\Psi\|^2]\leqslant-2\eta\|\Psi_t\|^2-2\|\mathbf{A}_t\|^2+$$

$$\mathrm{i}\eta k\int_\Omega\mathrm{div}\ \mathbf{A}(\Psi^*\Psi_t-\Psi\Psi_t^*)\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\frac{4k^2}{\eta}\|\mathrm{div}\ \mathbf{A}\|^2-\eta\|\Psi_t\|^2-2\|\mathbf{A}_t\|^2 \quad (1.7.21)$$

注意到

$$\|\nabla\mathbf{A}\|\leqslant C\|\mathbf{A}\|^{\frac{1}{2}}\|\Delta\mathbf{A}\|^{\frac{1}{2}}\leqslant C\|\nabla\mathbf{A}\|^{\frac{1}{2}}\|\Delta\mathbf{A}\|^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\mathrm{div}\ \mathbf{A}\|^2+\|\mathrm{curl}\ \mathbf{A}\|^2\leqslant C\|\nabla\mathbf{A}\|,$$

可得

$$(\|\mathrm{div}\ \mathbf{A}\|^2+\|\mathrm{curl}\ \mathbf{A}\|^2)\leqslant K_2\|\Delta\mathbf{A}\|$$

于是由式(1.7.17)～(1.7.19)和式(1.7.21)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[C\eta\|\boldsymbol{\Psi}\|^2 + C_1\|\mathrm{div}\ \mathbf{A}\|^2 + \|\mathrm{curl}\ \mathbf{A}\|^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\Psi}\|_4^4 - \|\boldsymbol{\Psi}\|^2 + \|D_A\boldsymbol{\Psi}\|^2] + C_2[C\eta\|\boldsymbol{\Psi}\|^2 + C_1\|\mathrm{div}\ \mathbf{A}\|^2 + \|\mathrm{curl}\ \mathbf{A}\|^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\Psi}\|_4^4 - \|\boldsymbol{\Psi}\|^2 + \|D_A\boldsymbol{\Psi}\|^2] + C_3[\eta\|\boldsymbol{\Psi}_t\|^2 + \|\mathbf{A}_t\|^2] \leqslant C|\Omega| \tag{1.7.22}$$

由 Gronwall 不等式得

$$C\eta\|\boldsymbol{\Psi}\|^2 + C_1\|\mathrm{div}\ \mathbf{A}\|^2 + \|\mathrm{curl}\ \mathbf{A}\|^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\Psi}\|_4^4 - \|\boldsymbol{\Psi}\|^2 + \|D_A\boldsymbol{\Psi}\|^2 \leqslant \mathrm{e}^{-C_2t}[C\eta\|\boldsymbol{\Psi}_0\|^2 + C_1\|\nabla\mathbf{A}_0\|^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\Psi}_0\|_4^4 - \|\boldsymbol{\Psi}_0\|^2 + \|D_A\boldsymbol{\Psi}_0\|^2] + C|\Omega|(1 - \mathrm{e}^{-C_2t}) \tag{1.7.23}$$

选取 t_0 充分大，则对 $t \geqslant t_0$ 有

$$C\eta\|\boldsymbol{\Psi}\|^2 + C_1\|\mathrm{div}\ \mathbf{A}\|^2 + \|\mathrm{curl}\ \mathbf{A}\|^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\Psi}\|_4^4 - \|\boldsymbol{\Psi}\|^2 + \|D_A\boldsymbol{\Psi}\|^2 \leqslant C|\Omega| \tag{1.7.24}$$

其中常数 C 与初值 $\boldsymbol{\Psi}_0$，$\mathbf{A}_0$ 无关。因此，对 $t \geqslant t_0$，$(\|\mathrm{div}\ \mathbf{A}(t)\|^2 + \|\mathrm{curl}\ \mathbf{A}(t)\|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant K_3$。注意到

$$\|D_A\boldsymbol{\Psi}\| \geqslant \frac{1}{k}\|\nabla\boldsymbol{\Psi}\| - \|\mathbf{A}\|,$$

即

$$\frac{1}{k}\|\nabla\boldsymbol{\Psi}\| \leqslant \|D_A\boldsymbol{\Psi}\| + \|\mathbf{A}\|, \forall t \geqslant t_0$$

因此

$$\|\nabla\boldsymbol{\Psi}\| \leqslant K_4$$

进一步，由式(1.7.22)有

$$\int_t^{t+1}[\|\boldsymbol{\Psi}_s(s)\|^2 + \|\mathbf{A}_s(s)\|^2]\mathrm{d}s \leqslant K_5, t \geqslant t_0 \tag{1.7.25}$$

由此可知

$$B = \{(\Psi, \mathrm{A}) \in \mathscr{H}^1 \times H^1 | \|\Psi\| \leqslant 1, \|\nabla \Psi\| \leqslant K_1,$$

$$(\|\mathrm{div}\ \mathbf{A}(t)\|^2 + \|\mathrm{curl}\ \mathbf{A}(t)\|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant K_3\}$$

为方程(1.7.13)、(1.7.14)在$\mathscr{H}^1 \times H^1$中的吸收集。为了证明B的ω极限集是问题(1.7.13)、(1.7.14)、(1.7.3)、(1.7.4)在$\mathscr{H}^1 \times H^1$中，$|\Psi| \leqslant 1$的吸引子，为此，必须证明吸收集的紧性。注意到

$$(D_A^2\Psi, \Psi^*) = (D_A\Psi, (D_A\Psi^*))$$

$$(D_A^2\Psi)_t = D_A^2\Psi_t + D_A(\mathbf{A}_t\Psi) + \mathbf{A}_t D_A\Psi$$

式(1.7.13)对t微分，乘以Ψ_t^*，分部积分后再取实部得

$$\frac{\eta}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Psi_t\|^2 - \eta k \mathrm{Im}\int_\Omega (\mathrm{div}\ \mathbf{A}_t)\Psi\Psi_t^* \mathrm{d}x + \|D_A\Psi_t\|^2 +$$
$$\int_\Omega \mathbf{A}_t\Psi(D_A\Psi_t)^* \mathrm{d}x + \int_\Omega (D_A\Psi)(\mathbf{A}_t\Psi_t)^* \mathrm{d}x -$$
$$\|\Psi_t\|^2 + \int_\Omega |\Psi|^2|\Psi_t|^2 \mathrm{d}x \leqslant 0 \tag{1.7.26}$$

由此可得

$$\frac{\eta}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Psi_t\|^2 + \|D_A\Psi_t\|^2 + \int \Omega|\Psi|^2|\Psi_t|^2 \mathrm{d}x \leqslant$$
$$\|\Psi_t\|^2 + \eta k\|\nabla \mathbf{A}_t\|\|\Psi_t\| -$$
$$\int_\Omega \mathbf{A}_t\Psi(D_A\Psi_t)^* \mathrm{d}x - \int_\Omega (D_A\Psi)(\mathbf{A}_t\Psi_t)^* \mathrm{d}x \tag{1.7.27}$$

同理，式(1.7.14)对t微分，乘以$\mathbf{A}_t$，分部积分可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{A}_t\|^2 + \|\nabla \mathbf{A}_t\|^2 = -\mathrm{Re}\int_\Omega (D_A\Psi)^*(\mathbf{A}_t\Psi_t)\mathrm{d}x -$$
$$\mathrm{Re}\int_\Omega (\mathbf{A}_t\Psi)^*(D_A\Psi + \mathbf{A}_t\Psi)\mathrm{d}x \leqslant$$
$$\|D_A\Psi\|\|\mathbf{A}_t\Psi_t\| + \|\mathbf{A}_t\Psi\|\|D_A\Psi_t\| - \|\mathbf{A}_t\Psi\|^2 \tag{1.7.28}$$

由此可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{A}_t\|^2 + \|\nabla \mathbf{A}_t\|^2 + \|\mathbf{A}_t\Psi\|^2 \leqslant$$

$$\|D_A\Psi\|\|\mathbf{A}_t\Psi_t\| + \|\mathbf{A}_t\Psi\|\|D_A\Psi_t\| \tag{1.7.29}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\eta\|\Psi_t\|^2 + \|\mathbf{A}_t\|^2] + \|D_A\Psi_t\|^2 + \|\nabla\mathbf{A}_t\|^2 +$$

$$\|\mathbf{A}_t\Psi\|^2 \leqslant C(\|\mathbf{A}_t\|^2 + \|\Psi_t\|^2) \tag{1.7.30}$$

由一致 Gronwall 不等式和式(1.7.20)可得

$$\|\mathbf{A}_t\| \leqslant K_6, \quad \|\Psi_t\| \leqslant K_6, \quad t > 1 \tag{1.7.31}$$

由此推得 H^2 模的有界性

$$\|\mathbf{A}\|_{H^2} \leqslant K_7, \quad \|\Psi\|_{H^2} \leqslant K_7, \quad t > 1 \tag{1.7.32}$$

令半群 $S(t)$ 为

$$S(t):\mathscr{H}^1 \times H^1 \rightarrow \mathscr{H}^1 \times H^1, \text{使得 } S(t)(\Psi_0,\mathbf{A}_0) = (\Psi(t),\mathbf{A}(t))$$

其中 $(\Psi(t),\mathbf{A}(t))$ 为问题(1.7.13)、(1.7.14)、(1.7.3)、(1.7.4)具初值 $(\Psi_0,\mathbf{A}_0)$ 的解。由 Sobolev 嵌入定理可知，$\bigcup\limits_{t>1}S(t)B$ 在 $\mathscr{H}^1\times H^1$ 中是紧的。且 B 的 ω 极限集

$$\mathscr{A} = \omega(B) = \bigcap_{s\geqslant 0}\bigcup_{t\geqslant s}\overline{S(t)B}$$

为在 $\mathscr{H}^1\times H^1$ 中、$|\Psi|\leqslant 1$ 的吸引子。于是有

定理1.7.1 设 $|\Psi_0|\leqslant 1$、$x\in\Omega$。在瞬时规范 $\Phi=\mathrm{div}\,\mathbf{A}$ 下，问题(1.7.1)～(1.7.4)在 $\mathscr{H}^1\times H^1$ 中具有吸引子。

现估计吸引子 $\mathscr{A}$ 的维数。令 $u(t)=(\Psi(t),\mathbf{A}(t))$，$u_0=(\Psi(0)_0,\mathbf{A}(0))$。式(1.7.13)、(1.7.14)的变分方程为

$$V_t + L(u)V = 0, V(x,0) = V_0(x),$$

$$(x,t) \in \Omega \times \mathbf{R}^+, \quad V \in \mathscr{H}^1 \times H^1 \tag{1.7.33}$$

具初始条件

$$V(x,0) = V_0(x), \quad x \in \Omega \tag{1.7.34}$$

其中 $V=(\Psi,\mathbf{E})$，$L(u)V=(L_1,L_2)$，

$$L_1 = \mathrm{i}k(\mathrm{div}\,\mathbf{A})\Psi - \mathrm{i}k(\mathrm{div}\,\mathbf{E})\Psi +$$

$$\frac{1}{\eta}[D_A\Psi + \frac{\mathrm{i}}{k}\nabla(\mathbf{E}\Psi) + \frac{\mathrm{i}}{k}\mathbf{E}\cdot\Psi + 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}\Psi -$$

$$\Psi + |\Psi|^2\Psi + 2\Psi^2\Psi^* + 2|\Psi|^2\Psi] \tag{1.7.35}$$

$$L_2 = \frac{1}{2}[\Psi^* D_A\Psi + \Psi^* D_A\Psi + E\Psi + \Psi D_A\Psi^* +$$

$$\Psi D_A^* \Psi + E\Psi^*] \tag{1.7.36}$$

容易看到，当 $V_0(x) \in \mathscr{H}^1 \times H^1$ 时，存在问题(1.7.13)的唯一整体解，使得

$$V(x,t) \in L^\infty([0,\infty), \mathscr{H}^1 \times H^1) \cap L^\infty((0,\infty); \mathscr{H}^2 \times H^2)$$

以 $V_i(t)$ 表示式(1.7.33)具初值 $V_i(0)=\xi_i(i=1,2,\cdots,N)$ 的解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N \in L^2$ 为线性无关。$Q_N(t)$ 表示由 L^2 到 $V_1(t),V_2(t),\cdots,V_N(t)$ 所张成的子空间上的正交投影。令

$$q_N = \lim_{t\to\infty} \sup_{u_0 \in \mathscr{A}} (\sup_{\substack{\xi_i \in L^2 \\ |\xi_i|=1}} \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{tr}(L(u(s))Q_N(s))\mathrm{d}s)$$

其中 tr 表示算子的迹。为了估计整体吸引子 $\mathscr{A}$ 的维数，我们需要如下引理．

引理1.7.1[244]　设 $\mathscr{A}$ 为问题(1.7.13)、(1.7.3)、(1.7.4)的整体吸引子，$q_N>0$ 对某 N，则 $\mathscr{A}$ 的 Hausdorff 维数

$$d_H(\mathscr{A}) \leqslant N$$

$\mathscr{A}$ 的分形维数

$$d_F(\mathscr{A}) \leqslant N(1 + \max_{1\leqslant j\leqslant N} - \frac{q_j}{q_N})$$

引理1.7.2[80]　设 $\Phi_j \in H^m, 1\leqslant j\leqslant N$ 在 L^2 中正交，对几乎一切 $x \in \Omega$，置

$$\rho(\gamma) = \sum_{j=1}^N |\Psi_j(x)|^2$$

则对任何 p，满足

$$1 < p \leqslant 1 + \frac{1}{2m}$$

存在常数 K 使得

$$(\int_\Omega \rho(x)^{\frac{p}{p-1}}\mathrm{d}x)^{2m(p-1)} \leqslant K\sum_{j=1}^N \int_\Omega |D^m\Phi_j|^2\mathrm{d}x$$

常数 K 依赖于 m,p,但不依赖于 Φ_j 和 N。

我们估计 tr $(L(u)Q_N(t))$。设 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_N\in\mathscr{H}^1\times H^1$ 为

$$\{V_1(t),V_2(t),\cdots,V_N(t)\}$$

的标准正交基。我们有

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}(L(u)Q_N(t))=\sum_{j=1}^{N}(L(u(t))\phi_j,\phi_j)\geqslant\\
&\sum_{j=1}^{N}\{(\frac{1}{\eta k^2}\cdot\|\nabla\phi_j\|^2+\|\mathrm{div}\ E_j\|^2+\|\mathrm{curl}\ E_j\|^2)-\\
&k\|\nabla E_j\|\|\phi_j\|-(2k+\frac{1}{k\eta})\|\mathbf{A}\|_\infty\|\phi_j\|\,|\nabla\phi_j\|-\\
&\frac{1}{k\eta}\|E_j\|\|\nabla\phi_j\|-\frac{1}{k\eta}\|\mathbf{A}\|_\infty\|\nabla\phi_j\|\|\phi_j\|-\\
&\frac{1}{k\eta}\|E_j\|\|\nabla\phi_j\|_4\|\phi_j\|_4-\frac{2}{\eta}\|\mathbf{A}\|_\infty\|E_j\|\|\phi_j\|-\\
&\frac{1}{\eta}\|\mathbf{A}\|_\infty^2\|\phi_j\|^2+\frac{5}{\eta}\|\phi_j\|^2-\frac{1}{k}\|\nabla\Psi\|_4\|\phi_j\|_4\|E_j\|-\\
&\frac{1}{k}\|\nabla\Psi_j\|\|E_j\|-2\|\phi_j\|_4\|\mathbf{A}\|_4\|E_j\|-\\
&2\|\phi_j\|\|\mathbf{A}\|_\infty\|E_j\|\}>\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}(\frac{1}{\eta k^2}\|\nabla\phi_j\|^2+\\
&\|\mathrm{div}\ E_j\|^2+\|\mathrm{curl}\ E_j\|^2)-C\sum_{j=1}^{N}(\frac{1}{\eta k^2}\|\phi_j\|^2+\|E_j\|^2)
\end{aligned}\tag{1.7.37}$$

令 $\rho(x)=\sum_{j=1}^{N}(\frac{1}{\eta k^2}\|\Phi_j\|^2+\|E_j\|^2)$。应用引理1.7.2,对 $N=3$ 有

$$\begin{aligned}\int_\Omega\rho(x)^{\frac{2}{5}}\mathrm{d}x\leqslant k_1\{\sum_{j=1}^{N}(\frac{1}{\eta k^2}\|\nabla\Phi_j\|^2+\\
\|\mathrm{div}\ E_j\|^2+\|\mathrm{curl}\ E_j\|^2)\}\end{aligned}\tag{1.7.38}$$

因此

$$\operatorname{tr}(L(u)Q_N(t))\geqslant\frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{N}(\frac{1}{\eta k^2}\|\nabla\Psi_j\|^2+$$

$$\|\mathrm{div}\ E_j\|^2 + \|\mathrm{curl}\ E_j\|^2) - C\int_\Omega \rho(x)\mathrm{d}x \geqslant$$

$$\frac{1}{4}(\sum_{j=1}^N(\frac{1}{\eta k^2}\|\nabla\Psi_j\|^2 + \|\mathrm{div}\ E_j\|^2 + \|\mathrm{curl}\ E_j\|^2) -$$

$$C(\eta,k,A_1,A_2,A_3) = \sum_{j=1}^N(\frac{1}{\eta k^2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N) +$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_N] - C(\eta,k,A_1,A_2,A_3) \qquad (1.7.39)$$

其中 $\alpha_i,\mu_i(i=1,2,\cdots,N)$分别为 Δ 在空间 $\mathscr{H}$ 和 H_n^1 上的特征值。选取 N_0充分大，使得

$$\mathrm{tr}\ (L(u)Q_N(t)) \geqslant \sum_{j=1}^N(\frac{1}{\eta k^2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N) +$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_N] - C(\eta,k,A_1,A_2,A_3) \geqslant 0$$

$$(1.7.40)$$

则由文献[80]中的定理可知，问题(1.7.1)～(1.7.4)在瞬时规范下，它的 Hausdorff 和分形维数是有限的。

$$d_\mathrm{H}(\omega(B)) \leqslant N_0, d_\mathrm{F}(\omega(B)) \leqslant 2N_0 \qquad (1.7.41)$$

我们有定理

定理1.7.2 在定理1.7.1的假设下，问题(1.7.1)～(1.7.4)在瞬时规范下吸引子具有有限的 Hausdorff 和分形维数。此时问题(1.7.1)～(1.7.4)的长时间行态能为有限的参数所决定。

1.8 Landau-Lifshitz-Maxwell 方程

1935年，Landau-Lifshitz 在文献[68]中提出了如下的具电磁场的铁磁链耦合方程组

$$z_t = \lambda_1 z \times (\Delta z + \boldsymbol{H}) - \lambda_2 z \times (z \times (\Delta z + \boldsymbol{H})) \qquad (1.8.1)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \sigma E \qquad (1.8.2)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \beta\frac{\partial z}{\partial t}, \qquad (1.8.3)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} + \beta \nabla \cdot \boldsymbol{z} = 0, \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{1.8.4}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \sigma, \beta$ 为常数，$\lambda_2 \geqslant 0, \sigma \geqslant 0$。未知向量值函数 $\boldsymbol{z}(x,t) = (z_1(x,t), z_2(x,t), z_3(x,t))$ 表示磁化强度，$\boldsymbol{H}(x,t) = (H_1(x,t), H_2(x,t), H_3(x,t))$ 表示磁场，$\boldsymbol{E}(x,t) = (\boldsymbol{E}_1(x,t), \boldsymbol{E}_2(x,t), \boldsymbol{E}_3(x,t))$ 表示电场，$\boldsymbol{H}^e = \Delta \boldsymbol{z} + \boldsymbol{H}$ 为有效磁场。$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$，$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$，“$\times$”表示在 R^3 中的向量叉积。

如果 $\boldsymbol{H} = 0, \boldsymbol{E} = 0$，我们则得到具 Gilbert 项的 Landau-Lifshitz 方程组

$$\boldsymbol{z}_t = \lambda_1 \boldsymbol{z} \times \Delta \boldsymbol{z} - \lambda_2 \boldsymbol{z} \times (\boldsymbol{z} \times \Delta \boldsymbol{z}) \tag{1.8.5}$$

其中 $\lambda_2 > 0$ 为 Gilbert 阻尼常数。1993年郭与洪，1995年郭与王，1996年陈与郭，1997年郭与丁分别在文献[69,70,71,72]中，对于方程组(1.8.5)的解的性质作了系统的研究。特别，在文献[69]中发现了在 Riemann 流形上调和映照和(1.8.5)解的密切联系。当 $\lambda_2 = 0$ 时，方程组(1.8.5)变成

$$\boldsymbol{z}_t = \lambda_1 \boldsymbol{z} \times \Delta \boldsymbol{z} \tag{1.8.6}$$

在空间一维时，它是可积系统，具有孤立子解。Nakamura K，Lakshmanan M，Zakharov V E 等在文献[73,74,75]中分别对于孤立子及其相互作用，无穷守恒律，散射反演法等作了详细的研究。自1982年以来，周、郭在文献[76]中对方程组(1.8.6)各种定解问题(包括空间一维及多维初值问题、线性边值和非线性边值问题)进行系统的深入的研究，特别1991年周、郭、谭在文献[77]中证明了光滑解的存在唯一性(空间一维)。

我们在文献[54]中考虑方程组(1.8.1)～(1.8.4)具如下周期初值条件的整体吸引子的存在性及其维数估计问题

$$\boldsymbol{z}(x + 2De_i, t) = \boldsymbol{z}(x,t), \boldsymbol{H}(x + 2De_i, t) = \boldsymbol{H}(x,t),$$

$$\boldsymbol{E}(x + 2De_i, t) = \boldsymbol{E}(x,t), \ (x \in \Omega, t \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.8.7}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{z}(x,0)=\boldsymbol{z}_0(x),\boldsymbol{H}(x,0)=\boldsymbol{H}_0(x),\\&\boldsymbol{E}(x,0)=\boldsymbol{E}_0(x),(x\in\Omega)\end{aligned}\tag{1.8.8}$$

其中 $x+2D\boldsymbol{e}_i=(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i+2D,x_{i+1},\cdots,x_n)$，$(i=1,2,\cdots,n)$，$D>0$，$\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为 n 维具边长为$2D$ 的立方体。

以下作一致性先验估计

引理1.8.1 设$|\boldsymbol{z}_0(x)|=1$。则对于周期初值问题(1.8.1)～(1.8.4)，(1.8.7)、(1.8.8)的光滑解，有

$$|\boldsymbol{z}(x,t)|=1,x\in\Omega,t\geqslant0\tag{1.8.9}$$

证明 $\boldsymbol{z}$ 和方程(1.8.1)作点积得

$$\frac{\partial}{\partial t}|\boldsymbol{z}(x,t)|^2=0$$

即得引理。

引理1.8.2 设 $\lambda_2>0$，$\beta>0$，$\sigma\geqslant0$，$\nabla\boldsymbol{z}_0(x)\in L_2(\Omega)$，$\boldsymbol{E}_0(x)\in L_2(\Omega)$，$\boldsymbol{H}_0(x)\in L_2(\Omega)$。则有估计

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leqslant t<\infty}[\|\nabla\boldsymbol{z}(\cdot,t)\|_2^2+\|\boldsymbol{E}(\cdot,t)\|_2^2+\|\boldsymbol{H}(\cdot,t)\|_2^2]\leqslant K_1,\\&\int_0^\infty\|\boldsymbol{z}\times(\Delta\boldsymbol{z}+\boldsymbol{H})\|_2^2\mathrm{d}t\leqslant K_2\end{aligned}\tag{1.8.10}$$

其中常数 K_1和 K_2仅依赖于$\|\nabla\boldsymbol{z}_0(x)\|_2$，$\|\boldsymbol{E}_0(x)\|_2$和$\|\boldsymbol{H}_0(x)\|_2$。

证明 $\boldsymbol{E}$ 和式(1.8.2)作点积，$-\boldsymbol{H}$ 和式(1.8.3)点积，相加后可得

$$\begin{aligned}&(\nabla\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{E}-(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{H}=\\&\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E}+\sigma|\boldsymbol{E}|^2+\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{H}+\beta\frac{\partial\boldsymbol{z}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{H}\end{aligned}\tag{1.8.11}$$

利用向量公式

$$(\nabla\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{E}-(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{H}=\nabla\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{E})\tag{1.8.12}$$

式(1.8.11)在 Ω 上积分可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\boldsymbol{E}\|_2^2+\|\boldsymbol{H}\|_2^2)+\sigma\|\boldsymbol{E}\|_2^2+\beta\int_\Omega\frac{\partial\boldsymbol{z}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{H}\mathrm{d}x=0\tag{1.8.13}$$

$(\Delta z+H)$和式(1.8.1)作点积得

$$(\Delta z + H)\cdot\frac{\partial z}{\partial t} = -\lambda_2(\Delta z + H)\cdot[z\times(z\times(\Delta z + H))] \tag{1.8.14}$$

其中

$$-(\Delta z + H)\cdot[z\times(z\times(\Delta z - H))] = |z\times(\Delta z + H)|^2 \tag{1.8.15}$$

式(1.8.14)在Ω上积分得

$$\int_\Omega(\Delta z + H)\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\mathrm{d}x = \lambda_2\int_\Omega|z\times(\Delta z + H)|^2\mathrm{d}x,$$

$$\int_\Omega\frac{\partial z}{\partial t}\cdot H\mathrm{d}x = -\int_\Omega\Delta z\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\mathrm{d}x + \lambda_2\int_\Omega|z\times(\Delta z + H)|^2\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla z\|_2^2 + \lambda_2\int_\Omega|z\times(\Delta z + H)|^2\mathrm{d}x \tag{1.8.16}$$

式(1.8.13)+式(1.8.16)得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|E\|_2^2 + \|H\|_2^2) + \sigma\|E\|_2^2 +$$

$$\frac{\beta}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla z\|_2^2 + \beta\lambda_2\|z\times(\Delta z + H)\|_2^2 = 0 \tag{1.8.17}$$

上式对$t\in[0,T]$积分可得

$$\varepsilon(t) \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{1}{2}(\|E(\cdot,t)\|_2^2 + \|H(\cdot,t)\|_2^2) +$$

$$\sigma\int_0^t\|E(\cdot,t)\|_2^2 + \frac{\beta}{2}\|\nabla z(\cdot,t)\|_2^2 +$$

$$\beta\lambda_2\int_0^t\|z\times(\Delta z + H)|_2^2\mathrm{d}t = \varepsilon(0) = \frac{1}{2}(\|E_0(x)\|_2^2 +$$

$$\|H_0(x)\|_2^2) + \sigma\|E_0(x)\|_2^2 + \frac{\beta}{2}\|\nabla z_0(x)\|_2^2$$

因此估计式(1.8.10)成立。

为了得到$(z,H,E)\in(H^2(\Omega),H^1(\Omega),H^1(\Omega))$对$t$的一致先

验估计，首先变换方程组(1.8.2)、(1.8.3)为等价的二阶波动方程组。

事实上，以$\nabla\times$作用于式(1.8.2)和式(1.8.3)得

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{H})=\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{E}+\sigma\nabla\times\boldsymbol{E},$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{H}-\beta\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{z}$$

由向量运算公式得

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{H})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{H})-\Delta\boldsymbol{H}=-\beta\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{z})-\Delta\boldsymbol{H},$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\Delta\boldsymbol{E}=-\Delta\boldsymbol{E}$$

则有

$$-\beta\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{z})-\Delta\boldsymbol{H}=\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{E}+\sigma\nabla\times\boldsymbol{E}=$$

$$-\boldsymbol{H}_{tt}-\beta\boldsymbol{z}_{tt}-\sigma\boldsymbol{H}_t-\sigma\beta\boldsymbol{z}_t,$$

$$-\Delta\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{H}-\beta\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{z}=-\boldsymbol{E}_{tt}-$$

$$\sigma\boldsymbol{E}_t-\beta(\nabla\times\boldsymbol{z})_t$$

即有

$$\boldsymbol{H}_{tt}-\Delta\boldsymbol{H}+\beta\boldsymbol{z}_{tt}+\sigma\boldsymbol{H}_t+\sigma\beta\boldsymbol{z}_t-\beta\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{z})=0 \tag{1.8.18}$$

$$\boldsymbol{E}_{tt}-\Delta\boldsymbol{E}+\sigma\boldsymbol{E}_t+\beta(\nabla\times\boldsymbol{z})_t=0 \tag{1.8.19}$$

直接从式(1.8.1)、(1.8.18)、(1.8.19)的解$(\boldsymbol{z},\boldsymbol{E},\boldsymbol{H})\in(H^2\times H^1\times H^1)$得到对$t$一致的先验估计是困难的。以下我们用具小参数的能量泛函的方法。

定义 Lyapunov 能量泛函为

$$e(t)=\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{H}_t\|_2^2+\|\nabla\boldsymbol{H}\|_2^2+\|\boldsymbol{E}_t\|_2^2+$$

$$\|\nabla\boldsymbol{E}\|_2^2+\|\Delta\boldsymbol{z}\|_2^2)+\eta_1(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}_t)+\eta_2(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}_t) \tag{1.8.20}$$

其中 η_1,η_2为待定常数。我们能证 $e(t)$满足如下微分不等式

$$\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+ae(t)\leqslant K \tag{1.8.21}$$

其中常数 $a>0$,K 与 t 无关。这就给出了 $e(t)$的先验估计,从而 $(\boldsymbol{H},\boldsymbol{E},\boldsymbol{z})\in(H^1,H^1,H^1)$的估计也就得到。

事实上,从式(1.8.18)、(1.8.19)有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}=&(\boldsymbol{H}_t,\boldsymbol{H}_{tt})+(\nabla\boldsymbol{H},\nabla\boldsymbol{H}_t)+(\boldsymbol{E}_t,\boldsymbol{E}_{tt})+\\&(\nabla\boldsymbol{E},\nabla\boldsymbol{E}_t)+(\Delta\boldsymbol{z},\Delta\boldsymbol{z}_t)+\eta_1(\boldsymbol{H}_t,\boldsymbol{H}_t)+\\&\eta_1(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}_{tt})+\eta_2(\boldsymbol{E}_t,\boldsymbol{E}_t)+\eta_2(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}_{tt})\end{aligned} \tag{1.8.22}$$

其中

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{H}_t,\boldsymbol{H}_{tt})=&(\boldsymbol{H}_t,\Delta\boldsymbol{H})-\beta(\boldsymbol{H}_t,\boldsymbol{z}_{tt})-\sigma(\boldsymbol{H}_t,\boldsymbol{H}_t)-\\&\sigma\beta(\boldsymbol{H}_t,\boldsymbol{z}_t)+\beta(\boldsymbol{H}_t,\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{z})),\\(\nabla\boldsymbol{H},\nabla\boldsymbol{H}_t)=&-(\Delta\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}_t),\\(\boldsymbol{E}_t,\boldsymbol{E}_{tt})=&(\boldsymbol{E}_t,\Delta\boldsymbol{E})-\sigma(\boldsymbol{E}_t,\boldsymbol{E}_t)-\beta(\boldsymbol{E}_t,(\nabla\times\boldsymbol{z})_t),\\(\nabla\boldsymbol{E},\nabla\boldsymbol{E}_t)=&(-\Delta\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}_t),\\(\Delta\boldsymbol{z},\Delta\boldsymbol{z}_t)=&\lambda_1(\Delta(\boldsymbol{z}\times\Delta\boldsymbol{z}),\Delta\boldsymbol{z})+\lambda_1(\Delta(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{H}),\Delta\boldsymbol{z})+\\&\lambda_2(\Delta(|\nabla\boldsymbol{z}|^2\boldsymbol{z}),\Delta\boldsymbol{z})+\lambda_2(\Delta^2\boldsymbol{z},\Delta\boldsymbol{z})+\\&\lambda_2(\Delta\boldsymbol{H},\Delta\boldsymbol{z})-\lambda_2(\Delta(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{H})\boldsymbol{z},\Delta\boldsymbol{z}),\\\eta_1(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}_{tt})=&-\eta_1\|\nabla\boldsymbol{H}\|_2^2-\beta\eta_1(\boldsymbol{H},\boldsymbol{z}_{tt})-\sigma\eta_1(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}_t)-\\&\sigma\beta\eta_1(\boldsymbol{H},\boldsymbol{z}_t)+\eta_1\beta(\boldsymbol{H},\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{z})),\\\eta_2(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}_{tt})=&-\eta_2\|\nabla\boldsymbol{E}\|_2^2-\eta_2\sigma(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}_t)-\eta_2\beta(\boldsymbol{E},(\nabla\times\boldsymbol{z})_t)\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}=&-(\sigma-\eta_1)\|\boldsymbol{H}_t\|_2^2-(\sigma-\eta_2)\|\boldsymbol{E}_t\|_2^2-\\&\eta_1\|\nabla\boldsymbol{H}\|_2^2-\eta_2\|\nabla\boldsymbol{E}\|_2^2-\lambda_2\|\nabla\Delta\boldsymbol{z}\|_2^2-\\&\beta\eta_1(\boldsymbol{H},\boldsymbol{z}_{tt})-\eta_1\sigma(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}_t)-\sigma\beta\eta_1(\boldsymbol{H},\boldsymbol{z}_t)-\\&\eta_2\sigma(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}_t)-\eta_2\beta(\boldsymbol{E},(\nabla\times\boldsymbol{z})_t)+\end{aligned}$$

$$\beta(\boldsymbol{H},\nabla(\nabla\cdot z))+\eta_1\beta(\boldsymbol{H},\nabla(\nabla\cdot z))-$$

$$\beta(\boldsymbol{H}_t,z_{tt})-\sigma\beta(\boldsymbol{H}_t,z_t)-\beta(\boldsymbol{E}_t,(\nabla\times z)_t)+$$

$$\lambda_1(\Delta(z\times\Delta z),\Delta z)+\lambda_1(\Delta(z\times\boldsymbol{H}),\Delta z)+$$

$$\lambda_2(\Delta(|\nabla z|^2 z,\Delta z)+\lambda_2(\Delta z,\Delta\boldsymbol{H})-\lambda_2(\Delta(z\cdot\boldsymbol{H})z,\Delta z) \tag{1.8.23}$$

其中

$$(\boldsymbol{H},z_{tt})=(\boldsymbol{H},z_t)_t-(\boldsymbol{H}_t,z_t),$$

$$(\boldsymbol{H}_t,z_{tt})=(\boldsymbol{H}_t,z_t)_t-(z_t,\Delta\boldsymbol{H}-\beta z_{tt}-\sigma\boldsymbol{H}_t-\sigma\beta z_t+$$

$$\beta\nabla(\nabla\cdot z))=(\boldsymbol{H}_t,z_t)_t+\frac{\beta}{2}(z_t,z_t)_t-(z_t,\Delta\boldsymbol{H})+$$

$$\sigma(z_t,\boldsymbol{H}_t)+\sigma\beta\|z_t\|_2^2-\beta(z_t,\nabla(\nabla\cdot z)),$$

$$\beta(\boldsymbol{E}_t,(\nabla\times z)_t)=\beta(\boldsymbol{E}_t,\nabla\times z)_t+\frac{\beta^2}{2}(\nabla\times z,\nabla\times z)_t+$$

$$\sigma\beta(\boldsymbol{E}_t,\nabla\times z)+\beta(\nabla\boldsymbol{E},\nabla(\nabla\times z)),$$

$$\eta_2\beta(\boldsymbol{E},(\nabla\times z)_t)=\eta_2\beta(\boldsymbol{E},\nabla\times z)_t-\eta_2\beta(\boldsymbol{E}_t,\nabla\times z)$$

置

$$e_1(t)=\frac{1}{2}G(t)+R(t)$$

其中

$$G(t)\overset{\text{def}}{=}\|\boldsymbol{E}_t\|_2^2+\|\boldsymbol{H}_t\|_2^2+|\nabla\boldsymbol{E}\|_2^2+\|\nabla\boldsymbol{H}\|_2^2+$$

$$\|\Delta z\|_2^2=2e(t)-2\eta_1(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}_t)-2\eta_2(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}_t),$$

$$R(t)\overset{\text{def}}{=}\beta(z_t,\boldsymbol{H}_t)+\frac{\beta^2}{2}\|z_t\|_2^2+\beta(\boldsymbol{E}_t,\nabla\times z)$$

$$+\frac{\beta^2}{2}\|\nabla\times z\|_2^2-\eta_2\beta(\boldsymbol{E},\nabla\times z)+\frac{1}{2}\sigma\eta_1\|\boldsymbol{H}\|_2^2+$$

$$\frac{1}{2}\sigma\eta_2\|\boldsymbol{E}\|_2^2+\eta_2\beta(\boldsymbol{E},\nabla\times z)+$$

$$\eta_2(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}_t)+\eta_1(\boldsymbol{H},vh_t) \tag{1.8.24}$$

由此推出

$$\frac{de_1(t)}{dt}+(\sigma-\eta_1)\|\boldsymbol{H}_t\|_2^2+(\sigma-\eta_2)\|\boldsymbol{E}_t\|_2^2+\eta_1\|\nabla \boldsymbol{H}\|_2^2+$$

$$\eta_2\|\nabla \boldsymbol{E}\|_2^2+\lambda_2\|\nabla\Delta z\|_2^2+\sigma\beta^2\|z_t\|^2=$$

$$-(2\sigma\beta-\eta_1\beta)(z_t,\boldsymbol{H}_t)+\beta(z_t,\Delta\boldsymbol{H})-$$

$$(\sigma-\eta_2)\beta(\boldsymbol{E}_t,\nabla\times z)-\beta(\nabla\boldsymbol{E},\nabla(\nabla\times z))+$$

$$\lambda_1(\Delta(z\times\Delta z),\Delta z)+\lambda_1(\Delta(z\times\boldsymbol{H}),\Delta z)+$$

$$\lambda_2(\Delta(|\nabla z|^2 z),\Delta z)+\lambda_2(\Delta z,\Delta\boldsymbol{H})-\lambda_2(\Delta(z\cdot\boldsymbol{H})z,\Delta z)-$$

$$\sigma\beta\eta_1(\boldsymbol{H},z_t)+\beta(\boldsymbol{H}_t,\nabla(\nabla,z))+$$

$$\eta_1\beta(\boldsymbol{H},\nabla(\nabla\cdot z))+\beta^2(z_t,\nabla(\nabla z))\tag{1.8.25}$$

为估计式(1.8.25)右端的项，我们需要多次利用 Sobolev 插值不等式。

(1) 从式(1.8.1)有

$$|z_t|^2=\lambda_1^2|z\times(\Delta z+\boldsymbol{H})|^2+$$

$$\lambda_2^2|z\times(z\times(\Delta z+\boldsymbol{H}))|^2\leqslant(\lambda_1^2+\lambda_2^2)|\Delta z+\boldsymbol{H}|^2$$

$$\leqslant 2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)(|\Delta z|^2+|\boldsymbol{H}|^2)$$

由 Sobolev 插值不等式和 Hölder 不等式有

$$|-(2\sigma\beta+\eta_1\beta)(z_t,\boldsymbol{H}_t)|\leqslant\varepsilon_1\|\boldsymbol{H}_t\|_2^2+$$

$$C(\varepsilon_1,\sigma,\beta,\eta_1)\|z_t\|_2^2\leqslant\varepsilon_1\|\boldsymbol{H}_t\|_2^2+2C(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\|\Delta z\|_2^2+$$

$$d_1\leqslant\varepsilon_1\|\boldsymbol{H}_t\|_2^2+\frac{\lambda_2}{l}\|\nabla\Delta z\|_2^2+d_2$$

其中 ε_1,l 为待定的正常数。

(2) 以∇作用于式(1.8.1)，得

$$\nabla z_t=\lambda_1\nabla z\times(\Delta z+\boldsymbol{H})-\lambda_1 z\times\nabla\Delta z-$$

$$\lambda_2\nabla z\times(z\times(\Delta z+\boldsymbol{H}))-\lambda_2 z\times(\nabla z\times(\Delta z+\boldsymbol{H}))-$$

$$\lambda_2 z\times(z\times\nabla\Delta z)-\lambda_2 z\times(z\times\nabla\boldsymbol{H}),$$

$$\beta(z_t,\Delta\boldsymbol{H})=-\beta(\nabla z_t,\nabla\boldsymbol{H})=$$

$$-\beta\lambda_1(\nabla z\times(\Delta z+\boldsymbol{H}),\nabla\boldsymbol{H})-\beta\lambda_1(z\times\nabla\Delta z,\nabla\boldsymbol{H})+$$

$$\lambda_2\beta(\nabla z \times (z \times \Delta z), \nabla \boldsymbol{H}) + \lambda_2\beta(\nabla z \times (z \times \boldsymbol{H}), \nabla \boldsymbol{H}) +$$

$$\lambda_2\beta(z \times (\nabla z \times \Delta z), \nabla \boldsymbol{H}) + \lambda_2\beta(z \times (\nabla z \times \boldsymbol{H}), \nabla \boldsymbol{H}) +$$

$$\lambda_2\beta(z \times (z \times \nabla \Delta z), \nabla \boldsymbol{H}) - \lambda_2\beta\|z \times \nabla \boldsymbol{H}\|_2^2 \leqslant$$

$$-\lambda_2\beta\|z \times \nabla \boldsymbol{H}\|_2^2 + (|\lambda_1| + 2\lambda_2)\beta\|\nabla z\|_\infty\|\Delta z\|_2\|\nabla \boldsymbol{H}\|_2 +$$

$$(|\lambda_1| + 2\lambda_2)\beta\|\nabla z\|_\infty\|\boldsymbol{H}\|_2\|\nabla \boldsymbol{H}\|_2\|\nabla \boldsymbol{H}\|_2 +$$

$$(|\lambda_1| + \lambda_2)\beta\|\nabla \Delta z\|_2\|\nabla \boldsymbol{H}\|_2 \leqslant$$

$$C_1(|\lambda_1| + 2\lambda_2)\beta\|\nabla z\|_2^{\frac{3}{2}-\frac{n}{4}}\|\nabla \Delta z\|_2^{\frac{1}{2}+\frac{n}{4}}\|\nabla \boldsymbol{H}\|_2 +$$

$$C_2(|\lambda_1| + 2\lambda_2)\beta\|\nabla \Delta z\|_2^{\frac{n}{2}}\|\nabla \boldsymbol{H}\|_2 +$$

$$\frac{(|\lambda_1| + \lambda_2)}{4}\|\nabla \Delta z\|_2^2 - (|\lambda_1| + \lambda_2)\beta^2\|\nabla \boldsymbol{H}\|_2^2 \leqslant$$

$$\frac{C_0^2}{\lambda_2}(|\lambda_1| - 2\lambda_2)^2\|\nabla z\|^{3-\frac{n}{2}}\|\nabla \Delta z\|^{1-\frac{n}{2}} + C_3\|\nabla \Delta z\|^{\frac{n}{2}} +$$

$$\frac{(|\lambda_1| + \lambda_2)}{4}\|\nabla \Delta z\|_2^2 + 2(|\lambda_1| + \lambda_2)\beta^2\|\nabla \boldsymbol{H}\|_2^2 \leqslant$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\lambda_2}{l} + \dfrac{(|\lambda_1| + \lambda_2)}{4}\right)\|\nabla \Delta z\|_2^2 + \\ 2(|\lambda_1| + \lambda_2)\beta^2\|\nabla \boldsymbol{H}\|_2^2 - C, \quad \text{当 } n = 1 \\ \left(\dfrac{\lambda_2}{l} + \dfrac{(|\lambda_1| + \lambda_2)}{4}\right) + \dfrac{C_0^2}{\lambda_2}(|\lambda_1| + 2\lambda_2)^2\|\nabla z\|_2^2)\|\nabla \Delta z\|_2^2 + \\ 2(|\lambda_1| + \lambda_2)\beta^2\|\nabla \boldsymbol{H}\|_2^2 + C \quad \text{当 } n = 2 \end{cases}$$

(3)

$$|-(\sigma + \eta_2)\beta(\boldsymbol{E}_t, \nabla \times z)| \leqslant$$
$$\epsilon_2\|\boldsymbol{E}_t\|_2^2 + C_1\|\nabla z\|_2^2 \leqslant \epsilon_2\|\boldsymbol{E}_t\|_2^2 + C_2$$

(4)

$$|-\beta(\nabla \boldsymbol{E}, \nabla(\nabla \times z))| \leqslant \frac{\lambda_2}{l}\|\nabla \Delta z\|_2^2 +$$

$$C_1\|\boldsymbol{E}\|_2^2 \leqslant \frac{\lambda_2}{l}\|\nabla\Delta \boldsymbol{z}\|_2^2 + C_2$$

(5)

$$|\lambda_1(\Delta(\boldsymbol{z}\times\Delta\boldsymbol{z}),\Delta\boldsymbol{z})| \leqslant |\lambda_1||(\nabla\boldsymbol{z}\times\Delta\boldsymbol{z},\nabla\Delta\boldsymbol{z})| \leqslant$$

$$|\lambda_1|\|\nabla\boldsymbol{z}\|_\infty\|\Delta\boldsymbol{z}\|_2\|\nabla\Delta\boldsymbol{z}\|_2^2 \leqslant$$

$$C_0|\lambda_1|\|\nabla\boldsymbol{z}\|_2^{\frac{3}{2}-\frac{n}{4}}\|\nabla\Delta\boldsymbol{z}\|_2^{\frac{3}{2}+\frac{n}{4}} \leqslant$$

$$\begin{cases}\dfrac{\lambda_2}{l}\|\nabla\Delta\boldsymbol{z}\|_2^2 + C, & n=1,\\ C_0|\lambda_1|\|\nabla\boldsymbol{z}\|_2\|\nabla\Delta\boldsymbol{z}\|_2^2, & n=2\end{cases}$$

(6)

$$|\lambda_1(\Delta(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{H}),\Delta\boldsymbol{z})| = |\lambda_1(\nabla(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{H}),\nabla\Delta\boldsymbol{z})| \leqslant$$

$$\|\nabla\boldsymbol{z}\|_\infty|\lambda_1|\|\boldsymbol{H}\|_2\|\nabla\Delta\boldsymbol{z}\|_2 + |\lambda_1|\|\nabla\boldsymbol{H}\|_2\|\nabla\Delta\boldsymbol{z}\|_2 \leqslant$$

$$\frac{\lambda_2}{4}\|\nabla\Delta\boldsymbol{z}\|_2^2 + \frac{2\lambda_1^2}{\lambda_2}\|\nabla\boldsymbol{H}\|_2^2 + C$$

(7)

$$|\lambda_2(\Delta(|\nabla\boldsymbol{z}|^2\boldsymbol{z}),\Delta\boldsymbol{z})| = |-\lambda_2(\nabla(|\nabla\boldsymbol{z}|^2\boldsymbol{z}),\nabla\Delta\boldsymbol{z})| \leqslant$$

$$\lambda_2\|\nabla\boldsymbol{z}\|_6^3\|\nabla\Delta\boldsymbol{z}\|_2 + C\lambda_2\|\nabla\boldsymbol{z}\|_\infty\|\nabla\Delta\boldsymbol{z}\|_2 \leqslant$$

$$C\lambda_2(\|\nabla\boldsymbol{z}\|^{3-\frac{n}{4}}\|\nabla\Delta\boldsymbol{z}\|_2^{1+\frac{n}{4}} + \|\nabla\boldsymbol{z}\|_2^{\frac{3}{2}-\frac{n}{4}}\|\nabla\Delta\boldsymbol{z}\|_2^{\frac{3}{2}+\frac{n}{4}}) \leqslant$$

$$\begin{cases}\dfrac{\lambda_2}{l}\|\nabla\Delta\boldsymbol{z}\|_2^2 + C, & n=1,\\ C\lambda_2(\|\Delta\boldsymbol{z}\|_2^2 + \|\nabla\boldsymbol{z}\|_2)\|\nabla\Delta\boldsymbol{z}\|_2^2, & n=2\end{cases}$$

(8)

$$|\lambda_2(\Delta\boldsymbol{z},\Delta\boldsymbol{H})| \leqslant \frac{\lambda_2}{4}\|\nabla\Delta\boldsymbol{z}\|_2^2 + \lambda_2\|\nabla\boldsymbol{H}\|_2^2$$

(9)

$$|\lambda_2(\Delta(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{H})\boldsymbol{z},\Delta\boldsymbol{z})| = \lambda_2|(\nabla(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{H})\boldsymbol{z},\nabla^3\boldsymbol{z})| \leqslant$$

$$\lambda_2(2\|\boldsymbol{H}\|_2\|\nabla\boldsymbol{z}\|_\infty\|\nabla\Delta\boldsymbol{z}\|_2 + \|\nabla\boldsymbol{H}\|_2\|\nabla\Delta\boldsymbol{z}\|_2) \leqslant$$

$$\frac{\lambda_2}{8}\|\nabla\Delta\boldsymbol{z}\|_2^2 + 3\lambda_2\|\nabla\boldsymbol{H}\|_2^2 + C$$

(10)

$$|-\sigma\beta\eta_1(\boldsymbol{H},\boldsymbol{z}_t)| \leqslant C_1\|\boldsymbol{H}\|_2\|\boldsymbol{z}_t\|_2 \leqslant C_2\|\Delta\boldsymbol{z}\|_2 + d_1 \leqslant \frac{\lambda_2}{l}\|\nabla\Delta\boldsymbol{z}\|_2^2 + d_2$$

(11)

$$|\beta(\boldsymbol{H}_t,\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{z}))| \leqslant \beta\|\boldsymbol{H}_t\|_2\|\Delta\boldsymbol{z}\|_2 \leqslant \varepsilon_3\|\boldsymbol{H}_t\|_2 + \frac{\lambda_2}{l}\|\nabla\Delta\boldsymbol{z}\|_2^2 + C$$

(12)

$$|\eta_1\beta(\boldsymbol{H},\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{z}))| \leqslant \eta_1\beta\|\boldsymbol{H}\|_2\|\Delta\boldsymbol{z}\|_2 \leqslant \frac{\lambda_2}{l}\|\nabla\Delta\boldsymbol{z}\|_2^2 + C$$

联合(1)～(12)，并利用式(1.8.25)可得

$n=1$时，

$$\frac{\mathrm{d}e_1(t)}{\mathrm{d}t} + (\sigma-\eta_1-\varepsilon_1-\varepsilon_3)\|\boldsymbol{H}_t\|_2^2 + (\sigma-\eta_2-\varepsilon_2)\|\boldsymbol{E}_t\|_2^2 - \eta_2\|\nabla\boldsymbol{E}\|_2^2 + \left(\eta_1 - \frac{(4+3\beta^2)(\lambda_2^2+2\lambda_1^2)}{\lambda_2}\right)\|\nabla\boldsymbol{H}\|_2^2 + \left(\frac{1}{8}-\frac{7}{l}\right)\lambda_2\|\nabla\Delta\boldsymbol{z}\|_2^2 \leqslant C_1 \quad (1.8.26)$$

$n=2$时，

$$\frac{\mathrm{d}e_1(t)}{\mathrm{d}t} + (\sigma-\eta_1-\varepsilon_1-\varepsilon_3)\|\boldsymbol{H}_t\|_2^2 + (\sigma-\eta_2-\varepsilon_2)\|\boldsymbol{E}_t\|_2^2 + \eta_2\|\boldsymbol{E}_t\|_2^2 + \left(\eta_1 - \frac{(4+3\beta^2)(\lambda_2^2+2\lambda_1^2)}{\lambda_2}\right)\|\nabla\boldsymbol{H}\|_2^2 + \left[\left(\frac{1}{8}-\frac{6}{l}\right)\lambda_2 - C(|\lambda_1|+\lambda_2)\|\nabla\boldsymbol{z}\|_2 - \frac{C}{\lambda_2}(\lambda_2^2+(|\lambda_1|+2\lambda_2)^2\|\nabla\boldsymbol{z}\|_2^2\right]\|\nabla\Delta\boldsymbol{z}\|_2^2 \leqslant C_2 \quad (1.8.27)$$

其中常数C_1,C_2与t无关，诸参数ε_1,ε_2,ε_3,η_1,η_2和l选取如下：

$$\sigma > \frac{(4+3\beta^2)(\lambda_2^2+2\lambda_1^2)}{\lambda_2} \quad (1.8.28)$$

且

(i) $\frac{(4+3\beta^2)(\lambda_2^2+2\lambda_1^2)}{\lambda_2} < \eta_1 < \sigma$

(ii) $\eta_2 = \varepsilon_2 = \frac{\sigma}{4}$

(iii) $n=1, l>56; n=2, l=60$

设$\|\nabla z_0(x)\|$，$\|\boldsymbol{E}_0(x)\|$，$\|\boldsymbol{H}_0(x)\|$适当小，由引理1.8.2及

$$C(|\lambda_1|+\lambda_2)\|\nabla \boldsymbol{z}\|_2 + \frac{C}{\lambda_2}[\lambda_2^2 - (|\lambda_1|+2\lambda_2^2)^2]\|\nabla \boldsymbol{z}\|_2^2 \leqslant$$

$$C(|\lambda_1|+\lambda_2)\frac{1}{\sqrt{\beta}}[\|\boldsymbol{E}_0(x)\| + \|\boldsymbol{H}_0(x)\| +$$

$$\sqrt{2}\,\sigma\|\boldsymbol{E}_0(x)\| + \|\nabla \boldsymbol{z}_0(x)\|] +$$

$$\frac{C}{\lambda_2}\{\lambda_2^2 + (|\lambda_1|+2\lambda_2)^2\frac{1}{\beta}[(1+\frac{\sigma}{\beta})\|\boldsymbol{E}_0(x)\|^2 +$$

$$\|\boldsymbol{H}_0(x)\|^2 + \beta\|\nabla \boldsymbol{z}_0(x)\|^2]\} < \frac{\lambda_2}{40} \quad (1.8.29)$$

则存在常数 $a>0$，使得

$$\frac{\mathrm{d}e_1(t)}{\mathrm{d}t} + a(\|\boldsymbol{H}_t\|_2^2 + \|\boldsymbol{E}_t\|_2^2 + \|\nabla \boldsymbol{H}\|_2^2 +$$

$$\|\nabla \boldsymbol{E}\|_2^2 + \|\nabla \Delta \boldsymbol{z}\|_2^2) \leqslant C \quad (1.8.30)$$

其中常数 C 与 t 无关，$1\leqslant n\leqslant 2$。

因 $\Delta z(x,t)$对 x 为周期函数，因此$\int_0^{2D}\Delta z\mathrm{d}x=0$。由 Poincare 不等式有

$$\|\Delta \boldsymbol{z}\|_2^2 \leqslant \delta\|\nabla \Delta z\|_2^2$$

选取 $\delta_0=\min\{a,\frac{a}{\delta}\}$。利用式(1.8.30)有

$$\frac{\mathrm{d}e_1(t)}{\mathrm{d}t} + \delta_0(\|\boldsymbol{H}_t\|_2^2 + \|\boldsymbol{E}_t\|_2^2 + \|\nabla \boldsymbol{H}\|_2^2 +$$

$$\|\nabla \boldsymbol{E}\|_2^2 + \|\Delta \boldsymbol{z}\|_2^2) \leqslant C \quad (1.8.31)$$

不等式(1.8.31)能写为

$$\frac{\mathrm{d}e_1(t)}{\mathrm{d}t}+2\delta_0e_1(t)\leqslant C+2\delta_0R(t)\leqslant C+2\delta_0\sup_t|R(t)| \tag{1.8.32}$$

因此

$$e_1(t)\mathrm{e}^{2\delta_0t}\leqslant e_1(0)+(\frac{C}{2\delta_0}+\sup_t|R(t)|)(\mathrm{e}^{2\delta_0t}-1),$$

$$e_1(t)\leqslant e_1(0)+\frac{C}{2\delta_0}+\sup_t|R(t)|$$

即

$$\frac{1}{2}G(t)+R(t)\leqslant C_0+\sup_t|R(t)|,C_0\overset{\mathrm{def}}{=\!=}e_1(0)+\frac{C}{2\delta_0},$$

$$G(t)\leqslant 2C_0+2(\sup_t|R(t)|-R(t))\leqslant 2C_0+4\sup_t|R(t)| \tag{1.8.33}$$

由式(1.8.24)得

$$|R(t)|\leqslant\beta\|\boldsymbol{z}_t\|\|\boldsymbol{H}_t\|+\frac{\beta^2}{2}\|\boldsymbol{z}_t\|_2^2+\beta\|\boldsymbol{z}_t\|_2\|\nabla\boldsymbol{z}\|_2+$$

$$\eta_1\|\boldsymbol{H}\|_2\|\nabla\boldsymbol{E}\|_2+\eta_2\|\boldsymbol{E}\|_2\|\boldsymbol{E}_t\|_2+\frac{\beta^2}{2}\|\nabla\boldsymbol{z}\|_2^2+$$

$$\frac{1}{2}\sigma\eta_1\|\boldsymbol{H}\|_2^2+\frac{1}{2}\sigma\eta_2\|\boldsymbol{E}\|_2^2+\eta_2\beta\|\boldsymbol{E}\|_2\|\nabla\boldsymbol{z}\|_2\leqslant$$

$$\frac{\beta+\beta^2}{2}\|\boldsymbol{z}_t\|_2^2+\frac{\beta}{2}(\|\boldsymbol{H}_t\|_2^2+\|\boldsymbol{E}_t\|_2^2+\|\nabla\boldsymbol{E}\|_2^2)+$$

$$C_1\leqslant(\beta+\beta^2)(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\|\Delta\boldsymbol{z}\|_2^2+$$

$$\frac{\beta}{2}(\|\boldsymbol{H}_t\|_2^2+\|\boldsymbol{E}_t\|_2^2+\|\nabla\boldsymbol{E}\|_2^2)+C_2 \tag{1.8.34}$$

设 $\beta<\frac{1}{2}$,$(\beta+\beta^2)(\lambda_1^2+\lambda_2^2)<\frac{1}{4}$,则能取

$$a_0=4\max\{\frac{\beta}{2},(\lambda_1^2+\lambda_2^2)(\beta+\beta^2)\}<1$$

从式(1.8.34)推出

$$|R(t)|\leqslant\frac{1}{4}a_0(\|\boldsymbol{H}_t\|_2^2+\|\boldsymbol{E}_t\|_2^2+\|\nabla\boldsymbol{E}\|_2^2+$$

$$\|\Delta z\|_2^2) \leqslant \frac{1}{4}a_0 G(t) \tag{1.8.35}$$

将式(1.8.35)代入式(1.8.33)可得

$$G(t) \leqslant 2C_0 + a_0 \sup_t G(t),$$

$$\sup_t G(t) \leqslant \frac{2C_0}{1-a_0} \stackrel{\text{def}}{=\!=} d_0 \tag{1.8.36}$$

于是可得如下结果

引理1.8.3 设 $z(x,t)$,$\boldsymbol{H}(x,t)$,$\boldsymbol{E}(x,t)$为周期初值问题(1.8.1)～(1.8.4)、(1.8.7)、(1.8.8)的光滑解。如初值函数$(z_0(x),\boldsymbol{H}_0(x),\boldsymbol{E}_0(x))\in(H^2(\Omega),H^1(\Omega),H^1(\Omega))$,$\Omega\subset\mathbf{R}^n$,$n\leqslant 2$,$|z_0(x)|=1$,且如下条件满足:

(1) $\lambda_2>0$,$\sigma>\dfrac{(4+3\beta^2)\lambda_2^2+2\lambda_1^2}{\lambda_2}$,

(2) $0<\beta<\dfrac{1}{2}$,$(\beta+\beta^2)(\lambda_1^2+\lambda_2^2)<\dfrac{1}{4}$,

(3) 当 $n=2$时

$$\|\nabla z_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\boldsymbol{H}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\boldsymbol{E}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant \lambda,$$

其中 $\lambda=\lambda(\lambda_1,\lambda_2,\beta)$为适当小的常数,则有以下一致性估计

$$\sup_{t\in[0,\infty)}(\|z(\cdot,t)\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\boldsymbol{H}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\boldsymbol{E}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}^2) \leqslant K$$

其中常数 K 依赖于$\|z_0(x)\|_{H^2(\Omega)}$,$\|\boldsymbol{H}_0(x)\|_{H^1(\Omega)}$,$\|\boldsymbol{E}_0(x)\|_{H^1(\Omega)}$。

利用在文献[204]中的如下存在性定理

定理1.8.1 设常数 $\lambda_2>0$,$\beta\geqslant 0$,$\sigma\geqslant 0$,且初值函数

$$(z_0(x),\boldsymbol{H}_0(x),\boldsymbol{E}_0(x)) \in (H^k(\Omega),H^{k-1}(\Omega),H^{k-1}(\Omega))$$

$k\geqslant 1+[\frac{n}{2}]$,$\Omega\subset\mathbf{R}^n(1\leqslant n\leqslant 2)$为有界区域,且$|z_0(x)|=1$,$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0=0$,$\nabla\cdot(\boldsymbol{H}_0+\beta z_0)=0$,当 $n=2$时满足

$$\|\nabla z_0\| + \|\boldsymbol{E}_0\| + \|\boldsymbol{H}_0\| \leqslant \delta$$

其中 δ 为适当小的常数。则 Landau-Lifshitz-Maxwell 方程组(1.8.1)～(1.8.4)的周期初值问题(1.8.7)～(1.8.8)具有唯一整

体光滑解

$$|z(x,t)| = 1 \quad x \in \Omega, t \in \mathbf{R}^+$$

$$z(x,t) \in \bigcap_{s=0}^{[\frac{k}{2}]} W_\infty^s(0,T;H^{k-2s}(\Omega))$$

$$H(x,t) \in \bigcap_{s=0}^{k-1} W_\infty^s(0,T;H^{k-1-s}(\Omega)),$$

$$E(x,t) \in \bigcap_{s=0}^{k-1} W_\infty^s(0,T;H^{k-1-s}(\Omega)),$$

以及前面所得的一致性先验估计,可得

定理1.8.2 在定理1.8.1和引理1.8.3条件下,问题(1.8.1)~(1.8.4)、(1.8.7)、(1.8.8)存在吸引子 $\mathscr{A}$,即集合 $\mathscr{A}$ 满足

(1) $\mathscr{A}$ 在 $H^2(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ 中弱紧。

(2) $S(t)\mathscr{A}=\mathscr{A}$。

(3) $\lim\limits_{t\to\infty}$ dist $(S(t)B,\mathscr{A})=0, \forall\ B\subset H^2\times H^1\times H^1$ 的有界集,

其中

$$\text{dist}\ (X,Y) = \sup_{x\in X}\ \inf_{y\in Y}\|x-y\|$$

$S(t)(z_0,H_0,E_0)$ 为问题(1.8.1)~(1.8.4)、(1.8.7)、(1.8.8)。所生成的半群算子。

证明 由定理1.8.1,问题(1.8.1)~(1.8.4)、(1.8.7)、(1.8.8)产生连续的半群算子 $S(t)(z_0,H_0,E_0)$。作子集

$$E = \{(z,H,E) \in H^2(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^1(\Omega),$$

$$|z(x,t)| = 1, \nabla\cdot E = 0, \nabla\cdot(H+\beta z) = 0\}$$

$$B = \{|z(x,t)| = 1, \nabla\cdot E = 0, \nabla(H+\beta z) = 0,$$

$$z(\cdot,t) \in H^2(\Omega), H(\cdot,t) \in H^1(\Omega), E(\cdot,t) \in H^1(\Omega)$$

$$\|z(\cdot,t)\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|H(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|E(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leqslant$$

$$\varepsilon_0 + \delta_0\}$$

为 E 中的有界吸收集,它在 E 中是弱紧的。从而推出 $\mathscr{A}=\omega(B)$ 为周期初值问题(1.8.1)~(1.8.4)、(1.8.7)、(1.8.8)的弱紧吸引子。

以下估计吸引子 $\mathscr{A}$ 的 Hausdorff、分形维数的上界。现考虑

对应于问题(1.8.1)～(1.8.4)、(1.8.7)、(1.8.8)的线性变分问题

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z}_t = & \lambda_2\Delta \boldsymbol{z} + 2\lambda_2(\nabla \boldsymbol{z}, \nabla \boldsymbol{z})\boldsymbol{z} + \lambda_2|\nabla \boldsymbol{z}|^2 \boldsymbol{z} + \\ & \lambda_1 \boldsymbol{z} \times \Delta \boldsymbol{z} + \lambda_1 \boldsymbol{z} \times \boldsymbol{h} - \lambda_1(\Delta \boldsymbol{z} + \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{z} + \\ & \lambda_2 \boldsymbol{h} - \lambda_2(\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{H})\boldsymbol{z} - \lambda_2(\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{h})\boldsymbol{z} - \lambda_2(\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{H})\boldsymbol{z} \end{aligned} \tag{1.8.37}$$

$$\boldsymbol{e}_t = \nabla \times \boldsymbol{h} - \sigma \boldsymbol{e} \tag{1.8.38}$$

$$\boldsymbol{h}_t = -\nabla \times \boldsymbol{e} - \beta \boldsymbol{z}_t \tag{1.8.39}$$

$$\boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{h}(0) = \boldsymbol{h}_0, \boldsymbol{e}(0) = \boldsymbol{e}_0 \tag{1.8.40}$$

$$\boldsymbol{z}(x,t), \boldsymbol{e}(x,t), \boldsymbol{h}(x,t) \text{ 对 } x \text{ 具有 } 2D \text{ 周期} \tag{1.8.41}$$

式(1.8.37)～(1.8.41)可写成算子形式

$$\boldsymbol{v}_t = -L(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}(0) \tag{1.8.42}$$

其中 $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{z},\boldsymbol{e},\boldsymbol{h})$ 为问题(1.8.1)～(1.8.4)、(1.8.7)、(1.8.8)的解，$\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{z},\boldsymbol{E},\boldsymbol{H})$，$\boldsymbol{v}_0=(z_0,e_0,h_0)$。

由于问题(1.8.1)～(1.8.4)、(1.8.7)、(1.8.8)具有光滑解，因此线性变分方程组(1.8.37)～(1.8.39)的系数是光滑的。当初值 $\boldsymbol{v}_0$ 适当光滑时，方程组(1.8.37)～(1.8.41)具有唯一光滑解。即存在解算子 $G(t)$，使得 $\boldsymbol{v}_t=G(t)\boldsymbol{v}_0$。更进一步，我们证明半群算子 $S(t)$ 是在 $L^2(\Omega)$ 中可微的，而且它的 Fréchet 导数 $S'(t)u_0=G(t)\boldsymbol{v}_0$。

引理1.8.4 周期初值问题(1.8.1)～(1.8.4)、(1.8.7)、(1.8.8)的光滑解连续地依赖于初始条件。

证明 设 $(\boldsymbol{z}_i(x,t),\boldsymbol{H}_i(x,t),\boldsymbol{E}_i(x,t))$ $(i=1,2)$ 为问题(1.8.1)～(1.8.4)具初值 $z_i(x,0)=z_{0i}(x)$，$\boldsymbol{H}_i(x,0)=\boldsymbol{H}_{0i}(x)$，$\boldsymbol{E}_i(x,0)=\boldsymbol{E}_{0i}(x)$ $(i=1,2)$ 的光滑解。令 $\boldsymbol{z}(x,t)=\boldsymbol{z}_2(x,t)-\boldsymbol{z}_1(x,t)$，$\boldsymbol{H}(x,t)=\boldsymbol{H}_2(x,t)-\boldsymbol{H}_1(x,t)$，$\boldsymbol{E}(x,t)=\boldsymbol{E}_2(x,t)-\boldsymbol{E}_1(x,t)$。则 $\{\boldsymbol{z}(x,t),\boldsymbol{H}(x,t),\boldsymbol{E}(x,t)\}$ 满足

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z}_t = & \lambda_1 \boldsymbol{z} \times \Delta \boldsymbol{z} + \lambda_1 \boldsymbol{z}_1 \times \Delta \boldsymbol{z} + \lambda_1 \boldsymbol{z} \times \boldsymbol{H}_2 + \lambda_1 \boldsymbol{z}_1 \times \boldsymbol{H} + \\ & \lambda_2 \Delta z + \lambda_2 |\Delta z_2|^2 z + \lambda_2(\nabla z, \nabla(z_1 + z_2))z_1 + \\ & \lambda_2 \boldsymbol{H} - \lambda_2(z_2 \cdot \boldsymbol{H}_2)\boldsymbol{z} - \lambda_2(z_2 \cdot \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_1 \cdot z)z_1 \end{aligned} \tag{1.8.43}$$

$$\boldsymbol{E}_t + \sigma \boldsymbol{E} = \nabla \times \boldsymbol{H} \tag{1.8.44}$$

$$\boldsymbol{H}_t + \beta z_t = - \nabla \times \boldsymbol{E} \tag{1.8.45}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{H} + \beta z) = 0, \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

$$z(x,t), \boldsymbol{H}(x,t), \boldsymbol{E}(x,t) \text{ 对 } x \text{ 具有 } 2D \text{ 周期}$$

$$z(x,0 = z_0(x), \boldsymbol{H}(x,0) = \boldsymbol{H}_0(x),$$

$$\boldsymbol{E}(x,0) = \boldsymbol{E}_0(x), |z_0(x)| = 1$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{H}_0 + \beta z_0) = 0, \nabla \boldsymbol{E}_0 = 0$$

我们能建立如下不等式：

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} [\|\nabla z(\cdot,t)\|_{H^1}^2 + \|\boldsymbol{H}(\cdot,t)\|_{L^2}^2 + \|\boldsymbol{E}(\cdot,t)\|_{L^2}^2] \leqslant$$
$$C(\|z_0(x)\|_{H^1}^2 + \|\boldsymbol{H}_0(x)\|_{L^2}^2 + \|\boldsymbol{E}_0(x)\|_{L^2}^2)$$

其中 C 为绝对常数。显然如不等式(1.8.44)成立，则引理1.8.4成立。

事实上，作式(1.8.43)和 z 的内积得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |z|^2 \mathrm{d}x + \lambda_2 \|\nabla z\|^2 \leqslant C_1[\|\nabla z\|^2 +$$
$$\|\boldsymbol{H}\|^2 + \|\boldsymbol{E}\|^2]$$

乘式(1.8.43)以 Δz，再在 Ω 上对 x 积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\nabla z|^2 \mathrm{d}x + \lambda_2\|\Delta z\|^2 = -\lambda_1\int_\Omega z \times \Delta z \cdot \Delta z \mathrm{d}x -$$
$$\lambda_1\int_\Omega z \times \boldsymbol{H}_2 \cdot \Delta z \mathrm{d}x - \lambda_1\int_\Omega z_2 \times \boldsymbol{H} \cdot \Delta z \mathrm{d}x -$$
$$\lambda_2\int_\Omega |\nabla z_2|^2 z \cdot \Delta z \mathrm{d}x - \lambda_2\int_\Omega (\nabla z \cdot \nabla (z_1 + z_2) z_1 \cdot \Delta z \mathrm{d}x +$$
$$\lambda_2\int_\Omega \boldsymbol{H} \cdot \Delta z \mathrm{d}x + \lambda_2\int_\Omega (z_2 \cdot \boldsymbol{H}_2) z \cdot \Delta z \mathrm{d}x +$$
$$\lambda_2\int_\Omega (z_2 \cdot \boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_1 \cdot z) z_1 \cdot \Delta z \mathrm{d}x \tag{1.8.46}$$

其中

$$|-\lambda_1\int_\Omega z \times \Delta z_2 \cdot \Delta z \mathrm{d}x| = |\lambda_1\int_\Omega z \times \nabla \Delta z_2 \cdot \nabla z \mathrm{d}x| \leqslant$$
$$|\lambda_1| \|\nabla \Delta z_2\|_\infty \|z\| \|\nabla z\| \leqslant C|\lambda_1(\|z\|^2 + \|\nabla z\|^2),$$

$$|-\lambda_1\int_\Omega z\times H_2\cdot\Delta z\mathrm{d}x| = |\lambda_1\int_\Omega z\times\nabla H_2\cdot\nabla z\mathrm{d}x| \leqslant$$

$$|\lambda_1|\|\nabla H_2\|_\infty\|z\|\|\nabla z\| \leqslant C|\lambda_1|(\|z\|^2+\|\nabla z\|^2),$$

$$|-\lambda_2\int_\Omega|\nabla z_2|^2 z\cdot\Delta z\mathrm{d}x| \leqslant \lambda_2\|\nabla z_2\|_\infty^2\|z\|\|\Delta z| \leqslant$$

$$\frac{\lambda_2}{K}\|\Delta z\|^2 + C(K)\lambda_2\|z\|^2,$$

其中 K 为待定常数。

$$|-\lambda_2\int_\Omega\nabla z\cdot\nabla(z_1+z_2)z\cdot\Delta z\mathrm{d}x| \leqslant$$

$$\lambda_2\|\nabla(z_1+z_2)\|_\infty\|\nabla z\|\|\Delta z\| \leqslant$$

$$\frac{\lambda_2}{K}\|\Delta z\|^2 + C(K)\lambda_2\|\nabla z\|^2,$$

$$|\lambda_2\int_\Omega H\cdot\Delta z\mathrm{d}x| \leqslant \frac{\lambda_2}{K}\|\Delta z\|^2 + C(K)\lambda_2\|H\|^2,$$

$$|\lambda_2\int_\Omega(z_2\cdot H_2)z\cdot\Delta z\mathrm{d}x| \leqslant \lambda_2\|H\|\|\Delta z\| \leqslant$$

$$\lambda_2\|H_2\|_\infty\|z\|\|\Delta z\| \leqslant \frac{\lambda_2}{K}\|\Delta z\|^2 + C(K)\lambda_2\|z\|^2,$$

$$|\lambda_2\int_\Omega(z_2\cdot H + H_1\cdot z)z_1\cdot\Delta z\mathrm{d}x| \leqslant$$

$$\frac{\lambda_2}{K}\|\Delta z\|^2 + C(K)\lambda_2(\|H\|^2+\|z\|^2)$$

从式(1.8.46)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla z\|^2 + \lambda_2\|\Delta z\|^2 + \lambda_1\int_\Omega z_1\times H\cdot\Delta z\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\frac{5}{K}\lambda_2\|\Delta z\|^2 + C(K)(\|\nabla z\|^2+\|H\|^2+\|z\|^2) \quad (1.8.47)$$

乘式(1.8.10)、(1.8.11)分别以 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$,在 Ω 上积分可得($\beta>0$)

$$\frac{1}{2\beta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega(|E|^2+|H|^2)\mathrm{d}x + \frac{\sigma}{\beta}\|z\|^2 = -\int_\Omega z_t\cdot H\mathrm{d}x \quad (1.8.48)$$

从式(1.8.47)、(1.8.48)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}(|\boldsymbol{E}|^2+|\boldsymbol{H}|^2+\frac{1}{\beta}(|\boldsymbol{E}|^2+|\boldsymbol{H}|^2))\mathrm{d}x+$$

$$\lambda_2\|\Delta \boldsymbol{z}\|^2\leqslant-\int_{\Omega}(\boldsymbol{z}_t\cdot\boldsymbol{H}+\lambda_1\boldsymbol{z}_1\times\boldsymbol{H}\cdot\Delta\boldsymbol{z})\mathrm{d}x+$$

$$\frac{5}{K_2}\lambda_2\|\Delta\boldsymbol{z}\|^2+C(K)(\|\nabla\boldsymbol{z}\|^2\|\boldsymbol{z}\|^2+\|\boldsymbol{H}\|^2) \qquad (1.8.49)$$

作式(1.8.43)和 $\boldsymbol{H}$ 的内积可得

$$\int_{\Omega}(\boldsymbol{z}_t\cdot\boldsymbol{H}+\lambda_1\boldsymbol{z}_1\times\boldsymbol{H}\cdot\Delta\boldsymbol{z})\mathrm{d}x\leqslant|\lambda_1|\Big|\int_{\Omega}(\boldsymbol{z}\times\Delta\boldsymbol{z}_2+$$

$$\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{H}_2)\cdot\boldsymbol{H}\mathrm{d}x\Big|+\lambda_2\Big|\int_{\Omega}\Delta\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{H}\mathrm{d}x\Big|+$$

$$\lambda_2\Big|\int_{\Omega}|\nabla\boldsymbol{z}|^2\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{H}\mathrm{d}x\Big|+\lambda_2\Big|\int_{\Omega}\nabla\boldsymbol{z}\cdot(\nabla(\boldsymbol{z}_1+\boldsymbol{z}_2)\boldsymbol{z}_1\cdot\boldsymbol{H}\mathrm{d}x\Big|+$$

$$\lambda_2\|\boldsymbol{H}\|^2+\lambda_2\Big|\int_{\Omega}(\boldsymbol{z}_2\cdot\boldsymbol{H}_2)\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{H}\mathrm{d}x\Big|+$$

$$\lambda_2\Big|\int_{\Omega}(\boldsymbol{z}_2\cdot\boldsymbol{H})(\boldsymbol{z}_1\cdot\boldsymbol{H})\mathrm{d}x\Big|+\lambda_2\Big|\int_{\Omega}(\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{z})(\boldsymbol{z}_1\cdot\boldsymbol{H})\mathrm{d}x\Big|\leqslant$$

$$\frac{\lambda_2}{K}\|\Delta\boldsymbol{z}\|^2+C(K)(\|\nabla\boldsymbol{z}\|^2+\|\boldsymbol{z}\|^2+\|\boldsymbol{H}\|^2) \qquad (1.8.50)$$

从式(1.8.47)~(1.8.50),取 $K\geqslant6$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}[|\nabla\boldsymbol{z}|^2+|\boldsymbol{z}|^2+\frac{1}{\beta}(|\boldsymbol{E}|^2+|\boldsymbol{H}|^2)]\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C(K,\lambda_1,\lambda_2)[\|\nabla\boldsymbol{z}\|^2+\|\boldsymbol{z}\|^2+\|\boldsymbol{H}\|^2]$$

由此即得引理。

为了证明半群 $S(t)$ 是 Fréchet 可微的,现考虑问题(1.8.1)~(1.8.4)、(1.8.7)、(1.8.8)的线性变分问题。

令 $DS(t)(\boldsymbol{z}_{01},\boldsymbol{H}_{01},\boldsymbol{E}_{01})=(\boldsymbol{w}(t),\boldsymbol{I}(t),\boldsymbol{F}(t))$ 为半群算子在 $(\boldsymbol{z}_0,\boldsymbol{H}_0,\boldsymbol{E}_0)$ 处的 Fréchet 微分。我们有

$$\boldsymbol{w}_t(t)=\lambda_1\boldsymbol{w}\times(\Delta\boldsymbol{z}_1+\boldsymbol{H}_1)+\lambda_1\boldsymbol{z}_1\times(\Delta\boldsymbol{w}+\boldsymbol{I})-$$

$$\lambda_2\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{z}_1\times(\Delta\boldsymbol{z}_1+\boldsymbol{H}_1))-\lambda_2\boldsymbol{z}_1\times$$

$$(\boldsymbol{w} \times (\Delta \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{H}_1)) - \lambda_2 \boldsymbol{z}_1 \times (\boldsymbol{z}_1 \times (\Delta \boldsymbol{w} + \boldsymbol{I})) \tag{1.8.51}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{I} = \boldsymbol{F} + \sigma \boldsymbol{F} \tag{1.8.52}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{f} = - i_t - \beta \boldsymbol{w}_t \tag{1.8.53}$$

$$\nabla \cdot (\mathrm{i} + \rho \boldsymbol{w}) = 0, \nabla \boldsymbol{f} = 0 \tag{1.8.54}$$

$$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{I}(t), \boldsymbol{F}(t))_{t=0} = (\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{H}_0, \boldsymbol{E}_0) \tag{1.8.55}$$

其中$(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{E}_1) = S(t)(\boldsymbol{z}_{01}, \boldsymbol{H}_{01}, \boldsymbol{E}_{01})$为问题(1.8.1)～(1.8.4)(1.8.7)、(1.8.8)取初值$(\boldsymbol{z}_{01}, \boldsymbol{H}_{01}, \boldsymbol{E}_{01})$的解。令

$$(\tilde{\boldsymbol{z}}, \tilde{\boldsymbol{H}}, \tilde{\boldsymbol{E}}) = (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}) - (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{F}) = S(t)(\boldsymbol{z}_{01}, \boldsymbol{H}_{01}, \boldsymbol{E}_{01}) - DS(t)(\boldsymbol{z}_{01}, \boldsymbol{H}_{01}, \boldsymbol{E}_{01})(\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{H}_0, \boldsymbol{E}_0) \tag{1.8.56}$$

则有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z}_t = {} & \lambda_1[\boldsymbol{z} + (\Delta \boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{H}_2) - \boldsymbol{w} \times (\Delta \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{H}_1)] + \\
& \lambda_1[\boldsymbol{z}_1 \times (\Delta \boldsymbol{z} + \boldsymbol{H}) - \boldsymbol{z}_1 \times (\Delta \boldsymbol{w} + \boldsymbol{I})] - \\
& \lambda_2[\boldsymbol{z} \times (\boldsymbol{z}_2 \times (\Delta \boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{H}_2)) - \boldsymbol{z} \times (\boldsymbol{z}_1 \times (\Delta \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{H}_1)] - \\
& \lambda_2[\boldsymbol{z}_1 \times (\boldsymbol{z} \times (\Delta \boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{H}_2)) - \boldsymbol{z}_1 \times (\boldsymbol{w} \times (\Delta \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{H}_1)] - \\
& \lambda_2[\boldsymbol{z}_1 \times (\boldsymbol{z}_1 \times (\Delta \boldsymbol{z} + \boldsymbol{H})) - \boldsymbol{z}_1 \times (\boldsymbol{z}_1 \times (\Delta \boldsymbol{w} + \boldsymbol{I})]
\end{aligned} \tag{1.8.57}$$

$$\nabla \times \tilde{H} = \tilde{E}_t + \sigma \tilde{E} \tag{1.8.58}$$

$$\nabla \times \tilde{E} = - \tilde{H}_t - \beta \tilde{Z}_t \tag{1.8.59}$$

$$\nabla \cdot (\tilde{H} + \beta \tilde{Z}) = 0, \nabla \cdot \tilde{E} = 0 \tag{1.8.60}$$

$$(\tilde{Z}, \tilde{H}, \tilde{E})|_{t=0} = 0 \tag{1.8.61}$$

式(1.8.57)能写为

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_t = {} & \lambda_1[\tilde{Z} \times (\Delta \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{H}_1) + \boldsymbol{z} \times (\Delta \boldsymbol{z} + \boldsymbol{H})] + \\
& \lambda_1[\boldsymbol{z}_1 \times (\Delta \tilde{\boldsymbol{Z}} + \tilde{\boldsymbol{H}})] - \lambda_2[\boldsymbol{z} \times (\boldsymbol{z} \times (\Delta \boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{H}_2)] + \\
& \boldsymbol{z} \times (\boldsymbol{z}_1 \times (\Delta \boldsymbol{z} + \boldsymbol{H})) + \tilde{Z} \times [\boldsymbol{z}_1 \times (\Delta \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{H}_1)] - \\
& \lambda_2[\boldsymbol{z}_1 \times (\tilde{\boldsymbol{z}} \times (\Delta \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{H}_1)] + \boldsymbol{z}_1 \times (\boldsymbol{z} \times (\Delta \boldsymbol{z} + \boldsymbol{H})] -
\end{aligned}$$

$$\lambda_2[z_1 \times (z_1 \times (\Delta\tilde{Z} + \tilde{H}))] \tag{1.8.62}$$

从式(1.8.62)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\tilde{Z}\|^2 \leqslant C_1\|\tilde{Z}\|^2 + C_2(\|z\| + \|H\| + \|E\|)^4$$

$$\|\tilde{Z}(t)\|^2 \leqslant \|\tilde{Z}(0)\|\mathrm{e}^{C_1 t} + \int_0^t \mathrm{e}^{C_1(t-s)}C_2(\|z(s)\| + \|H(s)\| + \|E(s)\|)^4\mathrm{d}s = \int_0^t \mathrm{e}^{C_1(t-s)}C_2(\|z(s)\| + \|H(s)\| + \|E(s)\|)^4\mathrm{d}s$$

从引理1.8.4有

$$\|\tilde{Z}(t)\| \leqslant C(T,K)(\|z_0\| + \|H_0\| + \|E_0\|)^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

类似地，我们能对$\|H(t)\|$，$\|E(t)\|$作同样估计。于是有

引理1.8.5 如果问题(1.8.1)～(1.8.4)、(1.8.7)、(1.8.8)的解适当光滑，则 $S(t):(z_0,H_0,E_0)\to\{z(t),H(t),E(t)\}$是一致可微的。如果在$(z_0,H_0,E_0)\in\mathscr{A}$处微分，则映照

$$DS(t)(z_0,H_0,E_0) = (w(t),I(t),F(t))$$

为问题(1.8.51)～(1.8.55)的解。

设 $v_1(t),v_2(t),\cdots,v_J(t)$为线性问题(1.8.37)～(1.8.41)具初值$v_1(0)=\xi_1,\cdots,v_J(0)=\xi_J$ 的解，其中 $\xi_i\in L^2(\Omega),i=1,2,\cdots,J$。由具体计算可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v_1(t) \wedge \cdots \wedge v_J(t)\|_2^2 + 2\mathrm{tr}\,(L(u(t)) \cdot Q_J)\|v_1(t) \wedge \cdots \wedge v_J(t)\|_2^2 = 0 \tag{1.8.63}$$

其中 $L(u(t))=L(S(t)u_0)$为线性映照：$v\to L(u(t))v$，“$\wedge$”表示外积，tr 为算子的迹，Q_J 为 $L^2(R)$到$\{v_1(t),\cdots,v_J(t)\}$所张成子空间上的正交投影。从式(1.8.63)可得 J 维体积$\wedge_{j=0}^J\xi_j$ 的变化为

$$w_J(t) = \sup_{u_0\in A}\ \sup_{\xi\in L^2,|\xi_j|\leqslant 1}\|v_1(t) \wedge \cdots \wedge v_J(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant \sup_{u_0\in A}\exp\left(-\int_0^t \inf\,(\mathrm{tr}\,(L(S(\tau)u_0) \cdot Q_J(\tau)))\mathrm{d}\tau\right) \tag{1.8.64}$$

现改写方程组(1.8.37)~(1.8.39)为

$$z_t + \boldsymbol{f}(z, \nabla z, \Delta z, \boldsymbol{h};\ \boldsymbol{Z}, \nabla \boldsymbol{Z}, \Delta \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{H}) = 0 \tag{1.8.65}$$

$$\boldsymbol{e}_t + \sigma \boldsymbol{e} - \nabla \times \boldsymbol{h} = 0 \tag{1.8.66}$$

$$\boldsymbol{h}_t + \beta z_t + \nabla \times \boldsymbol{e} = 0 \tag{1.8.67}$$

其中

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{f}(z, \nabla z, \Delta z, \boldsymbol{h}; \boldsymbol{Z}, \nabla \boldsymbol{Z}, \Delta \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{H}) = -\lambda_2 \Delta z - \\ &2\lambda_2(\nabla z \cdot \nabla \boldsymbol{Z})\boldsymbol{Z} - \lambda_2 |\nabla \boldsymbol{Z}|^2 z - \lambda_1 \boldsymbol{Z} \times \Delta z - \\ &\lambda_1 \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{h} + \lambda_1(\Delta \boldsymbol{Z} + \boldsymbol{H}) \times z - \lambda_2 \boldsymbol{h} + \\ &\lambda_2(\boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{H})z + \lambda_2(\boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{h})z\boldsymbol{Z} + \lambda_2(z \cdot \boldsymbol{H})\boldsymbol{Z} \end{aligned} \tag{1.8.68}$$

现选取周期标准正交基$\{\varphi_j, e_j(t), h_j(t)\}$满足：

(1) $\Delta\varphi_j = -\lambda_j^2 \varphi_j$，

(2) $\|\varphi_j\|_2 = \|e_j\| = \|h_j\|_2 = 1$。

则$\|\nabla\varphi_j\|_2 = |\lambda_j|$，$\|\Delta\varphi_j\|_2 = \lambda_j^2$。由定义

$$\begin{aligned} &\operatorname{tr}\{L(u(t)) \cdot Q_J(t)\} = \\ &\sum_{j=1}^{J} [(\boldsymbol{f}(\varphi_j, \nabla\varphi_j, \Delta\varphi_j, h_j; \boldsymbol{Z}, \nabla \boldsymbol{Z}, \Delta \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{H}), \varphi_j) + \\ &\sigma(e_j, e_j) - (\nabla \times \boldsymbol{h}_j, \boldsymbol{e}_j) + (\nabla \times \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{h}_j) - \\ &\beta(\boldsymbol{f}(\varphi_j, \nabla\varphi_j, \Delta\varphi_j, h_j; \boldsymbol{Z}, \nabla \boldsymbol{Z}, \Delta \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{H}), h_j)] \end{aligned} \tag{1.8.69}$$

因

$$(\nabla \times \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{h}_j) - (\nabla \times \boldsymbol{h}_j, \boldsymbol{e}_j) = \int_\Omega \nabla \cdot (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{h}_j)\mathrm{d}x = 0$$

我们仅需在式(1.8.69)中估计

$$(\boldsymbol{f}(\varphi_j, \nabla\varphi_j, \Delta\varphi_j, h_j; \boldsymbol{H}), \varphi_j)$$

和

$$-\beta(\boldsymbol{f}(\varphi_j, \nabla\varphi_j, \Delta\varphi_j, h_j; \boldsymbol{Z}, \nabla \boldsymbol{Z}, \Delta \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{H}), \varphi_j)$$

由式(1.8.68)有

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{f}(\varphi_j, \nabla\varphi_j, \Delta\varphi_j, h_j; \boldsymbol{Z}, \nabla \boldsymbol{Z}, \Delta \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{H}), \varphi_j) = \\ &-\lambda_2(\Delta\varphi_j, \varphi_j) - 2\lambda_2((\nabla \boldsymbol{Z}, \nabla\varphi_j)\boldsymbol{Z}, \varphi_j) - \\ &\lambda_2(|\nabla \boldsymbol{Z}|^2 \varphi_j, \varphi_j) - \lambda_1(\boldsymbol{Z} \times \Delta\varphi_j, \varphi_j) - \end{aligned}$$

$$\lambda_1(\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{h}_j,\varphi_j)-\lambda_2(\boldsymbol{h}_j,\varphi_j)+\lambda_2((\varphi_j\cdot\boldsymbol{H})\boldsymbol{Z},\varphi_j)+$$
$$\lambda_2((\boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{h}_j)\boldsymbol{Z},\varphi_j)+\lambda_2((\boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{H})\varphi_j,\varphi_j)$$

其中

$$-\lambda_2(\Delta\varphi_j,\varphi_j)=\lambda_2\lambda_j^2,$$

$|-2\lambda_2((\nabla\boldsymbol{Z}\cdot\nabla\varphi_j)\boldsymbol{Z},\varphi_j)|\leqslant$

$2\lambda_2\|\nabla\varphi_j\|_2\|\varphi_j\|_2\|\nabla\boldsymbol{Z}\|_\infty=2\lambda_2|\lambda_j|\,\|\nabla\boldsymbol{Z}\|_\infty,$

$|-\lambda_2(|\nabla\boldsymbol{Z}|^2\varphi_j,\varphi_j)|\leqslant\lambda_2|\nabla\boldsymbol{Z}|_\infty^2\|\varphi_j|_2^2=\lambda_2\|\nabla\boldsymbol{Z}\|_\infty^2,$

$|-\lambda_1(\boldsymbol{Z}\times\Delta\varphi_j,\varphi_j)|=|\lambda_1(\nabla\varphi_j,\nabla\boldsymbol{Z}\times\varphi_j)|\leqslant$

$|\lambda_1|\,\|\nabla\varphi_j\|_2\|\varphi_j\|_2|\nabla\boldsymbol{Z}|_\infty=|\lambda_1\lambda_j|\,\|\nabla\boldsymbol{Z}\|_\infty,$

$|-\lambda_1(\boldsymbol{Z}\times h_j,\varphi_j)|\leqslant|\lambda_1|\,\|h_j\|_2\|\varphi_j\|_2=|\lambda_1|,$

$$|-\lambda_2(h_j,\varphi_j)|\leqslant\lambda_2,$$

$|\lambda_2((\varphi_j\cdot\boldsymbol{H})\boldsymbol{Z},\varphi_j)|\leqslant\lambda_2\|\boldsymbol{H}\|_\infty\|\varphi_j\|_2^2=\lambda_2\|\boldsymbol{H}\|_\infty,$

$|\lambda_2((\boldsymbol{Z}\cdot h_j)\boldsymbol{Z},\varphi_j)|\leqslant\lambda_2\|\boldsymbol{h}_j\|_2\|\varphi_j\|_2=\lambda_2,$

$|\lambda_2((\boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{H})\varphi_j,\varphi_j)|\leqslant\lambda_2\|\boldsymbol{H}\|_\infty$

因此

$$\begin{aligned}&(f(\varphi_j,\nabla\varphi_j,\Delta\varphi_j,h_j;\boldsymbol{Z},\nabla\boldsymbol{Z},\Delta\boldsymbol{Z},\boldsymbol{H}),\varphi_j)\geqslant\\&\lambda_2\lambda_j^2-(2\lambda_2+|\lambda_1|)|\lambda_j|\,\|\nabla\boldsymbol{Z}\|_\infty-\\&\lambda_2\|\nabla\boldsymbol{Z}\|_\infty^2-(2\lambda_2+|\lambda_1|)-2\lambda_2\|\boldsymbol{H}\|_\infty\end{aligned}\tag{1.8.70}$$

由式(1.8.70)有

$$\begin{aligned}&-\beta(f(\varphi_j,\nabla\varphi_j,\Delta\varphi_j,h_j;\boldsymbol{Z},\nabla\boldsymbol{Z},\Delta\boldsymbol{Z},\boldsymbol{H}),\varphi_j)=\\&\lambda_2\beta(\Delta\varphi_j,h_j)+2\lambda_2\beta((\nabla\boldsymbol{Z}\cdot\nabla\varphi_j)\boldsymbol{Z},h_j)+\\&\lambda_2\beta(|\nabla\boldsymbol{Z}|^2\varphi_j,h_j)+\lambda_1\beta(\boldsymbol{Z}\times\Delta\varphi_j,h_j)-\\&\lambda_1\beta((\Delta\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{H})\times\varphi_j,h_j)+\lambda_2\beta(h_j,h_j)-\\&\lambda_2\beta((\varphi_j\cdot\boldsymbol{H})\boldsymbol{Z},h_j)-\lambda_2\beta((\boldsymbol{Z}\cdot h_j)\boldsymbol{Z},h_j-\\&\lambda_2\beta((\boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{H})\varphi_j,h_j)\end{aligned}$$

其中

$|\lambda_2\beta(\Delta\varphi_j,h_j)|\leqslant\lambda_2\beta\|\Delta\varphi_j\|_2\|h_j\|_2=\lambda_2\beta\lambda_j^2,$

$|2\lambda_2\beta((\nabla\boldsymbol{Z}\cdot\nabla\varphi_j)\boldsymbol{Z},h_j)|\leqslant$

$$2\lambda_2\beta\|\nabla\varphi_j\|_2\|h_j\|_2\|\nabla \mathbf{Z}\|_\infty = 2\lambda_2\beta|\lambda_j|\|\nabla \mathbf{Z}\|_\infty,$$

$$|\lambda_2\beta(|\nabla \mathbf{Z}|^2\varphi_j,h_j)| \leqslant \lambda_2\beta|\nabla \mathbf{Z}|_\infty^2\|h_j\|_2\|\varphi_j\|_2 = \lambda_2\beta\|\nabla \mathbf{Z}\|_\infty^2,$$

$$|\lambda_1\beta(\mathbf{Z}\times\Delta\varphi_j,h_j) \leqslant |\lambda_1|\|\beta\|\|\Delta\varphi_j\|_2\|h_j\|_2 = |\lambda_1|\beta\lambda_j^2,$$

$$|-\lambda_1\beta((\Delta \mathbf{Z}+\mathbf{H})\times\varphi_j,h_j)| \leqslant$$

$$|\lambda_1|\beta|\Delta \mathbf{Z}+\mathbf{H}|_\infty\|\varphi_j\|_2\|h_j\|_2 = |\lambda_1|\beta\|\Delta \mathbf{Z}+\mathbf{H}\|_\infty,$$

$$\lambda_2\beta(h_j,h_j) = \lambda_2\beta,$$

$$|-\lambda_2\beta((\varphi_j\cdot\mathbf{H})\mathbf{Z},h_j)| \leqslant \lambda_2\|\mathbf{H}\|_\infty,$$

$$|-\lambda_2\beta((\mathbf{Z}\cdot h_j)\mathbf{Z},h_j)| \leqslant \lambda_2\beta,$$

$$|-\lambda_2\beta((\mathbf{Z}\cdot\mathbf{H})\varphi_j,h_j)| \leqslant \lambda_2\beta\|\mathbf{H}\|_\infty$$

由此可得

$$\begin{aligned}&-\beta(f(\varphi_j,\nabla\varphi_j,\Delta\varphi_j,h_j;\mathbf{Z},\nabla \mathbf{Z},\Delta \mathbf{Z},\mathbf{H}),\varphi_j) \geqslant \\ &-|\lambda_1|\beta\lambda_j^2-\lambda_2\beta\lambda_j^2-2\lambda_2\beta|\lambda_j|\|\nabla \mathbf{Z}\|_\infty- \\ &[\lambda_2\beta\|\nabla \mathbf{Z}\|_\infty^2+|\lambda_1|\beta\|\Delta \mathbf{Z}+\mathbf{H}\|_\infty+2\lambda_2\beta\|\mathbf{H}\|_\infty]\end{aligned} \tag{1.8.71}$$

将式(1.8.70)、(1.8.71)代入式(1.8.69)得

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\{L(u(t))\cdot Q_J(t)\} \geqslant &(\lambda_2-(\lambda_2+|\lambda_1|\beta)\sum_{j=1}^{J}\lambda_j^2- \\ &(2\lambda_2+2\lambda_2\beta+|\lambda_1|)\sum_{j=1}^{J}|\lambda_j|\|\nabla \mathbf{Z}\|_\infty+ \\ &(\sigma-\lambda_2(1+\beta))\|\nabla \mathbf{Z}\|_\infty^2-2\lambda_2(1+\beta)\|\mathbf{H}\|_\infty- \\ &|\lambda_1|\beta\|\Delta \mathbf{Z}+\mathbf{H}\|_\infty]J\end{aligned} \tag{1.8.72}$$

选 β 适当小，使得

$$\lambda_2 > (\lambda_2+|\lambda_1|)\beta$$

即

$$0<\beta<\frac{\lambda_2}{\lambda_2+|\lambda_1|} \tag{1.8.73}$$

令

$$\delta = \lambda_2-(\lambda_2+|\lambda_1|)\beta, \quad \chi = (\sum_{1}^{J}\lambda_j^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$a = (2\lambda_2+2\lambda_2\beta+|\lambda_1|)\|\nabla \mathbf{Z}\|_\infty,$$

$$b = \sigma - \lambda_2(1+\beta)\|\nabla \boldsymbol{Z}\|_\infty^2 - 2\lambda_2(1+\beta)\|\boldsymbol{H}\|_\infty -$$
$$|\lambda_1|\beta\|\Delta \boldsymbol{Z} + \boldsymbol{H}\|_\infty,$$

注意到

$$\sum_{j=1}^{J}|\lambda_j| \leqslant (\sum_{j=1}^{J}\lambda_j^2)^{\frac{1}{2}}J^{\frac{1}{2}},$$

则式(1.8.72)可写为

$$\operatorname{tr}\{L(u(t))\cdot Q_J(t)\} \geqslant \sigma\chi^2 - aJ^{\frac{1}{2}}\chi + bJ =$$

$$\delta(\chi - \frac{aJ^{\frac{1}{2}}}{2\delta})^2 + \frac{4\delta b - a^2}{4\delta}J \qquad (1.8.74)$$

从式(1.8.74)可得

(1) $4\delta b - a^2 \leqslant 0$,

$$\operatorname{tr}\{L(u(t))\cdot Q_J(t)\} \geqslant$$

$$\delta(\chi - \frac{a+\sqrt{a^2-4\delta b}}{2\delta}J^{\frac{1}{2}})(\chi - \frac{a-\sqrt{a^2-4\delta b}}{2\delta}J^{\frac{1}{2}})$$

选取 J 使得

$$\chi > \frac{a-\sqrt{a^2-4\delta b}}{2\delta}J^{\frac{1}{2}} \qquad (1.8.75)$$

对于 λ_j 有估计

$$\lambda_j^2 \geqslant [\frac{(j-1)^{\frac{1}{n}}}{2} - 1]^2 = \frac{1}{4}(j-1)^{\frac{2}{n}} - (j-1)^{\frac{1}{n}} + 1$$

即

$$\lambda_j^2 \geqslant$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(j-1)^2 - j + 2 = \frac{1}{4}j^2 + \frac{3}{2}j + \frac{9}{4}, & \text{当 } n = 1 \\ \frac{1}{4}(j-1) - (j-1)^{\frac{1}{2}} + 1 = \frac{1}{4}j + \frac{3}{4} - (j-1)^{\frac{1}{2}}, & \text{当 } n = 2 \end{cases}$$

(i) $n=1$,

$$\sum_{j=1}^{J}\lambda_j^2 \geqslant \frac{1}{4}\sum_{1}^{J}j^2 - \frac{3}{2}\sum_{1}^{J}j + \frac{9}{4}J =$$

$$\frac{1}{24}(J+1)(2J+1)J-\frac{3}{4}(J+1)J+\frac{9}{4}J=$$

$$\frac{1}{12}J^3-\frac{5}{8}J^2+\frac{37}{24}J$$

因此保证式(1.8.75)成立。选取 J_0满足

$$\frac{1}{12}J_0^3-\frac{5}{8}J_0^2+(\frac{37}{24}-\frac{(a+\sqrt{a^2-4\delta b})^2}{4\delta^2})J_0>0$$

$$2J_0^2-15J_0+37-\frac{6}{\delta^2}(a+\sqrt{a^2-4\delta b})^2>0,$$

$$(J_0-\frac{15}{4})^2+\frac{71}{16}-\frac{3}{\delta^2}(a+\sqrt{a^2-4\delta b})^2>0$$

当

$$a+\sqrt{a^2-4\delta b}<2\delta$$

可取 $J_0=1$，当

$$a+\sqrt{a^2-4\delta b}\geqslant 2\delta$$

取

$$J_0>\sqrt{\frac{3(a+\sqrt{a^2-4\delta b})}{\delta^2}-\frac{71}{16}}+\frac{15}{4}$$

(ii) $n=2$,

$$\sum_1^J\lambda_j^2\geqslant\frac{1}{4}\sum_1^J j+\frac{3}{4}J-\sum_1^J(j-1)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}(J+1)J+$$

$$\frac{3}{4}J-\sum_1^{J-1}j^{\frac{1}{2}}\geqslant\frac{J^2+7J}{8}-(\sum_1^{J-1}j)^{\frac{1}{2}}\sqrt{J-1}\geqslant$$

$$\frac{J^2+7J}{8}-\frac{1}{\sqrt{2}}J^{\frac{3}{2}}$$

为保证式(1.8.75)成立，选取 J_0满足

$$\frac{J_0+7}{8}-\frac{1}{\sqrt{2}}J_0^{\frac{1}{2}}>\frac{(a+\sqrt{a^2-4\delta b})^2}{4\delta^2}$$

即

$$J_0 > \{2\sqrt{2} + [1 + 2(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4\delta b}}{\delta})^2]^{\frac{1}{2}}\}^2$$

于是我们得到如下定理

定理1.8.3　设$\Omega \subset \mathbf{R}^n (n \leqslant 2)$为有界域,如下条件满足

(1) $\lambda_2 > 0, \sigma > \frac{(4+3\beta^2)\lambda_2^2 + 2\lambda_1^2}{\lambda_2}$,

(2) $0 < \beta < \min\{\frac{1}{2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + |\lambda_1|}\}$,

(3) $(\beta + \beta^2)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) < \frac{1}{4}$,

(4) 当$n=2$时

$$\|\nabla \boldsymbol{Z}_0\|_2 + \|\boldsymbol{H}_0\|_2 + \|\boldsymbol{E}_0\|_2 \leqslant \nu$$

其中$\nu = \nu(\lambda_1, \lambda_2, \beta)$为适当小的常数。则周期初值问题(1.8.1)～(1.8.4)、(1.8.7)、(1.8.8)具有吸引子$\mathscr{A} = \omega(B)$。其中

$$B = \{(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}) \in (H^2(\Omega), H^1(\Omega), H^1(\Omega)) |$$
$$\|\boldsymbol{Z}\|_{H^2}^2 + \|\boldsymbol{E}\|_{H^1}^2 + \|\boldsymbol{H}\|_{H^1}^2 \leqslant \varepsilon_0 + d_0\}$$

是一个吸收集。吸引子$\mathscr{A}$的 Hausdorff 维数和分形维数是有限的,且满足:

(1) $a^2 - 4\delta b < 0$,

$$d_H(\mathscr{A}) \leqslant 1, d_F(\mathscr{A}) \leqslant 2;$$

(2) $a^2 - 4\delta b \geqslant 0$,

(i) $n=1$,如

$$a + \sqrt{a^2 - 4\delta b} < 2\delta,$$

则

$$d_H(\mathscr{A}) \leqslant 1, d_F(\mathscr{A}) \leqslant 2$$

如

$$a + \sqrt{a^2 - 4\delta b} \geqslant 2\delta$$

则

$$d_H(\mathscr{A}) \leqslant J_1, d_F(\mathscr{A}) \leqslant 2J_1$$

其中J_1为最小整数,满足

$$J_1 > \sqrt{\frac{3(a + \sqrt{a^2 - 4\delta b})^2}{\delta^2} - \frac{71}{16} + \frac{15}{4}};$$

(ii) $n=2$,

$$d_H(\mathscr{A}) \leqslant J_2, d_F(\mathscr{A}) \leqslant 2J_2$$

其中 J_2为最小整数，满足

$$J_2 > \{2\sqrt{2} + [1 + 2(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4\delta b}}{\delta})^2]^{\frac{1}{2}}\}^2$$

于此

$$\delta = \lambda_2 - (\lambda_2 + |\lambda_1|)\beta,$$

$$a = (2\lambda_2 + 2\lambda_2\beta + |\lambda_1|)\|\nabla \mathbf{Z}\|_\infty,$$

$$b = \sigma - \lambda_2(1+\beta)\|\nabla \mathbf{Z}\|_\infty^2 + 2\lambda_2(1+\beta)\|\boldsymbol{H}\|_\infty - |\lambda_1\beta|\|\Delta \mathbf{Z} + \boldsymbol{H}\|_\infty$$

1.9 非线性 Schrödinger-Boussinesq 方程

考虑如下的具耗散的非线性 Schrödinger-Boussinesq 方程的初边值问题

$$\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}_t + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - n\boldsymbol{\varepsilon} - \beta|\boldsymbol{\varepsilon}|^2\boldsymbol{\varepsilon} + \mathrm{i}\gamma\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{g}(x) \tag{1.9.1}$$

$$n_t = \Delta\varphi \tag{1.9.2}$$

$$\varphi_t = n + f(n) + \mu n_t - \lambda\Delta n + |\boldsymbol{\varepsilon}|^2 - \alpha\varphi \tag{1.9.3}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(0) = \boldsymbol{\varepsilon}_0, n(0) = n_0, \varphi(0) = \varphi_0 \tag{1.9.4}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}|_{\partial\Omega} = n|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1.9.5}$$

其中：$x \in \Omega \subset \mathbf{R}^N$；$t \in \mathbf{R}^+$；$\alpha,\beta,\gamma,\mu,\lambda>0$为常数；$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，$\boldsymbol{\varepsilon}(x,t) = (\varepsilon_1(x,t), \varepsilon_2(x,t), \cdots, \varepsilon_J(x,t))$为未知复值函数向量，$n(x,t)$，$\varphi(x,t)$为未知实值函数。这个方程组出现于激光和等离子体的非线性相互作用中，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 表示电场，n 表示密度的扰动，φ 表示势函数，如见文献[1,2,3]。$\gamma>0$，$\mu>0$，$\alpha>0$表示耗散效应。当 $\gamma=\mu=\alpha=0$ 时，它为可积系统，具孤立子解。方程(1.9.1)～(1.9.5)整体光滑

解的存在唯一性于1983年由郭首先得到[4,5]。

现研究问题(1.9.1)～(1.9.5)整体吸引子的存在性及其维数估计。

为简单计，考虑空间一维情况。$\Omega=[0,L]$，设 $f\in C^{\infty}(\mathbf{R})$，且其增长满足

(i) $\lim\limits_{|s|\to\infty}\inf \dfrac{F(s)}{|s|^2}\geqslant 0$ (1.9.6)

(ii)存在 $\omega\geqslant 0$，使得

$$\lim_{|s|\to\infty}\frac{sf(s)-\omega F(s)}{|s|^2}\geqslant 0 \tag{1.9.7}$$

其中 $F(s)=\int_0^s f(\delta)\mathrm{d}\delta$。不妨设 $\omega\leqslant 1$。

记模 $\|u\|=\|u\|_{L^2}=\left(\int|u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$，$H^m(\Omega)=W^{m,2}(\Omega)$，

$$A=-\partial_{xx}$$

引理1.9.1 设 $\varepsilon_0(x)\in L^2(\Omega)$，$g(x)\in L^2(\Omega)$，则对问题(1.9.1)～(1.9.5)的解，有

$$\|\varepsilon(t)\|^2\leqslant\|\varepsilon_0\|^2\mathrm{e}^{-\gamma t}+\frac{\|g\|^2}{\gamma^2}(1-\mathrm{e}^{-\gamma t}) \tag{1.9.8}$$

证明 式(1.9.1)乘以 $\bar{\varepsilon}$，并在 Ω 上积分，有

$$\begin{aligned}&(\mathrm{i}\varepsilon_t,\varepsilon)+(\varepsilon_{xx},\varepsilon)-(n\varepsilon,\varepsilon)-\beta(|\varepsilon|^2\varepsilon,\varepsilon)+\\&\mathrm{i}\gamma(\varepsilon,\varepsilon)=(g,\varepsilon)\end{aligned} \tag{1.9.9}$$

其中$(\cdot,\cdot)$表示复 $L^2(\Omega)$上的内积，式(1.9.9)中取虚部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\varepsilon\|^2+\gamma\|\varepsilon\|^2=\mathrm{Im}\,(g,\varepsilon)$$

利用 Cauchy 不等式和 Gronwall 不等式，即得式(1.9.8)。

在式(1.9.9)中取实部，可得

$$\begin{aligned}&-\mathrm{Im}\,(\varepsilon_t,\varepsilon)-\|\varepsilon_x\|^2-\int n|\varepsilon|^2\mathrm{d}x-\\&\beta\int|\varepsilon|^4\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\,(g,\varepsilon)\end{aligned} \tag{1.9.10}$$

式(1.9.1)乘以 $\bar{\varepsilon}_t$，并在 Ω 上积分，有

$$\mathrm{i}(\boldsymbol{\varepsilon}_t,\boldsymbol{\varepsilon}_t)+(\boldsymbol{\varepsilon}_{xx},\boldsymbol{\varepsilon}_t)-(n\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}_t)-\beta(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}_t)+$$
$$\mathrm{i}\gamma(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}_t)=(\boldsymbol{g},\boldsymbol{\varepsilon}_t) \tag{1.9.11}$$

因

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{\varepsilon}_x\|^2=-2\mathrm{Re}\ (\boldsymbol{\varepsilon}_{xx},\boldsymbol{\varepsilon}_t),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int n|\boldsymbol{\varepsilon}|^2\mathrm{d}x=2\mathrm{Re}\ (n\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}_t)+\int n_t|\boldsymbol{\varepsilon}|^2\mathrm{d}x,$$

$$\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|\boldsymbol{\varepsilon}|^4\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\ (|\boldsymbol{\varepsilon}|^2\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}_t)$$

在式(1.9.11)中取实部，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\varepsilon}_x\|^2+\frac{1}{2}\int n|\boldsymbol{\varepsilon}|^2\mathrm{d}x-\frac{\beta}{4}\int|\boldsymbol{\varepsilon}|^4\mathrm{d}x\right]-$$
$$\frac{1}{2}\int n_t|\boldsymbol{\varepsilon}|^2\mathrm{d}x+\mathrm{Im}\ \gamma(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}_t)=-\mathrm{Re}\ (\boldsymbol{g},\boldsymbol{\varepsilon}_t) \tag{1.9.12}$$

联系式(1.9.10)和式(1.9.12)，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\varepsilon}_x\|^2+\frac{1}{2}\int n|\boldsymbol{\varepsilon}|^2\mathrm{d}x+\frac{\beta}{4}\int|\boldsymbol{\varepsilon}|^4\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\ (\boldsymbol{g},\boldsymbol{\varepsilon})\right]+$$
$$\gamma\left[\|\boldsymbol{\varepsilon}_x\|^2+\int n|\boldsymbol{\varepsilon}|^2\mathrm{d}x+\beta\int|\boldsymbol{\varepsilon}|^4\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\ (\boldsymbol{g},\boldsymbol{\varepsilon})\right]=$$
$$\frac{1}{2}\int n_t|\boldsymbol{\varepsilon}|^2\mathrm{d}x \tag{1.9.13}$$

现估计$\frac{1}{2}\int n_t|\varepsilon|^2\mathrm{d}x$。令 $m=n_t+\rho n$，其中 ρ 充分小，取式(1.9.3)和 m 的内积，得

$$(\varphi_t,m)=(n+f(n)+\mu n_t-\lambda n_{xx}+|\boldsymbol{\varepsilon}|^2-\alpha\varphi,m)$$

由于 $A\varphi_t=-n_{tt}$，可得

$$(m_t+(\alpha-\rho)m+\mu Am+[\lambda A^2+A-\mu\rho A-\rho(\alpha-\rho)]n+$$
$$Af(n)+A|\boldsymbol{\varepsilon}|^2,A^{-1}m)=0$$

于是，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}\|A^{-\frac{1}{2}}m\|^2+\frac{1}{2}\lambda\|A^{\frac{1}{2}}n\|^2+\frac{1}{2}\|n\|^2+\int F(n)\mathrm{d}x\right\}+$$

$$(\alpha-\rho)\|A^{-\frac{1}{2}}m\|^2+\lambda\rho\|A^{\frac{1}{2}}n\|^2+\rho\|n\|^2+$$

$$\mu\|m\|^2+\rho\int f(n)n\mathrm{d}x-\mu\rho(n,m)-$$

$$\rho(\alpha-\rho)(n,A^{-1}m)+\rho\int n|\varepsilon|^2\mathrm{d}x+\int n_t|\varepsilon|^2\mathrm{d}x=0 \quad (1.9.14)$$

由于

$$\mu\rho|(n,m)|\leqslant\mu\rho\|n\|\|m\|\leqslant\frac{1}{8}\rho\|n\|^2+2\mu^2\|m\|^2,$$

$$\rho(\alpha-\rho)|(n,A^{-1}m)|\leqslant\frac{1}{8}\rho\|n\|^2+$$

$$2\rho(\alpha-\rho)^2\|A^{-1}m\|^2\leqslant\frac{1}{8}\rho\|n\|^2+$$

$$2\rho(\alpha-\rho)^2c_0\|m\|^2,$$

其中 c_0 依赖于 A 的第一特征值，如选取 ρ 充分小，使得

$$\rho\leqslant\gamma,\rho\leqslant\frac{1}{2}\alpha,2\mu^2\rho+2\rho(\alpha-\rho)^2c_0<\frac{1}{2}\mu \quad (1.9.15)$$

则式(1.9.14)变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}\|A^{-\frac{1}{2}}m\|^2+\frac{1}{2}\lambda\|A^{\frac{1}{2}}n\|^2+\frac{1}{2}\|n\|^2+\int F(n)\mathrm{d}x\right\}+$$

$$\frac{1}{2}\alpha\|A^{-\frac{1}{2}}m\|^2+\lambda\rho\|A^{\frac{1}{2}}n\|^2+\frac{3}{4}\rho\|n\|^2+\frac{1}{2}\mu\|m\|^2+$$

$$\rho\int f(n)n\mathrm{d}x+\rho\int n|\varepsilon|^2\mathrm{d}x-\int n_t|\varepsilon|^2\mathrm{d}x\leqslant 0$$

$$(1.9.16)$$

记

$$H(\varepsilon,n,\varphi)=\|A^{\frac{1}{2}}\varepsilon\|^2+\int n|\varepsilon|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\beta\int|\varepsilon|^4\mathrm{d}x+$$

$$2\mathrm{Re}\,(g,\varepsilon)+\frac{1}{2}\|A^{-\frac{1}{2}}m\|^2+\frac{1}{2}\lambda\|A^{\frac{1}{2}}n\|^2+$$

$$\frac{1}{2}\|n\|^2+\int F(n)\mathrm{d}x \quad (1.9.17)$$

$$K(\varepsilon,n,\varphi)=$$

$$2\gamma\left[\|A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varepsilon}\|^2+\int n|\boldsymbol{\varepsilon}|^2\mathrm{d}x+\beta\int|\boldsymbol{\varepsilon}|^4\mathrm{d}x+\operatorname{Re}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{\varepsilon})\right]+$$

$$\frac{1}{2}\alpha\|A^{-\frac{1}{2}}m\|^2+\lambda\rho\|A^{\frac{1}{2}}n\|^2+$$

$$\frac{3}{4}\rho\|n\|^2+\rho\int f(n)n\mathrm{d}x+\rho\int n|\boldsymbol{\varepsilon}|^2\mathrm{d}x \qquad (1.9.18)$$

则由式(1.9.14)、(1.9.16)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(\boldsymbol{\varepsilon},n,\varphi)+K(\boldsymbol{\varepsilon},n,\varphi)+\frac{1}{2}\mu\|m\|^2\leqslant 0 \qquad (1.9.19)$$

现对 $H(\boldsymbol{\varepsilon},n,\varphi)$ 和 $K(\boldsymbol{\varepsilon},n,\varphi)$ 进行估计

引理1.9.2 对任何小的 $\theta>0$，存在常数 c_1 和 c_2，它们仅依赖于 θ，使得

$$H(\boldsymbol{\varepsilon},n,\varphi)\geqslant(1-\theta)\|A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varepsilon}\|^2+\frac{1}{2}\beta\int|\boldsymbol{\varepsilon}|^4\mathrm{d}x+$$

$$\frac{1}{2}\|A^{-\frac{1}{2}}m\|^2+\frac{1}{2}\lambda\|A^{\frac{1}{2}}n\|^2+$$

$$\frac{1}{4}\|n\|^2-\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2-c_1\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^6-\|\boldsymbol{g}\|^2-c_2 \qquad (1.9.20)$$

证明 由 Young 和 Sobolev 不等式，$\forall\ \theta_i>0$，$(i=1,2,3)$，存在 $c(\theta_i)$，$(i=1,2,3)$，使得

$$\left|\int n|\boldsymbol{\varepsilon}|^2\mathrm{d}x\right|\leqslant\theta_1\|n\|^2+c(\theta_1)\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{L^4}^4\leqslant$$

$$\theta_1\|n\|^2+\theta_2\|\boldsymbol{\varepsilon}_x\|^2+c(\theta_1)c(\theta_2)\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^6,$$

$$\left|\int F(n)\mathrm{d}x\right|\leqslant\theta_3\|n\|^2+c(\theta_3)$$

由 H 的定义，并选取 $\theta_1=\theta_3=\dfrac{1}{8}$，$\theta_2=\theta\in(0,1)$，即得到不等式(1.9.20)。

引理1.9.3 如 ρ 充分小，使得式(1.9.15)成立，则存在常数 c_3，c_4，使得

$$\rho\omega H-K\leqslant\rho(\|\boldsymbol{g}\|^2+\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2)+c_3\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^6+c_4 \qquad (1.9.21)$$

证明 我们有

$$\rho\omega H(\boldsymbol{\varepsilon},n,\varphi) - K(\boldsymbol{\varepsilon},n,\varphi) =$$

$$-(2\gamma-\omega\rho)\|A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 - \left(2\gamma-\frac{1}{2}\rho\omega\right)\beta\int|\boldsymbol{\varepsilon}|^4\mathrm{d}x -$$

$$\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\rho\omega\right)\|A^{-\frac{1}{2}}m\|^2 - \left(1-\frac{1}{2}\omega\right)\lambda\rho\|A^{-\frac{1}{2}}n\|^2 -$$

$$\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\omega\right)\rho\|n\|^2 + \rho(\omega-1)\int n|\boldsymbol{\varepsilon}|^2\mathrm{d}x -$$

$$2(\gamma-\omega\rho)(\boldsymbol{g},\omega) - \rho\int[f(n)n-\omega F(n)]\mathrm{d}x \qquad (1.9.22)$$

由假设式(1.9.7),$f(n)n-\omega F(n)\geqslant -\frac{1}{8}n^2-c$,于是

$$-\int[f(n)n-\omega F(n)]\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8}\|n\|^2 + c \qquad (1.9.23)$$

由式(1.9.22)、(1.9.23),$\omega\leqslant 1$及ρ满足式(1.9.15),可得

$$\rho\omega H(\boldsymbol{\varepsilon},n,\varphi) - K(\boldsymbol{\varepsilon},n,\varphi) \leqslant -(2\gamma-2\rho)\|A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 -$$

$$\left(2\gamma-\frac{1}{2}\rho\right)\beta\int|\boldsymbol{\varepsilon}|^4\mathrm{d}x - \left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\rho\right)\|A^{-\frac{1}{2}}m\|^2 +$$

$$\frac{1}{2}\rho\|\boldsymbol{g}\|^2 + \frac{1}{2}\rho\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 + c_3\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^6 + c_4 \leqslant$$

$$\rho\|\boldsymbol{g}\|^2 + \rho\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 + c_3\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^6 + c_4$$

由此,可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(\boldsymbol{\varepsilon},n,\varphi) + \omega\rho H(\boldsymbol{\varepsilon},n,\varphi) + \frac{1}{2}\mu\|m\|^2 \leqslant$$

$$\rho\|\boldsymbol{g}\|^2 + \rho\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 + c_3\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^6 + c_4$$

由 Gronwall 不等式,得

$$H(\boldsymbol{\varepsilon},n,\varphi) \leqslant H(\boldsymbol{\varepsilon}_0,n_0,\varphi_0)\mathrm{e}^{-\rho\omega t} +$$

$$\mathrm{e}^{-\rho\omega t}\int_0^t(\rho\|\boldsymbol{g}\|^2 + \rho\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 + c_3\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^6 + c_4)\mathrm{e}^{\rho\omega\tau}\mathrm{d}\tau \qquad (1.9.24)$$

再利用引理1.9.1,即有

命题1.9.1 设 $\boldsymbol{\varepsilon}(t),n(\cdot,t),\varphi(\cdot,t)\in H_0^1(\Omega)$为问题(1.9.1)

~(1.9.5)的解，设式(1.9.6)、(1.9.7)成立，则

$$H(\varepsilon,n,\varphi) \leqslant H(\varepsilon_0,n_0,\varphi_0)e^{-\rho\alpha t} + a_\infty(1-e^{-\rho\alpha t}) + e^{-\rho\alpha t}c(\|g\|^2,\|\varepsilon_0\|^2), \quad \forall t \geqslant 0 \tag{1.9.25}$$

其中 a_∞ 依赖于 $\|g\|_0^2$，$c(\|g\|^2,\|\varepsilon_0\|^2)$，$\|g\|^2$ 和 $\|\varepsilon_0\|^2$。

利用 Galerkin 方法及上述先验估计，易证

定理1.9.1 设 $\varepsilon_0(x),n_0(x),\varphi_0(x)\in H_0^1(\Omega)$，$g(x)\in L^2(\Omega)$，$f$ 满足式(1.9.6)、(1.9.7)，则存在问题(1.9.1)~(1.9.5)的唯一整体解 $(\varepsilon(\cdot,t),n(\cdot,t),\varphi(\cdot,t))\in L^\infty(0,\infty;H_0^1(\Omega))\cap C(0,\infty;H_0^1(\Omega))$，$n_t\in L^2(0,\infty;L^2(\Omega))$。且对 $t>0$ 有：映照 $(\varepsilon_0,n_0,\varphi_0)\to(\varepsilon(t),n(t),\varphi(t))$ 在 $H_0^1\times H_0^1\times H_0^1$ 上是连续的。

设 $S(t)$ 为问题(1.9.1)~(1.9.5)所生成的算子半群，即

$$S(t)u_0 = S(t)(\varepsilon_0,n_0,\varphi_0) = (\varepsilon(\cdot,t),n(\cdot,t),\varphi(\cdot,t))$$

由定理1.9.1，可知 $S(t)u_0$ 在 $H_0^1\times H_0^1\times H_0^1$ 上是连续的，且由引理1.9.2，有

命题1.9.2 设式(1.9.6)、(1.9.7)成立，则存在常数 ρ_1，使得对任何 $R>0$，存在 $t_1(R)>0$，使得对任何 $t\geqslant t_1(R)$，当 $\varepsilon_0,n_0,\varphi_0\in H_0^1$，且

$$\|\varepsilon_0\|_{H_0^1}^2 + \|n_0\|_{H_0^1}^2 + \|\varphi_0\|_{H_0^1}^2 \leqslant R^2 \tag{1.9.26}$$

时，对应于初值 $(\varepsilon_0,n_0,\varphi_0)$，问题(1.9.1)~(1.9.5)的解 $(\varepsilon(\cdot,t),n(\cdot,t),\varphi(\cdot,t))$，有

$$\|\varepsilon(\cdot,t)\|_{H_0^1}^2 + \|n(\cdot,t)\|_{H_0^1}^2 + \|\varphi(\cdot,t)\|_{H_0^1}^2 \leqslant \rho_1^2 \tag{1.9.27}$$

即问题(1.9.1)~(1.9.5)在 H^1 中存在有界吸收集。

现考虑在 H^2 中的有界吸收集。

命题1.9.3 设式(1.9.6)、(1.9.7)成立，存在常数 $\rho_2\geqslant 0$，使得对任何 $R>0$ 存在 $t_2=t_2(R)\geqslant 0$，对任何 $\varepsilon_0,n_0,\varphi_0\in D(A)$，

$$\|\varepsilon_0(x)\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|n_0(x)\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\varphi_0(x)\|_{H^2(\Omega)}^2 \leqslant R^2 \tag{1.9.28}$$

问题(1.9.1)~(1.9.5)的解满足

$$\|\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^2}^2 + \|n(\cdot,t)\|_{H^2}^2 + \|\varphi(\cdot,t)\|_{H^2}^2 \leqslant \rho_2^2, t \geqslant t_2 \tag{1.9.29}$$

证明 我们已有解依 H^1 模的一致估计。现对 t 充分大，估计 $\|\varepsilon_{xx}\|^2$，$\|n_{xx}\|^2$ 和 $\|\varphi_{xx}\|^2$。取式(1.9.1)和 $A\varepsilon_t+\gamma A\varepsilon$ 的内积，再取实部得

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\ (\varepsilon_{xx}, A\varepsilon_t + \gamma A\varepsilon) - \mathrm{Re}\ (n\varepsilon, A\varepsilon_t + \gamma A\varepsilon) - \\ &\mathrm{Re}\ (\beta|\varepsilon|^2\varepsilon + g, A\varepsilon_t + \gamma A\varepsilon) = 0\end{aligned} \tag{1.9.30}$$

因

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\ (\beta|\varepsilon|^2\varepsilon, \varepsilon_{xxt}) = \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\int\Big[\beta(|\varepsilon|_x^2)\varepsilon_x + \frac{1}{2}|\varepsilon|^2|\varepsilon_x|^2 + (\mathrm{Re}\ (\varepsilon\cdot\bar{\varepsilon}_x))^2\Big]\mathrm{d}x + \\ &\mathrm{Re}\int\beta[(|\varepsilon|_x^2)\varepsilon_t - \frac{1}{2}|\varepsilon_x|^2|\varepsilon|_t^2 + 2\mathrm{Re}\ (\varepsilon_x,\bar{\varepsilon}_t)\mathrm{Re}\ (\varepsilon\cdot\varepsilon_x) + \\ &2\mathrm{Re}\ (\varepsilon,\bar{\varepsilon}_t)|\varepsilon_x|^2]\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} + h_2\end{aligned} \tag{1.9.31}$$

其中

$$h_1 = \mathrm{Re}\ \beta\int\Big[(|\varepsilon|_x^2)\bar{\varepsilon}_x + \frac{1}{2}|\varepsilon|^2|\varepsilon_x|^2 + (\mathrm{Re}\ (\varepsilon\cdot\bar{\varepsilon}_{tx}))^2\Big]\mathrm{d}x \tag{1.9.32}$$

$$\begin{aligned}h_2 = \beta\int\Big[&\mathrm{Re}\ (|\varepsilon|^2)_x\varepsilon_t - \frac{1}{2}|\varepsilon_x|^2|\varepsilon|_t^2 + \\ &2\mathrm{Re}\ (\varepsilon_x\bar{\varepsilon}_t) + 2\mathrm{Re}\ (\varepsilon\bar{\varepsilon}_x)|\varepsilon_x|^2\Big]\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{1.9.33}$$

且

$$(g, A\varepsilon_t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g, A\varepsilon)$$

由式(1.9.30)可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{1}{2}|A\bar{\varepsilon}|^2 - h_1 + \mathrm{Re}\ (g, A\varepsilon)\Big] + \gamma|A\varepsilon|^2 - h_2 + \\ &\beta\gamma\mathrm{Re}\int(|\varepsilon|^2\varepsilon)_x\bar{\varepsilon}_x\mathrm{d}x + \mathrm{Re}\ \gamma(g, A\varepsilon) +\end{aligned}$$

$$\gamma \mathrm{Re} \int (n\bar{\varepsilon})_x \bar{\varepsilon}_x \mathrm{d}x + \mathrm{Re}\ (n\varepsilon, A\varepsilon_t) = 0 \tag{1.9.34}$$

另一方面，令 $m=n_t+\rho n$，取式(1.9.3)和 m 的内积，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{1}{2}\|m\|^2 + \frac{1}{2}\lambda\|An\|^2 + \frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}n|^2 +$$

$$\frac{1}{2}\int f'(n)|A^{\frac{1}{2}}n|^2\mathrm{d}x\Big] + (\alpha-\rho)\|m\|^2 + \mu\|A^{\frac{1}{2}}m|^2 -$$

$$\rho(\alpha-\rho)(n,m) - \mu\rho(An,m) + \rho\|A^{\frac{1}{2}}n\|^2 + \rho\lambda\|An\|^2 +$$

$$\int\Big[\rho|\varepsilon|_x^2 n_x - \frac{1}{2}f''(n)n_t|n_x|^2 + \rho f'(n)|n_x|^2\Big]\mathrm{d}x =$$

$$-(A|\varepsilon|^2, n_t) \tag{1.9.35}$$

选取 ρ 充分小，使式(1.9.15)成立，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{1}{2}\|m\|^2 + \frac{1}{2}\lambda\|An\|^2 + \frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}n\|^2 +$$

$$\frac{1}{2}\int f'(n)|A^{\frac{1}{2}}n|^2\mathrm{d}x\Big] + (\alpha-\rho)\|m\|^2 + \frac{3}{4}\rho\|A^{\frac{1}{2}}n\|^2 +$$

$$\rho\lambda\|An\|^2 + \frac{1}{2}\mu\|A^{\frac{1}{2}}m\|^2 +$$

$$\int\Big[\rho|\varepsilon|_x^2 n_x - \frac{1}{2}f''(n)n_t|n_x|^2 + \rho f'(n)|n_x|^2\Big]\mathrm{d}x \leqslant$$

$$-(A|\varepsilon|^2, n_t) \tag{1.9.36}$$

因

$$(-A|\varepsilon|^2, n_t) - 2\mathrm{Re}\ (n\varepsilon, A\varepsilon_t) =$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\int[-n|\varepsilon_x|^2 - n_x\varepsilon\bar{\varepsilon}_x]\mathrm{d}x + 2\mathrm{Re}\int n_x\varepsilon_t\bar{\varepsilon}_x\mathrm{d}x + n_t|\varepsilon_x|^2\mathrm{d}x \tag{1.9.37}$$

2×式(1.9.34)+式(1.9.36)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\|A\varepsilon\|^2 + \frac{1}{2}\|m\|^2 + \frac{1}{2}\lambda\|An\|^2 -$$

$$2\mathrm{Re}\ (g, A\varepsilon) - 2h_1 + h_3\Big] + 2\gamma\|\lambda\varepsilon\|^2 +$$

$$(\alpha-\rho)\|m\|^2+\rho\lambda\|An\|^2+\frac{1}{2}\mu\|A^{\frac{1}{2}}m\|^2-$$

$$2h_2+h_4+2\mathrm{Re}\,(g,A\varepsilon)\leqslant 0 \tag{1.9.38}$$

其中 h_1,h_2分别为式(1.9.32),式(1.9.33)所定义,

$$h_3=\frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}n\|^2+\frac{1}{2}\int f'(n)|A^{\frac{1}{2}}n|^2\mathrm{d}x+$$

$$\mathrm{Re}\int[n|\varepsilon_x|^2+2n_x\varepsilon\bar{\varepsilon}_x]\mathrm{d}x \tag{1.9.39}$$

$$h_4=\frac{3}{4}\rho\|A^{\frac{1}{2}}n\|^2+2\beta\gamma\mathrm{Re}\int(|\varepsilon|^2\varepsilon)_x\bar{\varepsilon}_x\mathrm{d}x+$$

$$2\gamma\mathrm{Re}\int(n\varepsilon)_x\bar{\varepsilon}_x\mathrm{d}x-2\mathrm{Re}\int n_x\varepsilon_t\bar{\varepsilon}_x\mathrm{d}x+$$

$$\int n_t|\varepsilon_x|^2\mathrm{d}x \tag{1.9.40}$$

令

$$\widetilde{H}(\varepsilon,n,\varphi)=\|A\varepsilon\|^2+\frac{1}{2}\|m\|^2+\frac{1}{2}\lambda\|An\|^2-$$

$$2\mathrm{Re}\,(g,A\varepsilon)-2h_1+h_3 \tag{1.9.41}$$

$$\widetilde{K}(\varepsilon,n,\varphi)=2\gamma\|A\varepsilon\|^2+(\alpha-\rho)\|m\|^2-\rho\lambda\|An\|^2+$$

$$2\mathrm{Re}\,(g,A\varepsilon)-2h_2+h_4 \tag{1.9.42}$$

则式(1.9.38)变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{H}(\varepsilon,n,\varphi)+\widetilde{K}(\varepsilon,n,\varphi)+\frac{1}{2}\mu\|A^{\frac{1}{2}}m\|^2\leqslant 0 \tag{1.9.43}$$

现继续估计 $\widetilde{H}(\varepsilon,n,\varphi)$和 $\widetilde{K}(\varepsilon,n,\varphi)$,由命题1.9.2可知,存在一常数 ρ_1',使得

$$\|\varepsilon(\cdot,t)\|_{H_0^1}^2+\|n(\cdot,t)\|_{H_0^1}^2+\|\varphi(\cdot,t)\|_{H_0^1}^2\leqslant\rho_1'^2$$

由嵌入定理可知,存在一常数 ρ''_1,它依赖于$\|g\|$,使得

$$\|\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)},\|n(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)},\|\varphi(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant\rho''_1$$

由 h_1,h_3的定义,有

$$|h_1|\leqslant C\rho''_1\int|\varepsilon_x|^2\mathrm{d}x\leqslant\rho_1^{(3)},t\geqslant T_1(R) \tag{1.9.44}$$

$$|h_3| \leqslant C\rho_1' + C(\rho''_1) \leqslant \rho_1^{(4)}, t \geqslant T_2(R) \qquad (1.9.45)$$

其中 $\rho_1^{(3)}, \rho_1^{(4)}$ 仅依赖于 $\|\boldsymbol{g}\|$。如同 h_2, h_1，我们有

$$|h_2| \leqslant C\rho''_1 \int |\boldsymbol{\varepsilon}_x|^2 |\boldsymbol{\varepsilon}_t| \mathrm{d}x, \quad t \geqslant T(R) \qquad (1.9.46)$$

$$|h_1| \leqslant C\rho_1' + C_2 \int |\boldsymbol{\varepsilon}_x| |n_x| |\boldsymbol{\varepsilon}_t| \mathrm{d}x + C_3 \int |n_t| |\boldsymbol{\varepsilon}_x|^2 \mathrm{d}x \qquad (1.9.47)$$

记 $\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathrm{i}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1 = -\mathrm{i}n\boldsymbol{\varepsilon} - \mathrm{i}\beta|\boldsymbol{\varepsilon}|^2\boldsymbol{\varepsilon} - \gamma\boldsymbol{\varepsilon} - \mathrm{i}\boldsymbol{g} \in L^\infty(0,\infty;L^2)$。将 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 的上述表示式代入式(1.9.46)，得

$$|h_2| \leqslant C\rho''_1 \int |\boldsymbol{\varepsilon}_x|^2 |\Delta\boldsymbol{\varepsilon}| \mathrm{d}x + C\rho''_1 \int |\boldsymbol{b}_1| |\boldsymbol{\varepsilon}_x|^2 \mathrm{d}x \leqslant$$

$$C\|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\| \|\boldsymbol{\varepsilon}_x\|_{L^4}^2 + C\|\boldsymbol{b}_1\| \|\boldsymbol{\varepsilon}_x\|_{L^4}^2 \leqslant C\|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\|^{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_x\|^{\frac{3}{2}} +$$

$$C\|\boldsymbol{b}_1\| \|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\|^{\frac{1}{2}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_x\|^{\frac{3}{2}} \leqslant \theta\|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 + C(\theta), \quad \forall\, \theta \geqslant 0 \qquad (1.9.48)$$

其中，我们用到了嵌入定理，C 仅依赖于 $\|\boldsymbol{g}\|$。类似地，因 $m = n_t + \rho n$ 有

$$|h_1| \leqslant C + C\int |\boldsymbol{\varepsilon}_x| |n_x| |\Delta\boldsymbol{\varepsilon}| \mathrm{d}x + C\int |\boldsymbol{\varepsilon}_x| |n_x| |\boldsymbol{b}_1| \mathrm{d}x +$$

$$C\int |m| |\boldsymbol{\varepsilon}_x|^2 \mathrm{d}x + C\int |n| |\boldsymbol{\varepsilon}_x|^2 \mathrm{d}x \leqslant C +$$

$$C\|A\boldsymbol{\varepsilon}\| \|\boldsymbol{\varepsilon}_x\|_{L^4} \|n_x\|_{L^4} + C|\boldsymbol{b}_1| \|\boldsymbol{\varepsilon}_x\|_{L^4} \|n_x\|_{L^4} +$$

$$C\|m\| \|\boldsymbol{\varepsilon}_x\|_{L^4}^2 \leqslant C +$$

$$C\|A\boldsymbol{\varepsilon}\| \|A\boldsymbol{\varepsilon}\|^{\frac{1}{4}} \|An\|^{\frac{1}{4}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_x\|^{\frac{3}{4}} \|n_x\|^{\frac{3}{4}} +$$

$$C|\boldsymbol{b}_1| \|A\boldsymbol{\varepsilon}\|^{\frac{1}{4}} \|An\|^{\frac{1}{4}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_x\|^{\frac{3}{4}} \|n_x\|^{\frac{3}{4}} +$$

$$C\|m\| \|A\boldsymbol{\varepsilon}\|^{\frac{1}{2}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_x\|^{\frac{3}{2}} \leqslant C + \theta_1\|A\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 +$$

$$\theta_2\|m\|^2 + \theta_3\|An\|^2, \quad \forall\, \theta_1, \theta_2, \theta_3 \geqslant 0 \qquad (1.9.49)$$

其中 C 仅依赖于 $\theta_i (i=1,2,3)$ 和 $\|\boldsymbol{g}\|$。如选取 $\theta, \theta_i (i=1,2,3)$ 充分小，则由 $\widetilde{H}, \widetilde{K}$ 的定义可知，存在常数 $C_0 \geqslant 0, C_1 \geqslant 0$，使得 $C_0\widetilde{H} - \widetilde{K} \leqslant C_1$。于是由式(1.9.43)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{H}+C_0\tilde{H}+\frac{1}{2}\mu\|Am\|^2\leqslant C_1,\quad \forall t\geqslant T_1(R) \tag{1.9.50}$$

由 Gronwall 不等式

$$\tilde{H}(\varepsilon,n,\varphi)\leqslant \mathrm{e}^{-C_0(t-T_1)}\tilde{H}(\varepsilon,n,\varphi)(T_1)+C_1(1-\mathrm{e}^{-C_0(t-T_1)}) \tag{1.9.51}$$

因

$$\tilde{H}\geqslant(1-\theta)\|A\varepsilon\|^2+\frac{1}{2}\|m\|^2+\frac{\lambda}{2}\|An\|^2-C$$

其中$0<\theta<1$。C 仅依赖于$\|g\|$和 ρ'_1。由此推出命题成立。

现考虑半群 $S(t)u_0$的长时间行态，作为命题1.9.2的推论，有

推论1.9.1 集合

$$B_1=\{(\varepsilon,n,\varphi)\in V^3=H_0^1\times H_0^1\times H_0^1,$$
$$\|\varepsilon(\cdot,t)\|_{H_0^1}^2+\|n(\cdot,t)\|_{H_0^1}^2+\|\varphi(\cdot,t)\|_{H_0^1}^2\leqslant\rho_1^2\}$$

是 $S(t)$在 V^3中的有界吸收集，而

$$B_2=\{(\varepsilon,n,\varphi)\in D(A),$$
$$\|\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^2}^2+\|n(\cdot,t)\|_{H^2}^2+\|\varphi(\cdot,t)\|_{H^2}^2\leqslant\rho_2^2\}$$

是 $S(t)$在 $D(A)$中的有界吸收集。

现考虑 B_1在 V^3中和 B_2在 $D(A)$中的 ω 极限集，令

$$\omega^w(B_2)=\bigcap_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant s}S(t)B_2}$$

其中"——"表示依 $D(A)^3$中弱拓扑下的闭包。令

$$\omega^w(B_1)=\bigcap_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant s}S(t)B_1}$$

其中"——"表示依 V^3弱拓扑下的闭包。依文献[80]中所述的有关定理，我们有

定理1.9.2 集合 $\mathscr{A}=\omega^w(B_2)$满足

(i) $\mathscr{A}$ 是弱紧的，且在 $D(A)$中是有界的。

$$S(t)\mathscr{A}=\mathscr{A},\forall t\in\mathbf{R}$$

(ii) 对任何在 $D(A)$中的有界集

$$\lim_{t\to\infty} d_{\mathrm{H}}^w(S(t)B,\mathscr{A})=\lim_{t\to\infty}\sup_{x\in B}\inf_{y\in\mathscr{A}}d^w(S(t)x,y)\to 0$$

(iii) 依 $D(A)$弱拓扑下，$\mathscr{A}$ 是连通的。

推论1.9.2 对于在 $D(A)$中的任何有界集 B,集合 $S(t)B$ 依 V^3模收敛于 $\mathscr{A}$。

在 $D(A)$中不变集的维数

设 $\xi_0=(\varepsilon_0,n_0,\varphi_0)\in V\times V\times V$ 给定,令 $S(t)\xi_0=(\varepsilon(\cdot,t),n(\cdot,t),\varphi(\cdot,t))$为问题(1.9.1)～(1.9.5)的解生成的半群。考虑如下的变分方程组

$$\mathrm{i}U_t+U_{xx}-nU-V\varepsilon-\beta|\varepsilon|^2U-2\beta\mathrm{Re}\,(\bar{\varepsilon}U)\varepsilon+\mathrm{i}\gamma U=0 \tag{1.9.52}$$

$$V_t=W_{xx} \tag{1.9.53}$$

$$W_t=V+f'(n)V+\mu V-\lambda\Delta V-\alpha W+2\mathrm{Re}\,(\bar{\varepsilon}U) \tag{1.9.54}$$

及初边值条件

$$U(0)=u_0,V(0)=v_0,W(0)=w_0 \tag{1.9.55}$$

$$U(0,t)=U(L,t)=V(0,t)=V(L,t)=W(0,t)=W(L,t)=0 \tag{1.9.56}$$

我们容易证明当$(u_0,v_0,w_0)\in V\times V\times V$,线性问题(1.9.52)～(1.9.56)具有唯一解 $\tilde{U}(t)=(U(t),V(t),W(t))\in C(\mathbf{R},V^3)$。利用能量估计的方法,可以证明

命题1.9.4 半群算子 $S(t)\xi_0=(\varepsilon(t),n(t),\varphi(t))$在 $V\times V\times V$ 上是可微的,且它的微分就是线性映照 $\eta_0=(u_0,v_0,w_0)\in V^3\to\tilde{U}(t)=(U(t),V(t),W(t))$即 $DS(t)\xi_0=\tilde{U}(t)$。

令 $u=\mathrm{e}^{\gamma t}U,v=\mathrm{e}^{\gamma t}V,w=\mathrm{e}^{\gamma t}W$,则式(1.9.52)～(1.9.54)为

$$\mathrm{i}u_t+u_{xx}-v\varepsilon-nu-\beta|\varepsilon|^2u-2\beta(\varepsilon u)\varepsilon=0 \tag{1.9.57}$$

$$v_t=w_{xx}+\gamma v \tag{1.9.58}$$

$$w_t=v+f'(n)v+\mu v_t-\mu\gamma v-\lambda\Delta v-(\alpha-\lambda)w+2\mathrm{Re}\,(\bar{\varepsilon}u) \tag{1.9.59}$$

式(1.9.57)乘以 $\bar{u}$在 Ω 上积分,取实部,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{1}{2}\|u_x\|^2 + \frac{1}{2}\int n|u|^2\mathrm{d}x + \beta\int|\varepsilon|^2|u|^2\mathrm{d}x +$$

$$\beta\int[\mathrm{Re}\ (\bar{\varepsilon}u)]^2\mathrm{d}x + \int v\varepsilon\bar{u}\,\mathrm{d}x\Big] -$$

$$\int\frac{1}{2}n_t|u|^2\mathrm{d}x - \beta\int(|\varepsilon|_t^2)|u|^2\mathrm{d}x -$$

$$\beta\int\mathrm{Re}\ (\bar{\varepsilon}u)\mathrm{Re}\ (\bar{\varepsilon}_t u)\mathrm{d}x - \mathrm{Re}\int[v\varepsilon_t\bar{u} + \varepsilon\bar{u}\,v_t]\mathrm{d}x = 0$$

(1.9.60)

式(1.9.58)乘以 v_t,式(1.9.59)乘以 w_t 在 Ω 上积分再相加,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{1}{2}\lambda\|v_x\|^2 + \frac{1}{2}\|w_x\|^2 +$$

$$\int(\frac{1}{2}(1 + f'(n))|v|^2 - \gamma(v,w))\mathrm{d}x\Big] -$$

$$\frac{1}{2}\int f''(n)n_t|v|^2\mathrm{d}x + \mu\|v_t\|^2 -$$

$$(\alpha - 2\gamma)(w,v_t) + 2\mathrm{Re}\int v_t\varepsilon\bar{u}\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (1.9.61)$$

式(1.9.60)+式(1.9.61),得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\|u_x\|^2 + \frac{1}{2}\lambda\|v_x\|^2 + \frac{1}{2}\|w_x\|^2 + \frac{1}{2}\int[n|u|^2 +$$

$$2\beta|\varepsilon|^2|u|^2 + 2\beta(\mathrm{Re}\ (\bar{\varepsilon}u))^2 + 2\mathrm{Re}\ v\varepsilon\bar{u}] +$$

$$\int\Big[\frac{1}{2}(1 + f'(n))|v|^2 - \frac{1}{2}\mu\gamma|v|^2 - \gamma(v,w)\Big]\mathrm{d}x\Big\} -$$

$$\int\Big[-n_t|u|^2 - 2\beta(|\varepsilon|^2)_t|u|^2 - 2\beta\mathrm{Re}\ (\bar{\varepsilon}_t u) -$$

$$2v\varepsilon_t\bar{u} - \frac{1}{2}f''(n)n_t|v|^2\Big]\mathrm{d}x + \mu\|v_t\|^2 - (\alpha - 2\gamma)(w,v_t) = 0$$

(1.9.62)

令

$$J(\eta) = J(u,v,w) = \frac{1}{2}\|u_x\|^2 + \frac{1}{2}\lambda\|v_x\|^2 +$$

$$\frac{1}{2}\|w_x\|^2 + J_1 \qquad (1.9.63)$$

其中

$$J_1 = \int\left\{\frac{1}{2}n|u|^2 + \beta|\varepsilon|^2|u|^2 + \beta(\mathrm{Re}\ (\bar{\varepsilon}u))^2 + \mathrm{Re}\ (v\varepsilon\bar{u}) + \frac{1}{2}(1 + f'(n))|v|^2 - \frac{1}{2}\mu\gamma|v|^2 - \gamma(v,w)\right\}\mathrm{d}x \tag{1.9.64}$$

令

$$I(\eta) = I(u,v,w) = -\mu\|v_t\|^2 + (\alpha - 2\lambda)(w,v_t) + I_1 \tag{1.9.65}$$

其中

$$I_1(\eta) = \int\{n_t|u|^2 + 2\beta(|\varepsilon|^2)_t|u|^2 + 2\beta\mathrm{Re}\ (\bar{\varepsilon}u)\mathrm{Re}\ (\bar{\varepsilon}_t u) + 2\mathrm{Re}\ (v\varepsilon_t\bar{u}) + \frac{1}{2}f''(n)n_t|v|^2\}\mathrm{d}x \tag{1.9.66}$$

则(1.9.62)变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J(\eta) = I(\eta) \tag{1.9.67}$$

另一方面

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2 = 2\mathrm{Im}\int\varepsilon\bar{u}\ v\mathrm{d}x + 2\beta\int\mathrm{Re}\ (\varepsilon\bar{u})\mathrm{Im}\ (\varepsilon\bar{u})\mathrm{d}x \tag{1.9.68}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\lambda\|v\|^2 + \frac{1}{2}\|w\|^2\right) = -\mu\|w_x\|^2 + \lambda\gamma\|v\|^2 - (\alpha - \gamma)\|w\|^2 - 2\mathrm{Re}\ (\varepsilon u,w) + \int(1 + f'(n))vw\mathrm{d}x \tag{1.9.69}$$

令

$$J_\sigma(\eta) = J_\sigma(u,v,w) = J(\eta) + \sigma\|u\|^2 + \sigma(\lambda\|v\|^2 + \|w\|^2) \tag{1.9.70}$$

$$I_\sigma(\eta) = I_\sigma(u,v,w) = I(\eta) + \sigma I_2 - 2\sigma\mu\|\sigma w\|^2$$

(1.9.71)

其中

$$I_2 = 2((1+f'(n))v,w) + 2\lambda\gamma\|v\|^2 - 2(a-\lambda)\|w\|^2 -$$

$$4\mathrm{Re}\ (\varepsilon\bar{u},w) + 2\mathrm{Im}\int\varepsilon\bar{u}\ v\mathrm{d}x + 2\beta\int\mathrm{Re}\ (\varepsilon\bar{u})\ \mathrm{Im}\ (\bar{\varepsilon}u)\mathrm{d}x$$

(1.9.72)

则可得到能量等式

$$\frac{\mathrm{d}J_\sigma(\eta)}{\mathrm{d}t} = I_\sigma(\eta) \qquad (1.9.73)$$

设 X 为 $S(t)$在 $D(A)^3$中的有界不变集，即

$$S(t)X = X, \quad \forall t \geqslant 0$$

X 在 $D(A)^3$中有界。$\xi_0 \in X, S(t)\xi_0 = (\varepsilon(t), n(t), \varphi(t)) \in X$

$$|X|_\infty = \sup_{\xi_0\in X}[|\varepsilon(t)|_\infty +$$

$$|n(t)|_\infty + |\varphi(t)|_\infty] < \infty$$

其中$|\cdot|_\infty = \sup_t\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$，由式(1.9.71)中 J_σ 的定义，可知存在$\sigma \geqslant 0, C_0, C_1 \geqslant 0$，使得

$$C_0(\|u\|_V^2 + \|v\|_V^2 + \|w\|_V^2) \leqslant J_\sigma(u,v,w) \leqslant$$

$$C_1(\|u\|_V^2 + \|v\|_V^2 + \|w\|_V^2), \quad \forall\ (u,v,w) \in V\times V\times V$$

(1.9.74)

因此 $J_\sigma(u,v,w)$是在 $V\times V\times V$ 上的一种等价模。现引入 R-线性内积在 V^3上，设 $\eta = (\eta_1,\eta_2,\eta_3), \xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in V\times V\times V$。定义

$$\Psi(\eta,\xi) = \mathrm{Re}\int\Big[\eta_{1x}\bar{\xi}_{1x} + \frac{1}{2}\lambda\eta_{2x}\bar{\xi}_{2x} + \frac{1}{2}\eta_{3x}\bar{\xi}_{3x} + \frac{1}{2}n\eta_1\bar{\xi}_1 +$$

$$\beta\|\varepsilon\|^2\eta_1\bar{\xi}_1 + \beta\mathrm{Re}\ (\bar{\varepsilon}\eta_1)\mathrm{Re}\ (\varepsilon\xi_1) + \frac{1}{2}(1+f'(n))\eta_2\bar{\xi}_2 -$$

$$\frac{1}{2}\mu\gamma\eta_2\bar{\xi}_2\Big]\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\mathrm{Re}\ (\eta_2\varepsilon\xi_2 + \eta_1\varepsilon\xi_1)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\gamma\int(\eta_2\xi_3 +$$

$$\eta_3\xi_2)\mathrm{d}x + \sigma\mathrm{Re}\int\eta_1\bar{\xi}_1\mathrm{d}x + \sigma\int\mathrm{Re}\,[\lambda\eta_2\bar{\xi}_2 + \eta_3\bar{\xi}_3]\mathrm{d}x \qquad (1.9.75)$$

容易验证 $\Psi(\eta,\xi)$ 为在 $V^3\times V^3$ 上的一个双线性型，且 $\Psi(\eta,\eta)=J_\sigma(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$。由式(1.9.74)可知它是强制的。因此 $\Psi(\eta,\eta)^{\frac{1}{2}}$ 是在 $V\times V\times V$ 上的等价模。

设 $\xi_0^j=(u_{0j},v_{0j},w_{0j})(j=1,2,\cdots,m)$ 为在 $V\times V\times V$ 上的 m 个元素，$\xi^j(t)(j=1,2,\cdots,m)$ 为相应的问题(1.9.52)～(1.9.56)的解，即 $\xi^j(t)=(u^j(t),v^j(t),w^j(t))=(DS(t)\xi_0)\xi_0^j$。令 $\eta^i(t)=e^{\gamma t}\xi^i(t)(i=1,2,\cdots,m)$。则 $\eta^i(t)=(u_i(t),v_i(t),w_i(t))$ 为问题(1.9.57)～(1.9.59)具初值 $\eta^i(0)=(u_i(0),v_i(0),w_i(0))=\xi_0^i$ 的解。现考察如下体积量的变化：

$$|\xi^1(t)\wedge\xi^2(t)\wedge\cdots\wedge\xi^m(t)|_{\wedge^m(V^3)}=\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}(\xi^i,\xi^j)_{V^3} \qquad (1.9.76)$$

其中 $(\cdot,\cdot)_{V^3}$ 为具有式(1.9.75)确定的内积 $\psi(\cdot,\cdot)$。我们有如下定理

定理1.9.3　设 X 为 $D(A)^3$ 上的有界不变集，则存在常数 $C_1,C_2\geqslant0$，使得对任何 $\xi_0=(\varepsilon_0,n_0,\varphi_0)\in X$，$\xi^i(t)=(DS(t)\xi_0)\xi_0^i$ 满足

$$|\xi^1(t)\wedge\xi^2(t)\wedge\cdots\wedge\xi^m(t)|_{\wedge^m(V^3)}\leqslant$$
$$|\xi_0^1\wedge\xi_0^2\wedge\cdots\wedge\xi_0^m|_{\wedge^m(V^3)}\cdot C_1^m e^{(C_2-m\gamma)t} \qquad (1.9.77)$$

其中常数 C_1 和 C_2 依赖于系数 α,β,γ,μ 和 λ。 $m\geqslant1,t\geqslant0$。

证明　首先，注意到

$$|\xi^1(t)\wedge\xi^2(t)\wedge\cdots\wedge\xi^m(t)|^2_{\wedge^m(V^3)}=$$
$$e^{-2\gamma mt}|\eta^1(t)\wedge\eta^2(t)\wedge\cdots\wedge\eta^m(t)|_{\wedge^m(V^3)}=$$
$$e^{-2\gamma mt}\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}\Psi(\eta^i(t),\eta^j(t)) \qquad (1.9.78)$$

因此，仅需估计 $\det\limits_{1\leqslant i,j\leqslant m}\Psi(\eta^i(t),\eta^j(t))$。令

$$H_m(t)=\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}\Psi(\eta^i(t),\eta^j(t))$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_m(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}\Psi(\eta^i(t),\eta^j(t)) -$$

$$\sum_{l=1}^{m}\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}\Psi(\eta^i(t),\eta^j(t))_l \qquad (1.9.79)$$

其中

$$\Psi(\eta^i(t),\eta^j(t))_l = (1-\delta_{jl})\Psi(\eta^i,\eta^j) + \delta_{jl}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(\eta^i(t),\eta^j(t))$$

$$(1.9.80)$$

$\Psi(\cdot,\cdot)$为在 V^3上的 R-线性内积。因此

$$\Psi(\eta^i(t),\eta^j(t)) = \frac{1}{4}[\Psi(\eta^i+\eta^j,\eta^i+\eta^j) - \Psi(\eta^i-\eta^j,\eta^i-\eta^j)]$$

则由式(1.9.75),有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(\eta^i(t),\eta^j(t)) = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_\sigma(\eta^i(t)+\eta^j(t)) -$$

$$\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_\sigma(\eta^i(t)-\eta^j(t)) = \frac{1}{4}[I_\sigma(\eta^i+\eta^j) - I_\sigma(\eta^i-\eta^j)]$$

由文献[13]中引理3.2,从式(1.9.79)~(1.9.80)可得

$$\frac{\mathrm{d}H_m(t)}{\mathrm{d}t} = H_m(t)\sum_{l=1}^{m}\max_{F\subset\mathbf{R}^m,\dim F=l}\ \min_{x\neq 0,x\in F}\frac{I_\sigma\left(\sum_{j=1}^{m}x_j\eta^j(t)\right)}{J_\sigma\left(\sum x_j\eta^j(t)\right)}$$

$$(1.9.81)$$

由定义(1.9.71),有

$$I_\sigma\left(\sum x_j\eta^j(t)\right) = I_\sigma\left(\sum x_ju_j,\sum x_jv_j,\sum x_jw_j\right) =$$

$$-\mu\|\sum x_jv_{jt}\|^2 + (\alpha-2\gamma)\left(\sum x_jw_j,\sum x_jv_{jt}\right) -$$

$$I_1\left(\sum x_j\eta^j(t)\right) - \mu\sigma\|\sum x_jw_{jt}\|^2 + \sigma I_2\left(\sum x_j\eta^j(t)\right) \leqslant$$

$$C\|\sum x_jw_j\|^2 + \left|I_1\left(\sum x_j\eta^j(t)\right)\right| + \sigma\left|I_2\left(\sum x_j\eta^j(t)\right)\right|$$

由式(1.9.74)和式(1.9.72),存在 $C_3\geqslant 0$,使得

$$I_\sigma\left(\sum x_j\eta^j(t)\right) \leqslant C_3\left\|\sum x_j\eta^j(t)\right\|_{V^3}^{\frac{1}{2}}\left\|\sum x_j\eta^j(t)\right\|^{\frac{3}{2}} \tag{1.9.82}$$

另一方面，由式(1.9.74)有

$$I_\sigma\left(\sum x_j\eta^j(t)\right) \geqslant C_0\left\|\sum x_j\eta^j(t)\right\|_{V^3}^2 \tag{1.9.83}$$

从式(1.9.81)、(1.9.82)、(1.9.83)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_m(t) \leqslant$$

$$\frac{C_3}{C_0}H_m(t)\sum_{l=1}^{m}\max_{F\subset\mathbf{R}^m,\dim F=l}\min_{x\neq 0,x\in F}\frac{\left\|\sum x_j\eta^j(t)\right\|^{\frac{3}{2}}}{\left\|\sum x_j\eta^j(t)\right\|_{V^3}^{\frac{3}{2}}} \leqslant$$

$$\frac{C_3}{C_0}H_m(t)\sum\max_{F\subset\mathbf{R}^m,\dim F=l}\min_{x\neq 0,x\in F}$$

$$\left(\frac{\left\|\sum x_ju_j\right\|}{\left\|\sum x_ju_j\right\|_V}+\frac{\left\|\sum x_jv_j\right\|}{\left\|\sum x_jv_j\right\|_V}+\frac{\left\|\sum x_jw_j\right\|}{\left\|\sum x_jw_j\right\|_V}\right)^{\frac{3}{2}} \leqslant$$

$$\frac{C_3}{C_0}H_m(t)\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{3}{\sqrt{\lambda_l}}\right)^{\frac{3}{2}} \leqslant \frac{\sqrt{27}}{C_0}C_3\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{\lambda_l^{\frac{3}{4}}}H_m(t) \tag{1.9.84}$$

其中我们用到极大极小原理，λ_l 为 $A=-\partial_{xx}$的第 l 个特征值。我们知道，$\lambda_l\sim Cl^2(l\to\infty)$。因此存在常数 C_2使得

$$\frac{\mathrm{d}H_m(t)}{\mathrm{d}t} \leqslant C_2H_m(t) \tag{1.9.85}$$

因此，$H_m(t)\leqslant \mathrm{e}^{2C_2t}H_m(0)$，$t\geqslant 0$，联系式(1.9.78)，即得式(1.9.77)。

由定理1.9.3，有

定理1.9.4 定理1.9.2所确定的整体吸引子 $\mathscr{A}$ 具有有限的 Hausdorff 和分形维数。

证明 如在 V^3引入内积 $\Psi(\cdot,\cdot)$，则由定理1.9.3，有

$$\omega(DS(t)\xi_0) \leqslant C^m \exp\ (C_2 - \gamma m)t,\ \forall\ \xi_0 \in \mathscr{A}$$

其中 ω_m 为 Lyapunov 指数。当 m 充分大时，$\bar{\omega}_m(\mathscr{A})<1$，这里 $\bar{\omega}(\mathscr{A})$为 $\mathscr{A}$ 的一致 Lyapunov 指数。从文献[80]中的定理 V. 31 可知，$\mathscr{A}$ 具有有限的Hausdorff 和分形维数。由于等价的刚性，它也具有相同的 Hausdorff 和分形维数。定理 1. 9. 4 证毕。

1. 10 一种证明强拓扑吸引子的新方法

1995 年，郭、吴在文献[12]中研究了无界域上具线性耗散的 Benjamin-Ono 方程(BO)的整体吸引子，证明了在 $H^1(\mathbf{R})$上强紧吸引子的存在性。文中提出了一种使弱紧吸引子成为强紧吸引子的重要方法，即对一类具有广义能量守恒积分的非线性发展方程，证明了解序列弱收敛实际上等价于按模收敛，从而证明了 BO 方程强紧吸引子的存在性。这与 J. Ball，J. M. Ghidaglia 文献[216]关于 KdV 方程存在强紧吸引子和证明思想是一致的，且几乎同时发现的。现在这种方法颇受关注并广为应用，如对二维 Davey-Stewartson 方程组得到了很好的结果。

现考察如下具弱耗散的 Benjamin－Ono 方程的柯西问题(BO)

$$u_t + Hu_{xx} + (u^2)_x + C_0 u = f, x \in \mathbf{R}, t > 0 \qquad (1.10.1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbf{R} \qquad (1.10.2)$$

其中：$C_0>0$ 为常数；C_0u 表示零级耗散效应；f 为外力，它与 t 无关；H 为 Hilbert 变换。即

$$H(\phi) = \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(y)}{y-x} \mathrm{d}y$$

其中 P 表示柯西积分主值。如，$C_0=0$，方程(1.10.1)为众所周知的 Benjamin-Ono 方程，它在物理上描写长波长内波在流上的传播，它具有孤立子解，和孤立子解所具有的许多重要特征，见文献

[14]。(BO)问题及其推广形式的整体光滑解的存在性,唯一性已经很好解决,如见文献[15,16]。

为了证明(BO)问题弱紧吸引子的存在性,现做必要的一致性先验估计。首先,对于 Hilbert 变换,对任何 $f,g\in L^2(\mathbf{R})$,我们有:

$$H^2f=-f,H(fg)=H(HfHg)+fHg+gHf \tag{1.10.3}$$

$$(f,Hg)=-(Hf,g),(Hf,f)=0 \tag{1.10.4}$$

$$(Hf,Hg)=(f,g),\|Hf\|=\|f\| \tag{1.10.5}$$

$$Hf_x=(Hf)_x,\forall f\in H^1(\mathbf{R}) \tag{1.10.6}$$

乘式(1.10.1)以 u 在 $\mathbf{R}$ 上分部积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+C_0\|u\|^2=(f,u) \tag{1.10.7}$$

由此可得

$$\|u(t)\|^2\leqslant \mathrm{e}^{-C_0t}\|u_0\|^2+\frac{1}{C_0^2}(1-\mathrm{e}^{-C_0t})\|f\|^2 \tag{1.10.8}$$

因此,对于 $t\geqslant t_0=\dfrac{2}{C_0}\ln\dfrac{C_0\|u_0\|}{\|f\|}$,有

$$\|u(t)\|^2\leqslant\frac{2}{C_0^2}=A_1 \tag{1.10.9}$$

为了得到 H^1 估计,式(1.10.1)乘以 u_{xx},部分积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_x\|^2+C_0\|u_x\|^2=(f_x,u_x)+\int(u^2)_xu_{xx}\mathrm{d}x \tag{1.10.10}$$

式(1.10.1)$\times u^3$ 对 x 在 $\mathbf{R}$ 上积分得

$$\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^4}^4-C_0\|u\|_{L^4}^4+\int u^3Hu_{xx}\mathrm{d}x+\int(u^2)_xu^3\mathrm{d}x=(f,u^3) \tag{1.10.11}$$

利用式(1.10.4)性质,上述方程可简化为

$$\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^4}^4+C_0\|u\|_{L^4}^4=3\int u^2u_xHu_x\mathrm{d}x+(f,u^3) \tag{1.10.12}$$

进一步

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int u^2 Hu_x \mathrm{d}x = 2\int uu_t Hu_x \mathrm{d}x + u^2 Hu_{xt}\mathrm{d}x = -2\int uHu_x[Hu_{xx} +$$

$$C_0 u + (u^2)_x - f]\mathrm{d}x - \int Hu^2 u_t\, \mathrm{d}x = 2\int fuHu_x \mathrm{d}x -$$

$$2C_0\int u^2 Hu_x \mathrm{d}x - 2\int u(u^2)_x Hu_x \mathrm{d}x - 2\int uHu_x Hu_{xx}\mathrm{d}x +$$

$$\int Hu^2[Hu_{xx} + (u^2)_{xx} + C_0 u_x - f_x]\mathrm{d}x = 2\int fuHu_x \mathrm{d}x -$$

$$3C_0\int u^2 Hu_x \mathrm{d}x - 4\int u^2 Hu_x \mathrm{d}x + \int (u^2)_x u_{xx}\mathrm{d}x +$$

$$\int u_x (Hu_x)^2 \mathrm{d}x + \int u^2 Hf_x \mathrm{d}x \tag{1.10.13}$$

注意到

$$H(u_x Hu_x) = H(Hu_x H^2 u_x) + u_x H^2 u_x + (Hu_x)^2 \tag{1.10.14}$$

可得

$$(Hu_x)^2 = u_x^2 + 2H(u_x Hu_x) \tag{1.10.15}$$

因此

$$\int u_x (Hu_x)^2 \mathrm{d}x = 2\int u_x H(u_x Hu_x)\mathrm{d}x + \int u_x^3 \mathrm{d}x =$$

$$-2\int u_x (Hu_x)^2 \mathrm{d}x - 2\int uu_x u_{xx}\mathrm{d}x \tag{1.10.16}$$

由此推得

$$\int u_x (Hu_x)^2 \mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int (u^2)_x u_{xx}\mathrm{d}x \tag{1.10.17}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int u^2 Hu_x \mathrm{d}x = 2\int fuHu_x \mathrm{d}x - 3C_0\int u^2 Hu_x \mathrm{d}x -$$

$$4\int u^2 u_x Hu_x \mathrm{d}x + \int u^2 Hf_x \mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int (u^2)_x u_{xx}\mathrm{d}x \tag{1.10.18}$$

联系式(1.10.9)、(1.10.10)和式(1.10.18)，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|u_x\|^2 - 3\int u^2 Hu_x \mathrm{d}x - \|u\|_{L^4}^4 + 2C_0\|u_x\|^2 -$$

$$4C_0\|u\|_{L^4}^4] = 2(f_x,u_x) - 6\int fuHu_x\mathrm{d}x + 9C_0\int u^2Hu_x\mathrm{d}x -$$
$$3\int u^2Hf_x\mathrm{d}x - 4(f,u^3) \tag{1.10.19}$$

由 Gagliado-Nirenberg 不等式，有

$$\|u\|_{L^4}^4 \leqslant C\|u\|^{\frac{3}{4}}\|u_x\|^{\frac{1}{4}},\ \|u\|_{L^6} \leqslant$$
$$C\|u\|^{\frac{2}{3}}\|u_x\|^{\frac{1}{3}},\ \forall u \in H^1(\mathbf{R}) \tag{1.10.20}$$

因此

$$\int u^2Hu_x\mathrm{d}x \leqslant \|u\|_{L^4}^2\|u_x\| \leqslant \|u\|^{\frac{3}{2}}\|u_x\|^{\frac{3}{2}} \tag{1.10.21}$$

$$\int fuHu_x\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_{L^4}\|u\|_{L^4}\|u_x\| \leqslant C\|f\|_{H^1}\|u\|^{\frac{1}{4}}\|u_x\|^{\frac{5}{4}} \tag{1.10.22}$$

$$\int u^2Hf_x\mathrm{d}x \leqslant C\|f_x\|\ \|u\|^{\frac{3}{2}}\|u_x\|^{\frac{1}{2}} \tag{1.10.23}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|u_x\|^2 - 3\int u^2Hu_x\mathrm{d}x - \|u\|_{L^4}^4] + 2C_0[\|u_x\|^2 -$$
$$3\int u^2Hu_x\mathrm{d}x - \|u\|_{L^4}^4] = 2(f_x,u_x) + 2C_0\|u\|_{L^4}^4 +$$
$$3C_0\int u^2Hu_x\mathrm{d}x - 3\int u^2Hf_x\mathrm{d}x - 6\int fuHu_x\mathrm{d}x - 4(f,u^3) \leqslant$$
$$C[\|f_x\|^2 + \|u\|^6 + \|f_x\|^{\frac{4}{3}}\|u\|^2 + \|f\|^{\frac{8}{3}}\|u\|^2 +$$
$$\|f\|^2\|u\|^4] \tag{1.10.24}$$

由此可得

$$\|u_x\|^2 - 3\int u^2Hu_x\mathrm{d}x - \|u\|_{L^4}^4 \leqslant (\|u_{0x}\|^2 - 3\int u_0^2Hu_{0x}\mathrm{d}x -$$
$$\|u_0\|_{L^4}^4)\mathrm{e}^{-C_0t} + C\int_0^t[\|f_x\|^2 + \|u\|^6 + \|f_x\|^{\frac{4}{3}}\|u\|^2 +$$
$$\|f\|^{\frac{8}{3}}\|u\|^2 + \|f\|^2\|u\|^4]\mathrm{e}^{-C_0(t-s)}\mathrm{d}s \tag{1.10.25}$$

对于 $t\leqslant t_0$，有

$$\|u_x\|^2-3\int u^2Hu_x\mathrm{d}x-\|u\|_{L^4}^4\leqslant(\|u_{0x}\|^2-3\int u_0^2Hu_{0x}\mathrm{d}x-$$

$$\|u_0\|_{L^4}^4)+C\int_0^{t_0}[\|f_x\|^2+\|u\|^6+\|f_x\|^{\frac{4}{3}}\|u\|^2+$$

$$\|f\|^{\frac{8}{3}}\|u\|^2+\|f\|^2\|u\|^4]\mathrm{e}^{C_0(t-s)}\mathrm{d}s\leqslant$$

$$C(t_0,\|u_0\|_{H^1},\|f\|_{H^1})\tag{1.10.26}$$

对于 $t\geqslant t_0$，有

$$\|u_x\|^2-3\int u^2Hu_x\mathrm{d}x-\|u\|_{L^4}^4\leqslant(\|u_x(t_0)\|^2-$$

$$3\int u^2Hu_x(t_0)\mathrm{d}x-\|u(t_0)\|_{L^4}^4)\mathrm{e}^{-C_0(t-t_0)}+C[\|f_x\|^2+$$

$$\frac{2}{C_0^2}\|f\|^2+\frac{2}{C_0^2}\|f\|^2\|f_x\|^{\frac{1}{3}}+\frac{2}{C_0^2}\|f\|^{\frac{14}{3}}+\frac{4}{C_0^2}\|f\|^4]\leqslant$$

$$C\|f\|_{H^1}^6+(\|u_x(t_0)\|^2-3\int u^2Hu_x(t_0)\mathrm{d}x-$$

$$\|u(t_0)\|_{L^4}^4)\mathrm{e}^{-C_0(t-t_0)}\tag{1.10.27}$$

因此存在 $t_1>t_0$，使得

$$\|u_x(t)\|^2\leqslant C\|f\|_{H^1}^6\tag{1.10.28}$$

因此

$$\|u_x(t)\|^2\leqslant C\|f\|_{H^1}^6+3\int u^2Hu_x\mathrm{d}x+\|u\|_{L^4}^4\leqslant C\|f\|_{H^1}^6+$$

$$C[\|u\|^{\frac{3}{2}}\|u_x\|^{\frac{3}{2}}+\|u\|^3\|u_x\|]\leqslant C\|f\|_{H^1}^6+\frac{1}{2}\|u_x\|^2+$$

$$C\|u\|^6$$

当 $t>t_1$ 时

$$\|u_x\|^2\leqslant C\|f\|_{H^1}^6=A_2\tag{1.10.29}$$

令

$$B=\{\phi(x)\,|\,\phi(x)\in H^1,\|\phi\|\leqslant A_1,\|\phi_x\|\leqslant A_2\}$$

易见 B 为(BO)问题的吸收集，定义 B 的 ω 极限集

$$\omega^w(B) = \bigcap_{s>0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)B}^w \tag{1.10.30}$$

其中闭包“—”表示取依 $H^1(\mathbf{R})$弱拓扑。因 B 为 $H^1(\mathbf{R})$中的有界集，它在 $H^1(\mathbf{R})$中是弱紧的。因 $H^1(\mathbf{R})$为可分拓扑空间，可知 B 是可度量的。定义 d^w 为它的距离，于是在半群 $S(t)$作用下一个有界集 A 按度量 d^w 吸引有界集 B，当且仅当

$$\lim_{t\to\infty} d^w_{H^1}(S(t)B, A) = \lim_{t\to\infty} \sup_{x\in B} \inf_{y\in A} d^w(S(t)x, y) \tag{1.10.31}$$

由文献[80]，可得

命题 1.10.1 集合 $\omega^w(B)$为问题(BO)的非空弱紧吸引子。

现我们证明这种在 H^1 上的弱紧整体吸引子 $\omega^w(B)$实际上是在 H^1 上的强紧整体吸引子。

因 $\omega^w(B)$在半群 $S(t)$作用下是不变的，我们证明对任何有界集 $A\in H^1(\mathbf{R})$，有

$$\lim_{t\to\infty} d_{H^1}(S(t)A, \omega^w(B)) = 0 \tag{1.10.32}$$

为此，仅需证明$\forall t_n\to\infty, \phi_n\in A$，如果

$$S(t_n)\phi_n \to \bar{u}(x)\text{，在 } H^1(\mathbf{R}) \text{ 弱收敛} \tag{1.10.33}$$

其中 $\bar{u}(x)\in\omega^w(B)$，便有

$$S(t_n)\phi_n \to \bar{u}(x)\text{，在 } H^1(\mathbf{R}) \text{ 中强收敛} \tag{1.10.34}$$

事实上，$\forall T>0, \exists\, n_j\to\infty, v(x)\in\omega^w(B)$，使得 $t_{n_j}>T$

$v_{n_j}(x) = S(t_{n_j}-T)\phi_{n_j}\to v(x)$，在 $H^1(\mathbf{R})$中弱收敛

令 $W_{n_j}(t) = S(t_{n_j}+t-T)\phi_{n_j}$。因 $S(t): H^1(\mathbf{R})\to H^1(\mathbf{R})$为有界的，我们有

$$S(t): H^1(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R}) \text{ 是连续的，}$$

$$S(t): H^1(\mathbf{R}) \to H^1(\mathbf{R}) \text{ 是弱连续的。}$$

因此，我们有

$$W_{n_j}(t) \to S(t)v \text{ 在 } H^1(\mathbf{R}) \text{ 中弱收敛。} S(T)v = \bar{u}$$

因

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|W_{n_j}(t)\|^2+C_0\|W_{n_j}(t)\|^2=(f,W_{n_j}(t))$$

有

$$\|W_{n_j}(t)\|^2=\|v_{n_j}\|^2\mathrm{e}^{-2C_0t}+\frac{1}{2C_0}\int_0^t(f,W_{n_j}(s))\mathrm{e}^{-2C_0(t-s)}\mathrm{d}s,$$

$$\|W_{n_j}(T)\|^2=\mathrm{e}^{-2C_0T}\|v_{n_j}\|^2+\frac{1}{2C_0}\int_0^t(f,W_{n_j}(s))\mathrm{e}^{-2C_0(T-s)}\mathrm{d}s$$

因 $\phi_{n_j}\in B$，B 为 $H^1(\mathbf{R})$中的吸收集，我们能找到 $C>0$，使得

$$(f,W_{n_j}(s)\mathrm{e}^{-2C_0(t-s)}+C)>0$$

因此

$$\limsup_{n_j\to\infty}\|W_{n_j}(T)\|^2+\frac{CT}{2C_0}\leqslant\mathrm{e}^{-2C_0T}\limsup_{n_j\to\infty}\|v_{n_j}\|^2+$$

$$\limsup_{n_j\to\infty}\frac{1}{2C_0}\int_0^T[(f,W_{n_j}(s))\mathrm{e}^{-2C_0(T-s)}+C]\mathrm{d}s \qquad (1.10.35)$$

注意到

$$W_{n_j}(t)\to S(t)v\text{，在 }H^1(\mathbf{R})\text{ 中弱收敛}(\forall t>0)$$

我们有

$$(f,W_{n_j}(t))\to(f,S(t)v),\ \forall t>0$$

利用 Faton 引理，推出

$$\limsup_{n_j\to\infty}\int_0^T[(f,W_{n_j}(s))\mathrm{e}^{-2C_0(T-s)}+C]\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\int_0^T[(f,S(s)v)\mathrm{e}^{-2C_0(T-s)}+C]\mathrm{d}s \qquad (1.10.36)$$

且

$$\limsup_{n_j\to\infty}\|W_{n_j}(T)\|^2+\frac{CT}{2C_0}\leqslant\mathrm{e}^{2C_0T}\limsup_{n_j\to\infty}\|v_{n_j}\|^2+$$

$$\frac{1}{2C_0}\int_0^T(f,S(s)v)\mathrm{e}^{-2C_0(T-s)}\mathrm{d}s+\frac{CT}{2C_0} \qquad (1.10.37)$$

另一方面，因 $\bar{u}=S(T)v$，有

$$\|\bar{u}\|^2=\mathrm{e}^{-2C_0T}\|v\|^2+\frac{1}{2C_0}\int_0^T(f,S(s))\mathrm{e}^{-2C_0(T-s)}\mathrm{d}s$$

$$(1.10.38)$$

因此

$$\limsup_{n_j\to\infty}\|W_{n_j}(T)\|^2\leqslant\|\bar{u}\|^2+\mathrm{e}^{-2C_0T}[\limsup_{n_j\to\infty}\|v_{n_j}\|^2-\|v\|^2]\tag{1.10.39}$$

注意到 B 为 $H^1(\mathbf{R})$ 中的有界吸收集，对 $t_j>T$，我们有 $\{u_{n_j}\}\subset A$，$\|u_{n_j}\|^2\leqslant C$，$\|v\|^2\leqslant C$，这里 C 与 T 和 n_j 无关。因此

$$\limsup_{n_j\to\infty}\|W_{n_j}(T)\|^2\leqslant\|\bar{u}\|^2+2C\mathrm{e}^{-2C_0T}\tag{1.10.40}$$

因 $W_{n_j}(T)=S(t_{n_j})\phi_{n_j}$，我们有

$$\limsup_{n_j\to\infty}\|S(t_{n_j})\phi_{n_j}\|^2\leqslant\|\bar{u}\|^2+2C\mathrm{e}^{-2C_0T}$$

令 $T\to\infty$，得

$$\limsup_{n_j\to\infty}\|S(t_{n_j})\phi_{n_j}\|^2\leqslant\|\bar{u}\|^2\tag{1.10.41}$$

另一方面，因 $S(t_{n_j})\phi_{n_j}\to\bar{u}$ 在 $H^1(\mathbf{R})$ 中弱收敛，因此

$$\liminf_{n_j\to\infty}\|S(t_{n_j})\phi_{n_j}\|^2\geqslant\|\bar{u}\|^2\tag{1.10.42}$$

从式(1.10.41)和式(1.10.42)得

$$\limsup_{n_j\to\infty}\|S(t_{n_j})\phi_{n_j}\|^2=\|\bar{u}\|^2\tag{1.10.43}$$

连同 $S(t_{n_j})\phi_{n_j}\to\bar{u}$(弱收敛)，推出

$$S(t_{n_j})\phi_{n_j}\to\bar{u}\text{ 在 }L^2(\mathbf{R})\text{ 中强收敛。}$$

由于对任何子列 t_{n_j},ϕ_{n_j}，上述极限唯一，故我们得到

$$S(t_n)\phi_n\to\bar{u}\text{ 在 }L^2(\mathbf{R})\text{ 中强收敛。}$$

注意到，如 $u_n\to u$ 在 $H^1(\mathbf{R})$ 中弱收敛，且 $u_n\to u$ 在 $L^2(\mathbf{R})$ 中强收敛，则 $u_n\to u$ 在 $L^p(\mathbf{R})$ 中强收敛，对 $p>2$。

从式(1.10.24)可得

$$\begin{aligned}&\|u_x(t)\|^2-3\int u^2Hu_x\mathrm{d}x-\|u(t)\|_{L^4}^4=\mathrm{e}^{-2C_0t}[\|u_{0x}\|^2-\\&3\int u_0^2Hu_{0x}\mathrm{d}x-\|u_0\|_{L^4}^4]+\frac{1}{2C_0}[\int_0^t\mathrm{e}^{-2C_0(t-s)}[2(f_x,u_x(s))+\\&2C_0\|u(s)\|_{L^4}^4]+3C_0\int u^2Hu_x\mathrm{d}x-3\int u^2Hf_x\mathrm{d}x-4(f,u^3)]\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{1.10.44}$$

类似于 L^2 收敛性的证明，可证明

$$S(t_n)\phi_n \to \bar{u}, \text{在 } H^1(\mathbf{R}) \text{ 中强收敛。}$$

因此，有

定理 1.10.1 设 $u_0 \in H^1, f \in H^1, C_0 > 0$ 为一常数，则问题(BO)具有 $H^1(\mathbf{R})$中的强紧的整体吸引子。

我们还能证明半群 $S(t)$在 H^1 上的连续性($t>0$)。从以上证明中，我们知道在整体吸引子上，弱 H^1 收敛性推出强 H^1 收敛性。因此可得

定理 1.10.2 半群算子 $S(t)$在整体吸引子上是 H^1 连续的。

从整体吸引子的维数估计可得

定理 1.10.3 设定理 1.10.1 的假设成立，则吸引子具有有限的分形维数。

1.11 非线性 KdV-Schrödinger 方程

考虑如下具弱阻尼的 KdV-非线性 Schrödinger 方程组的周期初值问题

$$\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} - bn\boldsymbol{\varepsilon} + \mathrm{i}\gamma\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{g}_1(x) \tag{1.11.1}$$

$$n_t + \frac{1}{2}f(n)_x + \frac{\beta}{2}n_{xxx} + \nu n + \frac{1}{2}|\boldsymbol{\varepsilon}|_x^2 = g_2(x) \tag{1.11.2}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x,t) = \boldsymbol{\varepsilon}(x+L,t), n(x,t) = n(x+L,t), \forall\, x \in \mathbf{R}, t \geqslant 0 \tag{1.11.3}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x,0) = \boldsymbol{\varepsilon}_0(x), n(x,0) = n_0(x) \tag{1.11.4}$$

其中：$\boldsymbol{\varepsilon}(x,t) = (\varepsilon^1(x,t), \varepsilon^2(x,t), \cdots, \varepsilon^N(x,t))$为复值未知函数向量；$n(x,t)$为实的数量函数；$f(n)$为非线性函数；$b, \gamma, \beta, \nu$ 为实常数；$L>0$。问题(1.11.1)～(1.11.4)出现于激光、等离子物理的研究中，其中 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 表示电场，n 表示密度的扰动。当无阻尼时，即 $\gamma=\nu=0$，$\boldsymbol{g}_1 = g_2 = 0$ 时 Appert，Vaclavik，Makhankov，Gibbons 等分别

在文献[59,60,61]中对方程组(1.11.1)、(1.11.2)的孤立子解进行了详细的研究。1983年郭在文献[62]中首先证明周期初值问题(1.11.1)～(1.11.4)以及初值问题整体光滑解的存在、唯一性，1997年，郭、陈在文献[63]中证明问题(1.11.1)～(1.11.4)整体吸引子的存在性及其维数的有限性。

以下设$\nu>\gamma>0$，$b\beta<0$，$f(s)\in C^{(4)}(\mathbf{R})$，且满足条件：存在常数$A_0$和$B>0$，使得

$$|f(n)|\leqslant A_0 n^2+B,\forall\, n\in\mathbf{R}, \tag{1.11.5}$$

设m为非负整数，L为正实数，H_L^m表示具L周期的Sobolev空间H^m。

$$IH_L^m=H_L^m\times H_L^m\times\cdots\times H_L^m$$

$$\|v\|_m^2=\sum_{k=0}^{m}L^{2k}|v|_k^2,\quad |v|_k^2=\int_0^L\left|\frac{\mathrm{d}^k v}{\mathrm{d}x^k}\right|^2\mathrm{d}x$$

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_m=\Big[\sum_{j=1}^{N}\|\varepsilon_j\|_m^2\Big]^{\frac{1}{2}},\ \boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon^1,\cdots\varepsilon^N)\in IH_L^m$$

令

$$X_k=IH_L^k\times H_L^k,\ (k=1,2,\cdots,m)$$

$$\|\eta\|_k=(\|\eta_1\|_k^2+\|\eta_2\|_k^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\eta=(\eta_1,\eta_2)\in X_k,\ k=1,2,\cdots,m$$

有Sobolev不等式

$$|v|_{L^\infty}=\sup_{0\leqslant x\leqslant L}|v(x)|\leqslant|v|_0^{\frac{1}{2}}(2|v|_1+\frac{1}{L}|v|_0)^{\frac{1}{2}},\forall\, v\in H_L^1 \tag{1.11.6}$$

由文献[62]中的证明方法可得

定理 1.11.1 设$f(n)$满足条件(1.11.5)。$b\beta<0$，$\nu>\gamma>0$，$g=(g_1,g_2)\in X_m$，$(\varepsilon_0(x),n_0(x))\in X_m$，$m\geqslant 2$。则对任何$T$，$0<T<\infty$，存在问题(1.11.1)～(1.11.4)的唯一整体解$(\boldsymbol{\varepsilon}(x,t),n(x,t))\in C(0,T;X_m)$，且依初值是连续的。

由此，由问题(1.11.1)～(1.11.4)的解生成半群$S(t)\zeta_0=S(t)(\boldsymbol{\varepsilon}_0,n_0)=(\boldsymbol{\varepsilon}(t),n(t))$。$S(t)$在$\mathbf{R}^+$上定义，且对$t$是连续的。而

且从解的有界性可知，对任何 $R>0, 0<T<\infty$，存在常数 $C_0(R,T)$ 使得

$$\sup_{t\in[0,T]}\|S(t)(\varepsilon_0,n_0)\|_2\leqslant C_0(R,T),\ \forall\ \|(\varepsilon_0,n_0)\|_2\leqslant R \tag{1.11.7}$$

引理 1.11.1 对于 $t\in\mathbf{R}$，映照 $S(t)$ 在 X_2 的有界集上依 X_1 是连续的。

证 设 $(\varepsilon_{10},n_{10}),(\varepsilon_{20},n_{20})\in X_2$，$\|\varepsilon_{k0}\|_2+\|n_{k0}\|_2\leqslant R, k=1,2$，$(\varepsilon_1(t),n_1(t)),(\varepsilon_2(t),n_2(t))$ 分别表示相应的解 $(\varepsilon_k(t),n_k(t))=S(t)(\varepsilon_{k0},n_{k0}), k=1,2$。令 $\varepsilon(t)=\varepsilon_1(t)-\varepsilon_2(t), n(t)=n_1(t)-n_2(t)$。则 $(\varepsilon(t),n(t))$ 满足

$$\mathrm{i}\varepsilon_t+\varepsilon_{xx}-b(n_1\varepsilon_1-n_2\varepsilon_2)+\mathrm{i}\gamma\varepsilon=0 \tag{1.11.8}$$

$$n_t+\frac{1}{2}(f(n_1)-f(n_2))_x+\frac{\beta}{2}n_{xxx}+\nu n+\frac{1}{2}(|\varepsilon_1|_x^2-|\varepsilon_2|_x^2)=0 \tag{1.11.9}$$

式(1.11.8)乘以 $\bar{\varepsilon}$ 并在 $(0,L)$ 上积分得

$$(\mathrm{i}\varepsilon_t,\varepsilon)+(\varepsilon_{xx},\varepsilon)-b\int_0^L n_1|\varepsilon|^2\mathrm{d}x-b\int_0^L n\varepsilon_2\bar{\varepsilon}\mathrm{d}x+\mathrm{i}\gamma|\varepsilon|_0^2=0 \tag{1.11.10}$$

上面等式取虚部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\varepsilon|_0^2+\gamma|\varepsilon|_0^2-b\mathrm{Im}\int_0^L\varepsilon_2 n\bar{\varepsilon}\mathrm{d}x=0 \tag{1.11.11}$$

另一方面，式(1.11.10)取实部得

$$\mathrm{Im}(\varepsilon_t,\varepsilon)+|\varepsilon_x|_0^2+b\int_0^L n_1|\varepsilon|^2\mathrm{d}x+b\mathrm{Re}\int_0^L n\varepsilon\bar{\varepsilon}\mathrm{d}x=0 \tag{1.11.12}$$

式(1.11.8)乘以 $\bar{\varepsilon}_t$，在 $[0,L]$ 上积分，再取实部得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\varepsilon_x|_0^2+\mathrm{Re}\,b(n_1\varepsilon+\varepsilon_2 n,\varepsilon_t)+\gamma\mathrm{Im}(\varepsilon,\varepsilon_t)=0 \tag{1.11.13}$$

联系式(1.11.12)和式(1.11.13)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{\varepsilon}_x|_0^2+\gamma|\boldsymbol{\varepsilon}_x|_0^2+\gamma b\int_0^L n_1|\boldsymbol{\varepsilon}|^2\mathrm{d}x+\gamma b\mathrm{Re}\int_0^L n\boldsymbol{\varepsilon}_2\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathrm{d}x+$$

$$\mathrm{Re}\ b(n_1\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}_2 n,\boldsymbol{\varepsilon})=0 \tag{1.11.14}$$

式(1.11.9)乘以n，并在$[0,L]$上积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|n|_0^2+\nu|n|_1^2-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(\tau n+(1-\tau)n_2)\mathrm{d}\tau\cdot nn_x-$$

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_1\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}+\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\boldsymbol{\varepsilon},n_x)=0 \tag{1.11.15}$$

式(1.11.9)乘以n_{xx}，在$[0,L]$上积分，计算可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\frac{1}{2}|n_x|_0^2-\frac{1}{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}_1\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}+\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\boldsymbol{\varepsilon},n)\}+\phi(\boldsymbol{\varepsilon},n)=0 \tag{1.11.16}$$

其中

$$\phi(\boldsymbol{\varepsilon},n)=-\frac{3}{4}\int_0^L\Big(\int_0^1 f'(\tau n_1+(1-\tau)n_2)\mathrm{d}\tau\Big)_x n_x^2\mathrm{d}x-$$

$$\frac{1}{2}\int_0^L\Big(\int_0^1 f'(\tau n_1+(1-\tau)n_2)\mathrm{d}\tau\Big)_{xx} nn_x\mathrm{d}x+$$

$$\frac{1}{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}_1\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}+\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\boldsymbol{\varepsilon}_t,n)+\frac{1}{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}_{1t}\boldsymbol{\varepsilon}+\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{2t}\boldsymbol{\varepsilon},n)$$

$$-\frac{1}{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}_1\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}+\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\boldsymbol{\varepsilon},\frac{1}{2}(\int_0^1 f'(\tau n_1+(1-\tau)n_2)\mathrm{d}\tau\cdot n)_x+\nu n) \tag{1.11.17}$$

联系式(1.11.16)和式(1.11.11)、(1.11.14)、(1.11.15)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\frac{1}{2}|n_x|_0^2+\frac{1}{2}|\boldsymbol{\varepsilon}_x|_0^2+\sigma|n|_0^2+\sigma|\boldsymbol{\varepsilon}|_0^2-\frac{1}{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}_1\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}+\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\boldsymbol{\varepsilon},n)\Big\}-$$

$$\nu|\boldsymbol{\varepsilon}_x|_0^2+\gamma b\int_0^L n_1|\boldsymbol{\varepsilon}|^2\mathrm{d}x+\gamma b\mathrm{Re}\int_0^L n\boldsymbol{\varepsilon}_2\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathrm{d}x+$$

$$\mathrm{Re}\ b(n_1\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}_2 n,\boldsymbol{\varepsilon}_t)+\sigma\gamma|\boldsymbol{\varepsilon}|_0^2-b\sigma\mathrm{Im}\int_0^L\boldsymbol{\varepsilon}_2 n\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathrm{d}x+$$

$$\sigma\nu|n|_0^2-\frac{\sigma}{2}(\int_0^1 f'(\tau n_1+(1-\tau)n_2)\mathrm{d}\tau\cdot n,n_x)-$$

$$\frac{\sigma}{2}(\varepsilon_1\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}_2\varepsilon,n_x)+\phi(\varepsilon,n)=0 \tag{1.11.18}$$

其中 $\sigma\geqslant\frac{2C}{\beta}$。$|\varepsilon_k(t)|_{L^\infty}\leqslant C(R,T)$，$|n_k(t)|_{L^\infty}\leqslant C(R,T)$，$k=1,2$，利用方程(1.11.1)及分部积分，从式(1.11.18)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}|n_x|_0^2+\frac{1}{2}|\varepsilon_x|_0^2+\sigma|n|_0^2+\sigma|\varepsilon|_0^2-\frac{1}{\beta}(\varepsilon_1\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}_2\varepsilon,n)\right\}\leqslant$$

$$C_1\left\{\frac{1}{2}|n_x|_0^2+\frac{1}{2}|\varepsilon_x|_0^2+\sigma|n|_0^2+\sigma|\varepsilon|_0^2-\frac{1}{\beta}(\varepsilon_1\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}_2\varepsilon,n)\right\}$$

因此，可得

$$\frac{1}{2}|n_x|_0^2+\frac{1}{2}|\varepsilon_x|_0^2+\sigma|n|_0^2+\sigma|\varepsilon|_0^2-\frac{1}{\beta}(\varepsilon_1\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}_2\varepsilon,n)\leqslant$$

$$C_2(\|(n(0),\varepsilon(0))\|_1^2)\mathrm{e}^{C_1t}$$

由此证明了引理。

命题 1.11.1 对任何 $t\in\mathbf{R}^1$，由问题(1.11.1)～(1.11.4)所确定的半群算子 $S(t)$ 从 X_2 到 X_2 是弱连续的。

证 令 ζ^n 为在 X_2 中的弱收敛序列，ξ 为它的极限。对固定 $t\in\mathbf{R}^+$，从式(1.11.7)推出$\{S(t)\zeta^n\}$在 X_2 中有界。因此它是弱紧的。我们选取它的子序列$\{S(t)u^n\}$弱收敛于 $v\in X_2$。另一方面，由于 X_2 嵌入 X_1 的紧性，从而保证$\{u^n\}$在 X_1 中强收敛于 u。由引理1.11.1，$\{S(t)u^n\}$在 X_1 中强收敛于 $S(t)u$，$v=S(t)u$。因此，序列$\{S(t)u\}$弱收敛于 $S(t)u$。命题得证。

下面我们证明在 X_1 和 X_2 中吸收集的存在性。

命题 1.11.2 设 $\nu>\gamma>0$，$b\beta<0$，且设 $f(n)$ 满足式(1.11.5)，$g=(g_1,g_2)\in X_1$，则存在常数 $\rho_1=\rho_1(L,\nu,\gamma,\|g\|_1)$使得对任何 $R>0$，存在 $T_1=T_1(R)>0$ 使得对一切$(\varepsilon_0,n_0)\in X_1$，$\|(\varepsilon_0,n_0)\|_1^2\leqslant R^2$，有

$$\|S(t)(\varepsilon_0,n_0)\|_1^2\leqslant\rho_1^2,\ \forall t\geqslant T_1(R) \tag{1.11.19}$$

为证明命题1.11.2，我们先证明如下两个引理。

引理 1.11.2 设 $\varepsilon_0(x)\in L^2(\Omega)$，$\Omega=[0,L]$，则对问题(1.11.1)～(1.11.4)的任何解$(\varepsilon(t),n(t))$，有

$$|\boldsymbol{\varepsilon}(t)|_0^2 \leqslant |\boldsymbol{\varepsilon}|_0^2 e^{-\gamma t} + \frac{|\boldsymbol{g}_1|_0^2}{\gamma^2}(1 - e^{-\gamma t}) \qquad (1.11.20)$$

证 式(1.11.4)与 $\bar{\varepsilon}$ 作内积,再取虚部即得。

引理 1.11.3 设 $\nu > \gamma$, $(\boldsymbol{\varepsilon}_0, n_0) \in X_1$,则对问题(1.11.1)~(1.11.4)的任何解 $(\boldsymbol{\varepsilon}(t), n(t))$,存在常数 $C_1 = C_1(|n_0|_0^2, |\boldsymbol{\varepsilon}_0|_1^2)$, $C_2 = C_2(\|\boldsymbol{g}_1\|_1^2, |g_2|_0)$ 使得

$$|n|_0^2 \leqslant |b|^{-1}|\boldsymbol{\varepsilon}|_0|\boldsymbol{\varepsilon}_x|_0 + C_1 e^{-\gamma t} + C_2(1 - e^{-2\gamma t}) \qquad (1.11.21)$$

证 从方程(1.11.1)和(1.11.2)有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L [|b|n^2 + \operatorname{Sign} b \operatorname{Im}(\boldsymbol{\varepsilon}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_x)]dx + \nu|b||n|_0^2 +$$

$$\gamma\int_0^L \operatorname{Sign} b \operatorname{Im}(\boldsymbol{\varepsilon}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_x)dx - |b|(g_2, n) + \operatorname{Sign} b\ (\boldsymbol{g}_1 x, \boldsymbol{\varepsilon}) = 0 \qquad (1.11.22)$$

从式(1.11.22),当 $\nu > \gamma$ 时有

$$\frac{d}{dt}\int_0^L [|b|n^2 + \operatorname{Sign} b \operatorname{Im}(\boldsymbol{\varepsilon}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_x)]dx +$$

$$2\gamma\int_0^L [|b|n^2 + \operatorname{Sign} b \operatorname{Im}(\boldsymbol{\varepsilon}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_x)]dx \leqslant \frac{|b||g_2|_0^2}{2(\nu - \gamma)} + 2|\boldsymbol{g}_{1x}|_0|\boldsymbol{\varepsilon}|_0$$

由 Gronwall 不等式和引理 1.11.2 可得

$$|n|_0^2 \leqslant |b|^{-1}|\boldsymbol{\varepsilon}|_0|\boldsymbol{\varepsilon}_x|_0 + C_1 e^{-\gamma t} + C_2(1 - e^{-\gamma t})$$

其中

$$C_1 = |n_0|_0^2 + |b|^{-1}|\boldsymbol{\varepsilon}|_0|\boldsymbol{\varepsilon}_{0x}|_0 + \gamma^{-1}|\boldsymbol{\varepsilon}|_0^2,$$

$$C_2 = |b|^{-1}\left(\frac{|\boldsymbol{g}_{1x}|_0^2}{2\gamma} + \frac{|\boldsymbol{g}|_0^2}{2\gamma^3} + \frac{|b||g_2|_0^2}{4\gamma(\nu - \gamma)}\right)$$

利用引理 1.11.2、引理 1.11.3,现来证明命题 1.11.2。式(1.11.2)与 n 作内积可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|n|_0^2 + \frac{1}{2}(|\boldsymbol{\varepsilon}|_x^2, n) + \nu|n|_0^2 + (g_2, n) = 0 \qquad (1.11.23)$$

另一方面，由计算，从方程(1.11.1)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{|\varepsilon_x|_0^2+b\int_0^L n|\varepsilon|^2\mathrm{d}x+2\mathrm{Re}\,(g_1,\varepsilon)-\frac{b\beta}{2}|n_x|_0^2+b\int_0^L F(n)\mathrm{d}x\right\}+$$
$$2\gamma\left[|\varepsilon_x|_0^2+b\int_0^L n|\varepsilon|^2\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\,(g_1,\varepsilon)\right]-\nu b\beta|n_x|_0^2+$$
$$\nu b\int_0^L f(n)n\mathrm{d}x+b\nu\int_0^L n|\varepsilon|^2\mathrm{d}x-b(g_2,f(n)-n_x-|\varepsilon|^2)=0$$
$$(1.11.24)$$

其中 $F(n)=\int_0^n f(s)\mathrm{d}s$。联系式(1.11.22)和式(1.11.2)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_1(\varepsilon,n)+K_1(\varepsilon,n)=0 \qquad (1.11.25)$$

其中

$$H_1(\varepsilon,n)=|\varepsilon_x|_0^2+b\int_0^L n|\varepsilon|^2\mathrm{d}x+2\mathrm{Re}\,(g_1,\varepsilon)-$$
$$\frac{b\beta}{2}|n_x|_0^2+b\int_0^L F(n)\mathrm{d}x+\lambda|n|_0^2 \qquad (1.11.26)$$

$$K_1(\varepsilon,n)=2\gamma\left[|\varepsilon_x|_0^2+b\int_0^L n|\varepsilon|^2\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\,(g_1,\varepsilon)\right]-$$
$$\nu b\beta|n_x|_0^2+\nu b\int_0^L f(n)n\mathrm{d}x+b\beta\int_0^L n|\varepsilon|^2\mathrm{d}x-$$
$$b(g_2,f(n)-n_x-|\varepsilon|^2)+2\nu\lambda|n|_0^2+\lambda\int_0^L n|\varepsilon|_x^2\mathrm{d}x-\lambda(g_2,n)$$
$$(1.11.27)$$

其中 λ 为待定正常数。

按照引理 1.11.2 和引理 1.11.3，存在常数 $\rho_0=\rho_0(\|g_1\|_1^2,|g_2|_0^2)$ 使得对于问题(1.11.1)～(1.11.4)具初值 $(\varepsilon_0,n_0)\in X_1$，$\|(\varepsilon_0,n_0)\|_1^2\leqslant R^2$ 的任何解 $(\varepsilon(t),n(t))$，存在 $T_0=T_0(R)>0$，使得

$$|\varepsilon|_0^2\leqslant\frac{2}{\gamma^2}|g_1|_0^2,t\geqslant T_0(R) \qquad (1.11.28)$$

$$|n|_0^2\leqslant|b|^{-1}|\varepsilon_0||\varepsilon_x|_0+\rho_0,\ t\geqslant T_0(R) \qquad (1.11.29)$$

因此，当 $t\geqslant T_0(R)$ 时有

$$\int_0^L |n|^3 dx \leqslant |n|_\infty |n|_0^2 \leqslant (2|n|_1 + \frac{1}{L}|n|_0)|n|_0^{\frac{5}{2}} \leqslant$$

$$(2|n|_1 - \frac{1}{L}|n|_0)^{\frac{1}{2}}(\frac{\sqrt{2}\,|g_1|_0}{\gamma|b|}|\varepsilon|_1 + \rho_0)^{\frac{5}{3}} \leqslant \theta_1 |\varepsilon_x|_0^2 +$$

$$\theta_2|n_x|_0^2 + \frac{\theta_2}{2L}|n|_0^2 + C(\theta_1,\theta_2,|g|_1^2) \tag{1.11.30}$$

其中

$$C(\theta_1,\theta_2,\|g_1\|_1^2) = \frac{\gamma^2|b|^2\rho_0^2}{2|g_1|_0^2}\theta_1 + \frac{5^5|g_1|_0^{10}}{2^8\gamma^{10}|b|^{10}\theta_1^5\theta_2^2},\ \theta_1,\theta_2 > 0$$

因此，由 $f(n)$的假设式(1.11.5)可得

$$|b|\left|\int_0^L F(n)dx\right| \leqslant \frac{|b|A_0}{3}\int_0^L |n|^3 dx + |b|B\int_0^L |n|dx \leqslant \frac{1}{4}|\varepsilon_x|_0^2$$

$$+ \frac{|b\beta|}{8}|n_x|_0^2 + (\frac{|b\beta|}{16L} + \frac{|b|}{2})|n|_0^2 + C(L,\nu,\gamma,\|g_1\|_1) \tag{1.11.31}$$

另一方面，

$$|b\int_0^L n|\varepsilon|^2 dx| \leqslant \frac{|b|}{2}|n|_0^2 + \frac{1}{4}|\varepsilon|_0^2 + C(|g_1|_0^2),t \geqslant T_0(R) \tag{1.11.32}$$

因此，当 $t \geqslant T_0(R)$，存在常数 $C_3(\|g\|_1^2)$使得

$$H_1(\varepsilon,n) \geqslant \frac{1}{2}|\varepsilon_x|_0^2 + \frac{|b\beta|}{4}|n_x|_0^2 + (\lambda - \frac{|b\beta|}{16L} - |b|)|n|_0^2 - C_3(\|g\|_1^2) \tag{1.11.33}$$

$$H_1(\varepsilon,n) \leqslant \frac{3}{2}|\varepsilon_x|_0^2 + \frac{3|b\beta|}{4}|n_x|_0^2 + (\lambda + \frac{|b\beta|}{16} + |b|)|n|_0^2 + C_3(\|g\|_1^2) \tag{1.11.34}$$

至于 $K_1(\varepsilon,n)$有如下引理

引理 1.11.4 设命题 1.11.1 的条件满足，则存在常数 $C_4 = C_4(\|g_1\|)$使得

$$K_1(\varepsilon,n) - \gamma H_1(\varepsilon,n) \geqslant \frac{1}{2}(\gamma\lambda - (2\nu + \gamma)|b| - \frac{|b\gamma|\gamma}{2} -$$

$$2|b||g|_{L^\infty}A_0)|n|_0^2 - C_4 \tag{1.11.35}$$

证

$$K_1(\varepsilon,n) - \gamma H_1(\varepsilon,n) = \gamma|\varepsilon_x|_0^2 + (2\nu-\gamma)|b\beta||n_x|_0^2 +$$
$$(2\nu-\gamma)\lambda|n|_0^2 + (\gamma+\nu)b\int_0^L n|\varepsilon|^2 dx +$$
$$\nu b\int_0^L [f(n)n - F(n)]dx - b(g_2, f(n) - n_x - |\varepsilon|^2 +$$
$$\lambda n) + \lambda\int_0^L n\ |\varepsilon|_x^2 dx \tag{1.11.36}$$

类似于式(1.11.30)和式(1.11.32)，当$t\geqslant T_0(R)$时有

$$|(\gamma+\nu)b\int_0^L n|\varepsilon|^2 dx \leqslant \frac{(\nu+\gamma)|b|}{2}|n|_0^2 + \frac{\gamma}{4}|\varepsilon_x|_0^2 + C(|g_1|_0^2) \tag{1.11.37}$$

$$|\nu b\int_0^L [f(n)n - F(n)]dx| \leqslant |\nu b|\int_0^L \frac{4A_0}{3}|n|^3 + B_0|n|dx \leqslant$$
$$\frac{\gamma}{4}|\varepsilon_x|_0^2 + \frac{|b\beta|\gamma}{4}|n_x|_0^2 + (\frac{|b\beta|\gamma}{8L} + \frac{|\nu b|}{2})|n|_0^2 + C(\|g\|_1^2) \tag{1.11.38}$$

$$|b(g_2, f(n) - n_x - |\varepsilon|^2 + \lambda n)| \leqslant \frac{|b\beta|\gamma}{4}|n_x|_0^2 +$$
$$\frac{\gamma\lambda}{4}|n|_0^2 + |b||g_2|_\infty A_0|n|_0^2 + C(\|g\|_0^2) \tag{1.11.39}$$

对于$\lambda\int_0^L n|\varepsilon|_x^2 dx$有

$$|\lambda\int_0^L n|\varepsilon|_x^2 dx| = |\lambda\int_0^L n_x|\varepsilon|^2 dx| \leqslant \lambda|n_x|_0\|\varepsilon\|_{L^4}^2 \leqslant$$
$$\frac{|b\beta|\gamma}{4}|\varepsilon_x|_0^2 + \frac{\gamma\lambda}{4}|n|_0^2 + C(\|g_1\|_0^2) \tag{1.11.40}$$

由式(1.11.36)～(1.11.40)可知，存在常数$C_4=C_4(\|g\|_1)$使得式(1.11.35)成立。

现如果选取λ充分大，使得

$$\lambda > \max\{\frac{|b\beta|}{16L} + |b|, (2\nu+\gamma+\frac{|b\beta|\gamma}{4} - 2|g_2|_\infty|b|\gamma^{-1})\} \tag{1.11.41}$$

则从式(1.11.25)和式(1.11.35)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_1(\varepsilon,n)+\gamma H_1(\varepsilon,n)\leqslant C_4,t\geqslant T_0(R) \quad (1.11.42)$$

因此，由 Gronwall 不等式有

$$H_1(\varepsilon,n)\leqslant H_1(\varepsilon,n)(T_0)\mathrm{e}^{-\gamma(t-T_0)}+\frac{C_4}{\gamma}(1-\mathrm{e}^{-\gamma(t-T_0)}),t\geqslant T_0 \quad (1.11.43)$$

从式(1.11.33)、(1.11.34)和式(1.11.43)可得命题 1.11.2 的结论。

命题 1.11.3 设 $\nu>\gamma>0,b\beta<0,f$ 满足式(1.11.5)。$g=(g_{11},g_2)\in X_2$，则存在常数 $\rho_2=\rho_2(L,\nu,\gamma,\|g\|_2)$ 使得对任何 $R>0$，存在 $T_2(R)>0$，对一切 $(\varepsilon_0,n_0)\in X$，$\|(\varepsilon_0,n_0)\|_2^2\leqslant R^2$。有

$$\|S(t)(\varepsilon_0,n_0)\|_2^2\leqslant\rho_{21}^2,\forall t\geqslant T_2(R) \quad (1.11.44)$$

换言之，在 X_2 中的闭球

$$B_2=\{\xi=(\xi_1,\xi_2)\in X_2|\ \|\xi_1\|_2^2+\|\xi_2\|_2^2\leqslant\rho_2^2\} \quad (1.11.45)$$

为半群 $S(t)$ 的有界吸收集。

证 由命题 1.11.2，只要充分估计 $|\varepsilon_{xx}|_0$ 和 $|n_{xx}|_0$ 的一致上界。令 $A=-\partial_{xx}$，作式(1.11.1)和 $A\varepsilon_t+\gamma A\varepsilon$ 的内积，再取实部得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}|A\varepsilon|_0^2+\mathrm{Re}\,(g_1,A\varepsilon)\right]+b\gamma\mathrm{Re}\int_0^L(n\varepsilon)_x\bar{\varepsilon}_x\mathrm{d}x+\gamma|A\varepsilon|_0^2+$$
$$\mathrm{Re}\,(g_1,A\varepsilon)+b\mathrm{Re}\,(A\varepsilon,A\varepsilon_t)=0 \quad (1.11.46)$$

另一方面，利用方程(1.11.2)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(3\beta|An|_0^2-5\int_0^L f'(n)n_x^2\mathrm{d}x)=h_1-6(|\varepsilon|_{xx}^2,n_t)-6\nu\beta|An|_0^2 \quad (1.11.47)$$

其中

$$h_1=6\beta(g_{2xx},n_{xx})+2\int_0^L f'(n)n_x|\varepsilon|_{xx}^2\mathrm{d}x+$$
$$10\nu\int_0^L f'(n)n_x^2\mathrm{d}x-10(f'(n)n_{2x},g_{2x})+$$

$$\frac{2}{5}\int_0^L f'(n)n_x^2|\varepsilon|_x^2\mathrm{d}x + 5\nu\int_0^L f''(n)nn_x^2\mathrm{d}x -$$

$$5(f''(n)n_x^2, g_2) + \frac{5}{2}\int_0^L f''(n)f'(n)n_x^3\mathrm{d}x +$$

$$\frac{\beta}{8}\int_0^L f^{(4)}(n)n_x^5\mathrm{d}x - 6(|\varepsilon|_{xx}^2, n - g_2) \qquad (1.11.48)$$

因

$$(|\varepsilon|_{xx}^2, n_t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\varepsilon|_{xx}^2, n_t) - (|\varepsilon|_t^2, n_{xx}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\varepsilon|_{xx}^2, n) -$$

$$2\mathrm{Re}\int_0^L \varepsilon\bar{\varepsilon}_t n_{xx}\mathrm{d}x,$$

$$-\mathrm{Re}\,(n\varepsilon, A\varepsilon_t) = 2\mathrm{Re}\,(n_x\varepsilon_x, \varepsilon_t) +$$

$$\mathrm{Re}\,(n_{xx}\varepsilon, \varepsilon_t) + \mathrm{Re}\,(n\varepsilon_{xx}, \varepsilon_t) \qquad (1.11.49)$$

从式(1.11.46)、(1.11.48)和式(1.11.49)推得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{6|A\varepsilon|_0^2 + 3|b\beta||An|_0^2 + h_2\} + 12\gamma|A\varepsilon|_0^2 + 6\nu|b\beta||An|_0^2 +$$

$$h_3 + h_4 + bh_1 = 0 \qquad (1.11.50)$$

其中

$$h_2 = 12\mathrm{Re}\,(g_1, A\varepsilon) + 5b\int_0^L f(n)n_x^2\mathrm{d}x + 6b(|\varepsilon|_x^2, n_x) \qquad (1.11.51)$$

$$h_3 = 12\mathrm{Re}\,(g_1, A\varepsilon) + 12b\gamma\mathrm{Re}\int_0^L(\varepsilon n)_x\bar{\varepsilon}_x\mathrm{d}x - 24b\mathrm{Re}\,(n_x\varepsilon_x, \varepsilon_t) \qquad (1.11.52)$$

$$h_4 = 12b\mathrm{Im}\,((n^2\varepsilon)_x, \varepsilon_x) - 12b\mathrm{Im}\,((\mathrm{i}\gamma\varepsilon n - g_1 n)_x, \varepsilon_x) \qquad (1.11.53)$$

由命题 1.11.2 可知,当 $t\geqslant T_1(R)$时

$$\|\varepsilon(t)\|_1^2 + \|n(t)\|_1^2 \leqslant \rho_1^2, \|\varepsilon(t)\|_{L^\infty} + \|n(t)\|_{L^\infty}^2 \leqslant C\rho_1^2$$

因此$|f^{(k)}(n)|_\infty\leqslant C(\rho_1)$。于是

$$|h_2| \leqslant |A\varepsilon|_0^2 + C(\rho_1, \|g\|_1^2) \qquad (1.11.54)$$

因$|\mathrm{Re}\,(n_x, \varepsilon_x, \varepsilon_t)|\leqslant\theta|A\varepsilon|_0^2+C(\theta, \rho, \|g\|_1^2), \forall\,\theta>0$,我们有

$$|h_3| \leqslant \gamma|A\varepsilon|_0^2 - C(\rho_1, \|g\|_1^2) \qquad (1.11.55)$$

$$|h_4| \leqslant C(\rho_1, \|g\|_1^2) \qquad (1.11.56)$$

$$|bh_1| \leqslant |\beta b|\nu|n_{xx}|_0^2 + C(\rho_1, \|g\|_2^2) \qquad (1.11.57)$$

从式(1.11.50)和式(1.11.54)~(1.11.57)可得当 $t \leqslant T_1(R)$时

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{6|A\varepsilon|_0^2 + 3|b\beta||An|_0^2 + h_2\} +$$

$$\gamma\{6|A\varepsilon|_0^2 + 3|b\beta||An|_0^2 + h_2\} \leqslant C(\rho_1, \|g\|_2^2)$$

$$(1.11.58)$$

注意到 h_2 满足式(1.11.54)。由 Gronwall 不等式即得命题 1.11.3 结论。

定义

$$\mathscr{A} = \omega^w(B_2) = \bigcap_{s\geqslant 0} \bigcup_{t\geqslant s} \overline{S(t)B_2}$$

其中闭包是依 X_2 的弱拓扑取的，B_2 为式(1.11.45)所定义的吸收集。利用命题 1.11.3 和定理 1.11.1 可以证明

定理 1.11.2 集合 $\mathscr{A} = \omega^w(B_2)$满足

(i) $\mathscr{A}$ 在 X_2 中是弱紧的，$S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}$，$\forall t \in \mathbf{R}^+$；

(ii) 对于任何有界集 $B \subset X_2$，

$$\lim_{t\to\infty} d_H^w(S(t)B, \mathscr{A}) = 0$$

(iii) $\mathscr{A}$ 在 X_2 中依弱意义下是连通的。

换言之，$\mathscr{A}$ 为 $S(t)$在 X_2 中的弱整体吸引子。

推论 1.11.1 对于 X_2 中任何有界集 B，$S(t)B$ 依 X_1 模当 $t\to\infty$时收敛于 $\mathscr{A}$。

现在来估计吸引子 $\mathscr{A}$ 的维数。

令 $\zeta_0 = (\varepsilon_0, n_0) \in X_2$，$S(t)\zeta_0 = (\varepsilon(t), n(t))$为问题(1.11.1)~(1.11.4)具初值$(\varepsilon_0, n_0)$所定义的半群。考虑如下变分方程周期初值问题

$$\mathrm{i}U_t + U_{xx} - bV\varepsilon - bnU + \mathrm{i}\gamma U = 0 \qquad (1.11.59)$$

$$V_t + \frac{1}{2}(f'(n)V)_x + \frac{\beta}{2}V_{xxx} + \nu V + \frac{1}{2}(\varepsilon\overline{U} + U\overline{\varepsilon})_x = 0$$

$$(1.11.60)$$

$$U(x,t) = U(x+L,t),\ V(x,t) = V(x+L,t),$$

$$\forall\, x \in \mathbf{R}, t \geqslant 0 \tag{1.11.61}$$

$$U(0) = u_0 \in IH_L^1, V(0) = v_0 \in IH_L^1 \tag{1.11.62}$$

因 $S(t)\zeta_0 \in C(\mathbf{R}^+; X_2)$，容易看到线性问题(1.11.59)～(1.11.62)具有唯一解

$$(U(t), V(t)) \in C(\mathbf{R}^+; X_1)$$

容易证明线性映照

$$(DS(t)\zeta_0)(u_0, v_0) = (U(t), V(t)) \tag{1.11.63}$$

为 $S(t)$ 的一致微分。我们有

命题 1.11.4 对于任何 R, T，$0 < R, T < \infty$。存在常数 $C = C(R, T)$ 使得对任何 $\zeta_0 = (\varepsilon_0, n_0)$，$\eta_0 = (h_0, k_0)$，$\|\zeta_0\|_1 \leqslant R_1$，$\|\zeta_0 + \eta_0\|_1 \leqslant R$，$t < T$。有

$$\|S(t)(\zeta_0 + \eta_0) - S(t)\zeta_0 - (DS(t)\zeta_0)\eta_0\|_1 \leqslant C\|\eta_0\|_1^2 \tag{1.11.64}$$

其中 $(DS(t)\zeta_0)\eta_0 = (U(t), V(t))$ 为问题(1.11.59)～(1.11.62)具初值 $U(0) = h_0, V(0) = k_0$ 的解。

为了研究 $DS(t)$ 的 m 维体积的变化，我们引进问题(1.11.59)～(1.11.62)的一个能量等式。设 $(\varepsilon_0, n_0) \in X_2$，$(\varepsilon(t), n(t))$ 为问题(1.11.1)～(1.11.4)具初值 (ε_0, n_0) 的解。$(U(t), V(t))$ 为问题(1.11.59)～(1.11.62)具初值 $\eta_0 = (u_0, v_0)$ 的解。令 $u = \mathrm{e}^{\gamma t}U$，$v = \mathrm{e}^{\gamma t}V$。则 (u, v) 满足

$$\mathrm{i}u_t + u_{xx} - bv\varepsilon - bnu = 0 \tag{1.11.65}$$

$$v_t + \frac{1}{2}(f'(n)v)_x + \frac{\beta}{2}v_{xxx} + \nu v + \frac{1}{2}(\varepsilon\bar{u} + u\bar{\varepsilon})_x = 0 \tag{1.11.66}$$

类似于式(1.11.11)、(1.11.14)～(1.11.16)有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|_0^2 = \mathrm{Im}\, b(v\varepsilon, u) \tag{1.11.67}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}|u_x|_0^2 + k_1\right) = k_2 + \mathrm{Re}\, b\int_0^L \varepsilon\bar{u}v_t\mathrm{d}x \tag{1.11.68}$$

$$\frac{\mathrm{d}|v|_0^2}{\mathrm{d}t} = k_3 \tag{1.11.69}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\beta}{2}|v_x|_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^L f'(n)|v|^2\mathrm{d}x\right) = -(\nu-\gamma)\beta|v_x|_0^2 + 2(\mathrm{Re}\,\varepsilon\bar{u}, v_t) + k_4 \tag{1.11.70}$$

其中

$$k_1 = \frac{b}{2}\int_0^L n|u|^2\mathrm{d}x + b\mathrm{Re}\int_0^L v\varepsilon\bar{u}\mathrm{d}x \tag{1.11.71}$$

$$k_2 = -\frac{b}{2}\int_0^L\left(\frac{1}{2}f(n)_x + \nu n + \frac{1}{2}|\varepsilon|_x^2 - g_2\right)|u|^2\mathrm{d}x + \frac{b\beta}{2}\int_0^L n_{xx}\mathrm{Re}\,(u\,\overline{u_x})\mathrm{d}x \tag{1.11.72}$$

$$k_3 = -\int_0^L (f'(n)v)_x v\mathrm{d}x - 2(\nu-\gamma)|v|_0^2 - 2((\mathrm{Re}\,(\varepsilon\bar{u}))_x, v) \tag{1.11.73}$$

$$k_4 = \left(2\mathrm{Re}\,(\varepsilon\bar{u}), \frac{1}{2}(f'(n)v)_x + (\nu-\gamma)v\right) + \frac{1}{2}\left(f'(n)\left[\frac{1}{2}f(n)_x + \nu n + \frac{1}{2}|\varepsilon|_x^2 - g_2\right] - \frac{\beta}{2}f'''(n)n_x n_{xx}, v^2\right) (\nu-\gamma)(v, f'(n)v) - ((f'(n)v)_x, 2\mathrm{Re}\,(\varepsilon\bar{u})) \tag{1.11.74}$$

定义

$$J_\mu(u,v) = |u_x|_0^2 + \frac{|b\beta|}{2}|v_x|_0^2 + 2k_1 + \frac{b}{2}\int_0^L f'(n)|v|^2\mathrm{d}x + \mu|u|_0^2 + \mu|v|_0^2 \tag{1.11.75}$$

$$I_\mu(u,v) = 2k_2 + 2\mu\mathrm{Im}\,(v\varepsilon, u) - \mu k_3 - bk_4 + (\nu-\gamma)b\beta|v_x|_0^2 \tag{1.11.76}$$

则由式(1.11.67)～(1.11.74)，有

$$\frac{\mathrm{d}J_\mu(u,v)}{\mathrm{d}t} = I_\mu(u,v) \tag{1.11.77}$$

其中：μ 为充分大的正常数；$J_\mu(u,v)$为在 X_1 上的等价模。

设 X 为在 X_2 中的有界不变集，即有

$$S(t)X = X, \forall t \geqslant 0$$

令 $\zeta_0 \in X$，则 $S(t)\zeta_0 = S(t)(\varepsilon_0, n_0) = (\varepsilon(t), n(t)) \in X$。因此

$$|X|_\infty = \sup_{\zeta_0 \in X} \sup_{t \geqslant 0} \{ |\varepsilon(t)|_{L^\infty} + |n(t)|_{L^\infty} + |n_x(t)|_{L^\infty} \} < \infty \tag{1.11.78}$$

由式(1.11.75)J_μ 的定义可知，存在 $\mu > 0$ 和 $M_0, M_1 > 0$ 使得

$$M_0(\|u\|_1^2 + \|v\|_1^2) \leqslant J_\mu(u, v) \leqslant M_1(\|u\|_1^2 + \|v\|_1^2),$$
$$\forall (u, v) \in X_1 \tag{1.11.79}$$

$J_\mu(u, v)$ 为在 X_1 上的等价模。现引入在 X_1 上的 R-线性内积。

设 $\eta = (\eta_1, \eta_2), \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in X_1$。定义

$$\overline{\Psi}(\eta, \xi) = \mathrm{Re}\int_0^L [\eta_{1x} \overline{\xi_{1x}} + \frac{|b\beta|}{2}\eta_{2x}\xi_{2x} + \frac{b}{2}f'(n)\eta_2\xi_2 + \mu\eta_1\overline{\xi_1} +$$
$$\mu\eta_2\xi_2 + bn\eta_1\overline{\xi_1}]\mathrm{d}x + b\mathrm{Re}\int_0^L (\xi_2\varepsilon\overline{\eta_1} + \eta_1\varepsilon\overline{\xi_1})\mathrm{d}x \tag{1.11.80}$$

容易证明 $\overline{\Psi}(\eta, \xi)$ 为 X_1 上的 R-线性对称形式，且 $\overline{\Psi}(\eta, \eta) = J_\mu(\eta, \eta)$，由式(1.11.79)具有强制性。$\overline{\Psi}(\eta, \eta)^{\frac{1}{2}}$ 为 X_1 上的等价模。

令 $\xi_0^j = (u_{0j}, v_{0j}), j = 1, 2, \cdots, m$ 为 X_1 中 m 个元素，$\xi^j(t) = (DS(t)\xi_0)\xi^0$ 为问题(1.11.59)～(1.11.62)相应的解。令 $\eta^j(t) = \mathrm{e}^{\gamma t}\zeta^j(t), j = 1, 2, \cdots, m$。则 $\eta^j(t) = (u^j(t), v^j(t))$ 满足式(1.11.65)(1.11.66)及初值 $\eta^j(0) = (u_{0j}, v_{0j})$。研究如下体积量的发展

$$|\xi^1(t) \wedge \xi^2(t) \wedge \cdots \wedge \xi^m(t)|_{\wedge^m(X_1)} = \det_{1 \leqslant i,j \leqslant m} (\xi^i, \xi^j) \tag{1.11.81}$$

定理 1.11.3 设 X 为 $S(t)$ 在 X_2 中的有界不变集。则存在常数 C_1 和 C_2 使得对任何 $\zeta_0(\varepsilon_0, n_0) \in X_2, m \geqslant 1, t \geqslant 0$ 有

$$|\xi^1(t) \wedge \xi^2(t) \wedge \cdots \wedge \xi^m(t)|_{\wedge^m(X_1)} \leqslant$$
$$|\xi_0^1 \wedge \xi_0^2 \wedge \cdots \wedge \xi_0^m|_{\wedge^m(X_1)} C_1 \mathrm{e}^{(C_2\sqrt{m} - \gamma m)t}, \forall \xi_0^j \in X_1 \tag{1.11.82}$$

证 首先注意到

$$|\xi^1(t)\wedge\xi^2(t)\wedge\cdots\wedge\xi^m(t)|^2_{\wedge^m(X_1)}=$$

$$\mathrm{e}^{-2\gamma mt}|\eta^1\wedge\eta^2\wedge\cdots\wedge\eta^m|_{\wedge^m(X_1)}=$$

$$\mathrm{e}^{-2\gamma mt}\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}\Psi(\eta^i(t)) \tag{1.11.83}$$

于是仅需估计 $H_m(t)=\det\limits_{1\leqslant i,j\leqslant m}\Psi(\eta^i(t),\eta^j(t))$。我们有

$$\frac{\mathrm{d}H_m(t)}{\mathrm{d}t}=H_m(t)\sum_{l=1}^m\max_{\substack{F\subset\mathbf{R}^m\\ \dim F=l}}\min_{\substack{x\in F\\ x\neq 0}}\frac{I_\mu(\sum\limits_{j=1}^m x_j\eta^j(t))}{J_\mu(\sum\limits_{j=1}^m x_j\eta^j(t))} \tag{1.11.84}$$

由式(1.11.78)，$|n|_{L^\infty}$，$|n_x|_{L^\infty}$，$|\varepsilon|_{L^\infty}$，$|\varepsilon_x|_{L^\infty}$为一致有界，对 $\zeta_0=(\varepsilon_0,n_0)\in X$，我们有

$$|k_2|\leqslant C|u|_0^2+C\int_0^L|n_{xx}||u||u_x|\mathrm{d}x,$$

$$C|u|_0^2+C\|n\|_2|u|_{L^\infty}|n_x|_0\leqslant C|u|_1^{\frac{3}{2}}|u|_0^{\frac{1}{2}},$$

$$\mu|k_3|=\mu|-\int_0^L(f'(n)v)_xv\mathrm{d}x-2(\nu-\gamma)|v|_0^2+$$

$$2(\mathrm{Re}\ (\varepsilon\bar{u}),v_x)|\leqslant\frac{1}{8}(\nu-\gamma)|b\beta||v_x|_0^2+C(|v|_0^2+|v_x|_0|u|_0)\leqslant$$

$$\frac{1}{8}(\nu-\gamma)|b\beta||v_x|_0^2+C(\|v\|_1^{\frac{3}{2}}|v|_0^{\frac{1}{2}}+\|u\|_1^{\frac{3}{2}}|u|_0^{\frac{1}{2}}),$$

$$|bk_4|\leqslant C(|v_x|_0|u|_0+|u|_0^2+|v|_0^2+\|v\|_{L^4}^2)\leqslant$$

$$\frac{1}{4}(\nu-\gamma)|b\beta|\,|v_x|_0^2+C(\|u\|_1^{\frac{3}{2}}|u|_0^{\frac{1}{2}}+\|v|_1^{\frac{3}{2}}|v|_0^{\frac{1}{2}})$$

因此

$$I_\mu(u,v)=2k_2+2\mu\mathrm{Im}(v\varepsilon,\mu)-\mu k_3-bk_4+(\nu-\gamma)b\beta|v_x|_0^2\leqslant$$

$$\frac{1}{2}(\nu-\gamma)b\beta|v_x|_0^2+C(\|u\|_1^{\frac{3}{2}}|u|_0^{\frac{1}{2}}+\|v\|_1^{\frac{3}{2}}|v|_0^{\frac{1}{2}})\leqslant$$

$$M(\|u\|_1^{\frac{3}{2}}|u|_0^{\frac{1}{2}}+\|v\|_1^{\frac{3}{2}}|v|_0^{\frac{1}{2}}) \tag{1.11.85}$$

因 $\nu>\gamma, b\beta<0$。M 为正常数。

另一方面，$J_\mu=J_\mu(u,v)\geqslant M_0(\|u\|_1^2+\|v\|_1^2)$。从式(1.11.83)、(1.11.84)有

$$\frac{\mathrm{d}H_m(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant\frac{M}{M_0}H_m(t)\sum_{l=1}^{m}\max_{\substack{F\subset\mathbf{R}^m\\ \dim F=l}}\min_{\substack{x\in F\\ x\neq 0}}$$

$$\frac{\|\sum_{j=1}^{m}x_ju_j(t)\|_1^{\frac{3}{2}}|\sum_{j=1}^{m}x_ju_j(t)|_0^{\frac{1}{2}}}{\|\sum_{j=1}^{m}x_ju_j(t)\|_1^2+\|\sum_{j=1}^{m}x_jv_j(t)\|_1^2}+$$

$$\frac{\|\sum_{j=1}^{m}x_jv_j(t)\|_1^{\frac{3}{2}}|\sum_{j=1}^{m}x_jv_j(t)|_0^{\frac{1}{2}}}{\|\sum_{j=1}^{m}x_ju_j(t)\|_1^2+\|\sum_{j=1}^{m}x_jv_j(t)\|_1^2}$$

$$\leqslant\frac{M}{M_0}H_m(t)\sum_{l=1}^{m}\max_{\substack{F\subset\mathbf{R}^m\\ \dim F=l}}\min_{\substack{x\in F\\ x\neq 0}}$$

$$\left\{\frac{|\sum_{j=1}^{m}x_ju_j(t)|_0^{\frac{1}{2}}}{\|\sum_{j=1}^{m}x_ju_j(t)\|_1^{\frac{1}{2}}}+\frac{|\sum_{j=1}^{m}x_jv_j(t)|_0^{\frac{1}{2}}}{\|\sum_{j=1}^{m}x_jv_j(t)\|_1^{\frac{1}{2}}}\right\}\leqslant\frac{2M}{M_0}H_m(t)\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{\lambda_l^{1/4}}$$

其中我们用到了 Max-Min 定理和 λ_j 为 $A=-\partial_{xx}$ 的第 j 个特征值。我们知道，$\lambda_j\sim cj^2(j\to\infty)$，故存在常数 C_2 使得

$$\frac{\mathrm{d}H_m(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant 2C_2\sqrt{m}H_m(t)\qquad(1.11.86)$$

因此，$H_m(t)\leqslant \mathrm{e}^{2C_2\sqrt{m}t}H_m(0), t>0$。联系式(1.11.83)，即得到式(1.11.82)。

作为定理 1.11.3 的推论，有

定理 1.11.4 定理 1.11.2 所定义的整体吸引子 $\mathscr{A}$ 在 X_1 中具有有限的分形和 Hausdorff 维数。

证 由定理 1.11.3 知，对 $\chi_0\in\mathscr{A}$

$$\omega_m(DS(t)\chi_0)\leqslant C^m\exp(C_2\sqrt{m}-\gamma m)t$$

其中 ω_m 为 Lyapunov 指数。当 m 充分大时，$\overline{\omega_m}(\mathscr{A})<1$，其中 $\overline{\omega_m}(\mathscr{A})$ 为 $\mathscr{A}$ 的一致 Lyapunov 指数。由文献[80]中的定理 V3.1，可知 $\mathscr{A}$ 在 X_1 中具有有限的分形和 Hausdorff 维数。

1.12 在 Riemann 流形上的 Landau-Lifshitz 方程

设(M,γ)和(N,g)为两个 Riemann 流形，M 为无边的，N 为 S^2。我们将证明在 Riemann 流形上 Landau-Lifshitz (LL)方程吸引子的存在性及给出吸引子维数的上下界估计。为此，必须给出一致先验估计，证明整体解和吸引子的存在性。

考虑如下在 Riemann 流形上的 Landau-Lifshitz 方程

$$\partial_t\mathbf{u} = -\alpha_1\mathbf{u}\times(\mathbf{u}\times\Delta_M\mathbf{u}) + \alpha_2\mathbf{u}\times\Delta_M\mathbf{u} \tag{1.12.1}$$

具有初值条件

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(x),\ |\mathbf{u}_0(x)|^2 = 1,\ x = (x_1,\cdots,x_n)\in M \tag{1.12.2}$$

其中 $\mathbf{u}:M\to S^2$，Δ_M 为 Laplace—Beltrami 算子

$$\Delta_M := \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\gamma^{\alpha\beta}\sqrt{\gamma}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) = \gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha\partial x^\beta} - \Gamma^k_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^k}$$

1993 年，郭、洪在文献[69]中证明了：在古典意义下，$\mathbf{u}$ 为问题(1.12.1)、(1.12.2)的解，当且仅当 $\mathbf{u}$ 为方程

$$\partial_t\mathbf{u} = \alpha_1\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\gamma^{\alpha\beta}\sqrt{\gamma}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x^\beta}\right) + \alpha_1|\nabla\mathbf{u}|^2\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{u}\times\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\gamma^{\alpha\beta}\sqrt{\gamma}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x^\alpha}\right) \tag{1.12.3}$$

具相同初值(1.12.2)的解，同时还证明了：在古典意义下，$\mathbf{u}:M\to S^2$ 为调和映照，当且仅当 $\mathbf{u}$ 满足(1.12.1)，$\partial_t\mathbf{u}(x,t)=0$，$\forall t\geqslant 0$，而 $M\to S^2$ 的调和映照的热流方程为

$$\partial_t\mathbf{u} = \Delta_M\mathbf{u} + |\nabla\mathbf{u}|^2\mathbf{u} \tag{1.12.4}$$

现作一致先验估计

设(M,γ)为有边或无边的紧致 Riemann 流形，∇ 表示对应于 γ 的联络(协变导数)

$$|\nabla\mathbf{u}(x)|^2 = \sum_{\alpha\beta}\sum_i\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial u^i}{\partial x^\beta} \tag{1.12.5}$$

对于实函数 $\varphi\in C^k(M)$（$k\geqslant 0$ 为整数），定义

$$|\nabla^k\varphi|^2=\nabla^{\alpha_1}\cdot\nabla^{\alpha_2}\cdots\nabla^{\alpha_k}\cdot\nabla_{\alpha_1}\cdot\nabla_{\alpha_2}\cdots\nabla_{\alpha_k}\varphi$$

特别，$|\nabla^1\varphi|=|\nabla\varphi|$，$|\nabla^1\varphi|^2=|\nabla\varphi|^2=\nabla^\nu\varphi\nabla_\nu\varphi$，$\nabla^k\varphi$ 为 φ 的 k 阶协变导数。

考虑 C^∞ 函数 φ 的向量空间 L_k^p，$|\nabla^l\varphi|\in L^p(M)$ $\forall 0\leqslant l\leqslant k$，其中 k 和 l 为整数，$p\geqslant 1$ 为实数。Sobolev 空间 $W_p^k(M)$ 为空间 $L_k^p(M)$ 依模

$$\|\varphi\|_{W_k^p(M)}=\sum_{l=0}^{k}\|\nabla^l\varphi\|_p$$

的完备化。特别，$W_2^k(M)=H^k(M)$，$\|\cdot\|_2=\|\cdot\|$。

引理 1.12.1　设 $|\mathbf{u}_0(x)|^2=1$，则对初值问题(1.12.1)、(1.12.2)的光滑解，我们有

$$|\mathbf{u}(x,t)|^2=1,\ \forall(x,t)\in M\times[0,\infty) \qquad (1.12.6)$$

证　式(1.12.1)乘以 $\mathbf{u}$，可得

$$\mathbf{u}\cdot\partial_t\mathbf{u}=0,\ \forall\ (x,t)\in M\times[0,\infty)$$

则由式(1.12.2)，可得式(1.12.6)。

引理 1.12.2　设引理 1.12.1 条件满足，且 $\|\nabla\mathbf{u}_0\|<\infty$，则有

$$\|\nabla\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2\leqslant\|\nabla\mathbf{u}_0\|^2 \qquad (1.12.7)$$

$$2\alpha_1\int_0^t\|\mathbf{u}\times\Delta_M\mathbf{u}\|^2\mathrm{d}t\leqslant\|\nabla\mathbf{u}_0\|^2,\ \forall\ 0\leqslant t<\infty \qquad (1.12.8)$$

证　式(1.12.1)乘以 $\Delta_M\mathbf{u}$，有

$$\Delta_M\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_t=-\alpha_1\Delta_M\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times(\mathbf{u}\times\Delta_M\mathbf{u}))=$$

$$-\alpha_1(\mathbf{u}\times\Delta_M\mathbf{u})\cdot(\Delta_M\mathbf{u}\times\mathbf{u})=\alpha_1|\mathbf{u}\times\Delta_M\mathbf{u}|^2,$$

$$\int_M\Delta_M\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_t\mathrm{d}M=-\int_M\gamma^{\alpha\beta}\sqrt{\gamma}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}^\alpha}\frac{\partial\mathbf{u}_t}{\partial x^\beta}\mathrm{d}x+$$

$$\int_M\mathbf{u}_t\gamma^{\alpha\beta}\sqrt{\gamma}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}^\alpha}\cos(\nu,x^\beta)\mathrm{d}s=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_M\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial u^i}{\partial x^\beta}\mathrm{d}M=$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla \mathbf{u}(\cdot,t)\|^2$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla \mathbf{u}(\cdot,t)\|^2+2\alpha_1\int_M|\mathbf{u}\times\Delta_M\mathbf{u}|^2\mathrm{d}M=0$$

由此推出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla \mathbf{u}(\cdot,t)\|^2\leqslant 0$$

即得引理结论。

引理 1.12.3 在紧 Riemann 流形上的 Sobolev 插值不等式：设 M 为具有光滑边界的紧的 Riemann 流形。q,r 为实数，$1\leqslant q,r\leqslant\infty$，$j,m$ 为整数，$0\leqslant j<m$。则存在常数 C，它依赖于 n,m,j,q,r 和 a 使得对一切 $f\in W_r^m(M)\cap L_q(M)$，有

$$\|\nabla^j f\|_p\leqslant C\|f\|_{W_r^m(M)}^a\|f\|_q^{1-a},\tag{1.12.9}$$

其中

$$\frac{1}{p}=\frac{j}{n}+a\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right)+(1-a)\frac{1}{q}$$

对一切 a 成立，$\frac{j}{m}\leqslant a\leqslant 1$，$p$ 为非负整数。

证 由文献[239]中定理 3.70 有

$$\|\nabla^i F\|_p\leqslant C\|\nabla^m F\|_r^a\|F\|_q^{1-a}\tag{1.12.10}$$

其中

$$F=f-\bar{f},\bar{f}=\frac{1}{\mathrm{vol}M}\int_M f\mathrm{d}M,$$

$$\frac{1}{p}=\frac{i}{n}+a\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right)+(1-a)\frac{1}{q}$$

(1) $i>0$，由式(1.12.10)可得

$$\|\nabla^i f\|_p\leqslant C\|\nabla^m f\|_r^a(\|f\|_q+\|\bar{f}\|_q)^{1-a}\leqslant$$

$$C'\|\nabla^m f\|_r^a\|f\|_q^{1-a}\leqslant C'\|f\|_{W_r^m(M)}^a\|f\|_q^{1-a}$$

(2) $i=0$，由 Hölder 不等式，有

$$\int |f|^p \mathrm{d}x = \int |f|^\alpha |f|^\beta \mathrm{d}x \leqslant (\int |f|^{\alpha l} \mathrm{d}x)^{\frac{1}{l}} (\int |f|^{\beta l'} \mathrm{d}x)^{\frac{1}{l'}},$$

其中

$$\alpha + \beta = p, \alpha l = r, \beta l' = q, \frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = 1$$

则

$$\frac{1}{l} = (\frac{q-p}{q-r}) \frac{r}{p}, \frac{1}{l'} = 1 - \frac{1}{l}$$

从式(1.12.1)、(1.12.2)即得式(1.12.9)。

附注：代替空间 $W_k^p(M)$，Aubin T. 在文献[217]中引入空间 $V_k^p(M)$，它是空间 S_k^p 依模

$$\|\varphi\|_{V_k^p(M)} = \sum_{0\leqslant l\leqslant\frac{k}{2}} \|\Delta_M^l \varphi\|_p + \sum_{0\leqslant l\leqslant\frac{k-1}{2}} \|\nabla \Delta_M^l \varphi\|_p$$

的完备化，其中向量空间 S_k^p 为 $\varphi \in C^\infty(M)$，$\Delta_M^l \varphi \in L^p(M)$，$0 \leqslant l \leqslant \frac{k}{2}$，使得 $|\nabla \Delta_M^l \varphi| \in L^p(M)$ $0 \leqslant l \leqslant \frac{k-1}{2}$。

引理 1.12.4 设引理 1.12.3 的条件满足。设

$$\|\nabla \mathbf{u}_0(x)\| \leqslant \lambda, (n=2) \tag{1.12.11}$$

其中常数 λ 适当小，则有

$$\|\Delta_M \mathbf{u}(\cdot, t)\| \leqslant \frac{E_1}{t}, \quad \forall\, \mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n), \quad t > 0, n \leqslant 2 \tag{1.12.12}$$

其中常数 E_1 仅依赖于 $\|\nabla \mathbf{u}_0(x)\|_{H^1(M)}$，$0 < t \leqslant T$。

证 以 Δ_M 作用于式(1.12.2)，再和 $t\Delta_M \mathbf{u}$ 作内积可得

$$(t\Delta_M \mathbf{u}, \Delta_M \mathbf{u}_t - \alpha_1 \Delta_M^2 \mathbf{u} - \alpha_1 \Delta_M(|\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) - \alpha_2 \Delta_M(\mathbf{u} \times \Delta_M \mathbf{u})) = 0 \tag{1.12.13}$$

其中

$$t(\Delta_M \mathbf{u}, \Delta_M \mathbf{u}_t) = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t\|\Delta_M \mathbf{u}\|^2) - \frac{1}{2}\|\Delta_M \mathbf{u}\|^2,$$

$$(\Delta_M \mathbf{u}, \alpha_1 \Delta_M^2 \mathbf{u}) = \alpha_1 \int \Delta_M \mathbf{u} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\beta}(\gamma^{\alpha\beta} \sqrt{\gamma} \frac{\partial \Delta_M \mathbf{u}}{\partial x^\alpha}) \sqrt{\gamma} \mathrm{d}x =$$

$$-\alpha_1 \int \gamma^{\alpha\beta} \sqrt{\gamma} \frac{\partial \Delta_M \mathbf{u}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \Delta_M \mathbf{u}}{\partial x^\beta} \mathrm{d}x =$$

$$-\alpha_1 \| \nabla \Delta_M \mathbf{u} \|^2,$$

$$| \int \Delta_M \mathbf{u} \cdot \Delta_M (\mathbf{u} \times \Delta_M \mathbf{u}) \sqrt{\gamma} \mathrm{d}x | =$$

$$| \int \Delta_M \mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\beta}(\gamma^{\alpha\beta} \sqrt{\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\mathbf{u} \times \Delta_M \mathbf{u})) \mathrm{d}x | =$$

$$| \int \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial \Delta_M \mathbf{u}}{\partial x^\beta} \frac{\partial (\mathbf{u} \times \Delta_M \mathbf{u})}{\partial x^\alpha} \sqrt{\gamma} \mathrm{d}x | = \qquad (1.12.14)$$

$$| \int \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial \Delta_M \mathbf{u}}{\partial x^\beta} [\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \times \Delta_M \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \frac{\partial \Delta_M \mathbf{u}}{\partial x^\alpha}] \sqrt{\gamma} \mathrm{d}x | \leqslant$$

$$C_1 \| \nabla \Delta_M \mathbf{u} \| \; \| \nabla \mathbf{u} \|_\infty \| \Delta_M \mathbf{u} \|$$

在上式中,我们用到了:

$$\int \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial \Delta_M \mathbf{u}}{\partial x^\beta} (\mathbf{u} \times \frac{\partial \Delta_M \mathbf{u}}{\partial x^\alpha}) \sqrt{\gamma} \mathrm{d}x = 0 \qquad (1.12.15)$$

引理 1.12.2 推出

$$\| \nabla \mathbf{u} \|_\infty \leqslant C_2 \| \nabla^3 \mathbf{u} \|^{\frac{1}{2}} \| \nabla \mathbf{u} \|^{\frac{1}{2}} + C_3, (n = 2)$$

$$\| \Delta_M \mathbf{u} \| \leqslant C_4 \| \nabla^3 \mathbf{u} \|^{\frac{1}{2}} \| \nabla \mathbf{u} \|^{\frac{1}{2}} + C_5 \quad (1.12.16)$$

其中常数 C_3 和 C_5 依赖于 $\| \nabla \mathbf{u}_0 \|$。

将式(1.12.16)代人式(1.12.14)可得

$$| \int_M \Delta_M \mathbf{u} \cdot \Delta_M (\mathbf{u} \times \Delta_M \mathbf{u}) \mathrm{d}M | \leqslant 2C_1 C_2 C_4 C_6 \| \nabla \mathbf{u} \| \; \| \nabla^3 \mathbf{u} \|^2 + C'_6$$

$$(1.12.17)$$

其中

$$\| \nabla \Delta_M \mathbf{u} \| \leqslant C'_6 \| \nabla^3 \mathbf{u} \|$$

常数 C'_6 依赖于 $\| \nabla \mathbf{u}_0 \|$。

现估计式(1.12.13)中的项$(\Delta_M(|\nabla \mathbf{u}| \mathbf{u}), \Delta_M^2 \mathbf{u})$。

$$|(\Delta_M \mathbf{u}, \Delta_M(|\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u}))| =$$

$$|\int_M \Delta_M \mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\beta} \gamma^{\alpha\beta} \sqrt{\gamma} \frac{\partial |\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u}}{\partial x^\alpha} \mathrm{d}x| =$$

$$|\int_M \gamma^{\alpha\beta} \sqrt{\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} |\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\beta} \Delta_M \mathbf{u} \mathrm{d}x| =$$

$$|\int_M \gamma^{\alpha\beta} \sqrt{\gamma} ((\frac{\partial}{\partial x^\alpha} |\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) \mathbf{u} + |\nabla \mathbf{u}|^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^\alpha}) \frac{\partial}{\partial x^\beta} \Delta_M \mathbf{u} \mathrm{d}x| =$$

$$|\int_M \gamma^{\alpha\beta} [2\gamma^{l\delta}(x) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^\alpha \partial x^l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^\delta} \mathbf{u} + \gamma^{l\delta}(x)' \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^\delta} \mathbf{u} +$$

$$|\nabla \mathbf{u}|^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^\alpha}] \frac{\partial \Delta_M \mathbf{u}}{\partial x^\beta} \mathrm{d}M| \leqslant$$

$$C_7 [\| \nabla \mathbf{u} \|_\infty \| \mathbf{u} \|_\infty \| \nabla^2 \mathbf{u} \| \| \nabla \Delta_M \mathbf{u} \| +$$

$$\| \nabla \mathbf{u} \|^2 \| \mathbf{u} \|_\infty \| \nabla \Delta_M \mathbf{u} \| +$$

$$\| \nabla \mathbf{u} \|_\infty^2 \| \nabla \mathbf{u} \| \| \nabla \Delta_M \mathbf{u} \|] \leqslant C_7 [2C_2 C_4 \| \nabla \mathbf{u} \| +$$

$$(2C_2^2 + 1) \| \nabla \mathbf{u} \|^2] \| \nabla^3 \mathbf{u} \| + C_8 \tag{1.12.18}$$

其中常数 C_7、C_8 依赖于 $\| \nabla \mathbf{u}_0 \|$ 和 $\sup_{x \in M}(|\gamma^{\alpha\beta}(x)|, |\gamma^{\alpha\beta'}(x)|)$。

因此由式(1.12.8)、(1.12.12)、(1.12.13),可得

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} t \| \Delta_M \mathbf{u} \|^2 - \frac{1}{2} \| \Delta_M \mathbf{u} \|^2 + \alpha_1 t \| \nabla \Delta_M \mathbf{u} \|^2 \leqslant$$

$$2t [|\alpha_2| C_1 C_2 C_4 C_6 + \alpha_1 C_7 C_2 C_4 +$$

$$\alpha_1 (C_2^2 + 1) C_7 \| \nabla \mathbf{u} \|] \| \nabla \mathbf{u} \| \| \nabla^3 \mathbf{u} \| + C_9 \tag{1.12.19}$$

现估计 $\| \nabla \Delta_M \mathbf{u} \|^2$ 的下界。

由 Ricci 公式

$$\Delta(\nabla^k f) = \nabla^k (\Delta f) + \sum_{i=0}^{k-1} S_{ki} (\nabla^{k-i} f) \tag{1.12.20}$$

其中 S_{ki} 为依赖于曲率张量协变导数 $\nabla^i R$ 的线性泛函。由此可得

$$\| \nabla \Delta_M \mathbf{u} \|_2 = \| \Delta_M (\nabla \mathbf{u}) - S_{10} (\nabla \mathbf{u}) \| \geqslant$$

$$\| \Delta_M (\nabla \mathbf{u}) \| - S_{10} \| \nabla \mathbf{u} \| \tag{1.12.21}$$

因

$$\|\Delta_M(\nabla \mathbf{u})\|^2=\int_M \sum_j(\sum_i u_{jii})(\sum_k u_{jkk})\mathrm{d}M=$$

$$\sum_j\int_M(\sum_i u_{jii})(\sum_k u_{jkk})\mathrm{d}M=-\sum_j\int_M(\sum_i u_{ji})(\sum_k u_{jkki})\mathrm{d}M=$$

$$-\sum_j\int_M(\sum_i u_{ji})\sum_k(u_{jkik}+u_{jl}R^l_{kki}+u_{lk}R^l_{jki})\mathrm{d}M=$$

$$-\sum_j\int_M(\sum_i u_{ji})\sum_k(u_{jikk}+u_l R^l_{jkik}+u_{lk}R^l_{jki}+u_{jl}R^l_{kki}+$$

$$u_{lk}R^l_{jki})\mathrm{d}M\geqslant\int_M|\nabla^3\mathbf{u}|^2\mathrm{d}M-C_{11}\int_M|\nabla\mathbf{u}|^2\mathrm{d}M \qquad (1.12.22)$$

因此从式(1.12.19)、(1.12.21)、(1.12.22)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t\,\|\Delta_M\mathbf{u}\|^2-\|\Delta_M\mathbf{u}\|^2+2t[\alpha_1-(2\alpha_2C_1C_2C_4C_6-$$

$$2\alpha_1C_7C_2C_4+2\alpha_1(C_2^2+1)C_7\|\nabla\mathbf{u}\|+$$

$$C_{12}\|\nabla\mathbf{u}\|)]\|\nabla\mathbf{u}\|\,\|\nabla^3\mathbf{u}\|^2\leqslant C_{13} \qquad (1.12.23)$$

选取 $\|\nabla\mathbf{u}_0\|$ 适当小,使得

$$\alpha_1-(2|\alpha_2|C_1C_2C_4C_6+2\alpha_1C_7C_2C_4+2\alpha_1(C_2^2+1)C_7\|\nabla\mathbf{u}_0\|+$$

$$C_{12}\|\nabla\mathbf{u}_0\|)\|\nabla\mathbf{u}_0\|>\frac{\alpha}{2}>0$$

从式(1.12.23),可得

$$t\,\|\Delta_M\mathbf{u}\|^2-\int_0^t\|\Delta_M\mathbf{u}\|^2\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\alpha\int_0^t t\,\|\Delta_M^3\mathbf{u}\|^2\mathrm{d}t\leqslant C_{13}t$$

$$(1.12.24)$$

为了估计在式(1.12.24)左边的项$\int_0^t\|\Delta_M\mathbf{u}\|^2\mathrm{d}t$,需要如下引理。

引理 1.12.5 在引理 1.12.2 下,有

$$\int_0^t\left\|\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right\|^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}{\alpha_1}\|\nabla\mathbf{u}_0\|^2,\quad\forall t\in\mathbf{R}^+,$$

$$(1.12.25)$$

$$\int_0^t\|\Delta_M\mathbf{u}\|^2\mathrm{d}t\leqslant C_{14},\ 0\leqslant t\leqslant T \qquad (1.12.26)$$

其中常数C_{14}依赖于$\|\nabla \mathbf{u}_0\|$和T。

证 乘方程(1.12.3)以$\partial_t \mathbf{u}$,并对$(x,t)\in M\times[0,t)$积分得

$$\int_0^t\int_M |\partial_t \mathbf{u}|^2 \mathrm{d}M\mathrm{d}t + \frac{\alpha_1}{2}\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla \mathbf{u}\|^2 \mathrm{d}t -$$

$$\alpha_2\int_0^t\int_M \partial_t \mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\Delta_M \mathbf{u})\mathrm{d}M\mathrm{d}t = 0 \qquad (1.12.27)$$

对方程(1.12.3)和$\mathbf{u}$作叉积得

$$\mathbf{u}\times\partial_t \mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}\times(\Delta_M \mathbf{u}) + \alpha_2(\mathbf{u}\times(\mathbf{u}\times\Delta_M \mathbf{u})) =$$

$$\alpha_1(\mathbf{u}\times\Delta_M \mathbf{u}) - \alpha_2\Delta_M \mathbf{u} - \alpha_2|\nabla \mathbf{u}|^2\mathbf{u}$$

因

$$-\Delta_M \mathbf{u} - |\nabla \mathbf{u}|^2\mathbf{u} = -\frac{1}{\alpha_1}\partial_t \mathbf{u} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(\mathbf{u}\times\Delta_M \mathbf{u})$$

由此得

$$\mathbf{u}\times\partial_t \mathbf{u} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\partial_t \mathbf{u} = \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}\right)(\mathbf{u}\times\Delta_M \mathbf{u}) \qquad (1.12.28)$$

式(1.12.28)乘以$\partial_t \mathbf{u}$,有

$$\partial_t \mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\Delta_M \mathbf{u}) = \alpha_2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{-1}|\partial_t \mathbf{u}|^2$$

$$\alpha_2\int_0^t\int_M \partial_t \mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\Delta_M \mathbf{u})\mathrm{d}M\mathrm{d}t = \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\int_0^t\int_M |\partial_t \mathbf{u}|^2 \mathrm{d}M\mathrm{d}t$$

由式(1.12.27),有

$$\frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\int_0^t\int_M |\partial_t \mathbf{u}|^2 \mathrm{d}M\mathrm{d}t + \frac{\alpha_1}{2}(\|\nabla \mathbf{u}(\cdot,t)\|^2 - \|\nabla \mathbf{u}_0\|^2) = 0$$

即有

$$\int_0^t\int_M |\partial_t \mathbf{u}|^2 \mathrm{d}M\mathrm{d}t \leqslant \frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{2\alpha_1}\|\nabla \mathbf{u}_0\|^2, \quad \forall t\in \mathbf{R}^+ \qquad (1.12.29)$$

由式(1.12.3),有

$$\int_0^t \|\Delta_M \mathbf{u}\|^2 \mathrm{d}t \leqslant C_{15}\Big(\int_0^t \|\mathbf{u}_t\|^2 \mathrm{d}t + \int_0^t \|\mathbf{u}\times\Delta_M \mathbf{u}\|^2 \mathrm{d}t +$$

$$\int_0^t\int_M |\nabla \mathbf{u}|^4 \mathrm{d}M\mathrm{d}t) \qquad (1.12.30)$$

由 Sobolev 不等式(1.12.9)，有

$$\int_M |\nabla \mathbf{u}|^4 \mathrm{d}M \leqslant C_{16} \| \nabla^2 \mathbf{u} \|^2 \| \nabla \mathbf{u} \|^2 + C_{17}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \qquad (1.12.31)$$

其中常数 C_{17} 依赖于 $\| \nabla \mathbf{u}_0 \|$ 和 $0\leqslant t\leqslant T$。

由 Laplace-Beltrami 算子的定义推出

$$C_{18} \| \nabla^2 \mathbf{u} \|^2 + C_{19} \| \nabla \mathbf{u} \|^2 \geqslant \| \Delta_M \mathbf{u} \|^2 \geqslant C_{18} \| \nabla^2 \mathbf{u} \|^2 - C_{19} \| \nabla \mathbf{u} \|^2 \qquad (1.12.32)$$

其中常数 C_{18}、C_{19} 分别依赖于 $\sup_{x\in M} |\gamma^{\alpha\beta}(x)|$ 和 $\sup_{x\in M} |\Gamma^k_{\alpha\beta}|$。因此，从式(1.12.29)可得

$$C_{18}\int_0^t \| \nabla^2 \mathbf{u} \|^2 \mathrm{d}t - C_{15}C_{16}\int_0^t \| \nabla^2 \mathbf{u} \|^2 \mathrm{d}t \cdot \| \nabla \mathbf{u}_0 \|^2 \leqslant$$

$$C_{15}\left(\int_0^t \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{t}} \right\|^2 \mathrm{d}t + \int_0^t \| \mathbf{u} \times \Delta_M \mathbf{u} \|^2 \mathrm{d}t + C_{17}\right) + C_{19} \| \nabla \mathbf{u}_0 \|^2 t \qquad (1.12.33)$$

选取 $\| \nabla \mathbf{u}_0 \|$ 适当小，使得

$$C_{18} - C_{15}C_{16} \| \nabla \mathbf{u}_0 \|^2 \geqslant \frac{C_{18}}{2} \qquad (1.12.34)$$

由式(1.12.7)、(1.12.8)、(1.12.31)、(1.12.32)，有

$$\int_0^t \| \Delta_M \mathbf{u} \|^2 \mathrm{d}t \leqslant C_{14}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \qquad (1.12.35)$$

引理证毕。

利用式(1.12.34)、(1.12.24)可得

$$\| \Delta_M \mathbf{u} \|^2 \leqslant \frac{E_1}{t}, \quad \forall\, x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), n \leqslant 2, t > 0 \qquad (1.12.36)$$

其中常数 E_1 仅依赖于 $\| \nabla \mathbf{u}_0 \|$ 和 T。这就证明了引理。

不等式(1.12.12)在 n=1 时无需条件 $\| \nabla \mathbf{u}_0 \| \leqslant \lambda$ 的限制。

事实上，由引理 1.12.2，有

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{\infty} \leqslant C_2 \|\nabla^3 \mathbf{u}\|^{\frac{1}{4}} \|\nabla \mathbf{u}\|^{\frac{3}{4}} + C_3,$$

$$\|\Delta_M \mathbf{u}\| \leqslant C_4 \|\nabla^3 \mathbf{u}\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{u}\|^{\frac{1}{2}} + C_5, (n = 1),$$

$$\int_M |\nabla \mathbf{u}|^4 \mathrm{d}M \leqslant C_{15} \|\nabla^2 \mathbf{u}\| \; \|\nabla \mathbf{u}\|^3 + C_{17}$$

由此易得不等式(1.12.12)。

现来证明问题(1.12.1)、(1.12.2)整体唯一光滑解的存在性。

定理 1.12.5[69]　设 $\mathbf{u}_0 : M^\varepsilon \equiv M \to S^2$ 为一光滑映照。则存在常数 $\varepsilon \geqslant 0$ 和映照 $\mathbf{u} : M \times [0, \varepsilon] \to S^2, \mathbf{u} \in L_2^\rho(M^\varepsilon)$，满足方程

$$\partial_t \mathbf{u} = \alpha_1 \Delta_M \mathbf{u} + \alpha_1 |\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{u} \times \Delta_M \mathbf{u}, (x, t) \in M \times [0, \varepsilon], \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, x \in M \times \{0\}$$

且 $\mathbf{u}$ 是唯一的和光滑的。

引理 1.12.6　设 $\mathbf{u}_0(x) \in H^1(M), |\mathbf{u}_0(x)|^2 = 1$，则对问题(1.12.1)、(1.12.2)的光滑解，有

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^1(M)} \leqslant C_1 \tag{1.12.37}$$

其中常数 C_1 依赖于 $\|\mathbf{u}_0(x)\|_{H^1(M)}$。

证　类似于引理 1.12.1，引理 1.12.2。

引理 1.12.7　设引理 1.12.6 条件满足，且设

$$\|\nabla \mathbf{u}_0\| \leqslant \lambda, (n = 2), \tag{1.12.38}$$

其中常数 λ 适当小，则有

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\nabla^2 \mathbf{u}(\cdot, t)\| \leqslant C_2 \tag{1.12.39}$$

其中常数 C_2 依赖于 $\|\mathbf{u}_0(x)\|_{H^2(M)}$。

证　以 Δ_M 作用于方程(1.12.3)，再乘以 $\Delta_M \mathbf{u}$，对 $x \in M$ 积分得

$$(\Delta_M \mathbf{u}, \Delta_M \mathbf{u}_t - \alpha_1 \Delta_M^2 \mathbf{u} - \alpha_1 \Delta_M (|\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) - \alpha_2 \Delta_M (\mathbf{u} \times \Delta_M \mathbf{u})) = 0 \tag{1.12.40}$$

其中

$$(\Delta_M \mathbf{u}, \Delta_M \mathbf{u}_t) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta_M \mathbf{u}\|^2,$$

$$(\Delta_M \mathbf{u}, \alpha_1 \Delta_M^2 \mathbf{u}) = -\alpha_1 \|\nabla \Delta_M \mathbf{u}\|^2$$

类似于引理 1.12.3 的证明，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta_M \mathbf{u}\|^2 + [\alpha_1 - (C_3 + C_4\|\nabla \mathbf{u}\|) \times \|\nabla \mathbf{u}\|]\|\nabla^3 \mathbf{u}\|^2 \leqslant C_3 \tag{1.12.41}$$

其中常数 C_3 依赖于 $\|\nabla \mathbf{u}_0\|$。选取 $\|\nabla \mathbf{u}_0\|$ 适当小，使得

$$\alpha_1 - (C_3 + C_4\|\nabla \mathbf{u}_0\|)\|\nabla \mathbf{u}_0\| \geqslant \frac{\alpha_1}{2}$$

于是由式(1.12.41)即得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\Delta_M \mathbf{u}\|^2 \leqslant C'_4 \tag{1.12.42}$$

引理 1.12.8 设引理 1.12.7 条件满足。且设 $\mathbf{u}_0(x) \in H^3(M)$。则有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\nabla \Delta_M \mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 \leqslant C_5 \tag{1.12.43}$$

其中常数 C_5 依赖于 $\|\mathbf{u}_0(x)\|_{H^3(M)}$。

证 以 $\nabla\Delta_M$ 作用于方程(1.12.3)后，和 $\nabla\Delta_M \mathbf{u}$ 作内积可得

$$(\nabla\Delta_M \mathbf{u}, \nabla\Delta_M \mathbf{u}_t - \alpha_1 \nabla \Delta_M^2 \mathbf{u} - \alpha_1 \nabla \Delta_M(|\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) - \alpha_2 \nabla\Delta_M(\mathbf{u}\times\Delta_M \mathbf{u})) = 0 \tag{1.12.44}$$

其中

$$(\nabla\Delta_M \mathbf{u}, \nabla\Delta_M \mathbf{u}_t) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\Delta_M \mathbf{u}\|^2,$$

$$(\nabla\Delta_M^2 \mathbf{u}, \nabla\Delta_M \mathbf{u}) = \int_M \gamma^{\delta l}\frac{\partial}{\partial x^\delta}\Delta_M{}^2 \mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial x^l}\Delta_M \mathbf{u}\,\mathrm{d}M =$$

$$-\int_M \Delta_M^2 \mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial x^\delta}(\gamma^{\delta l}\sqrt{\gamma}\frac{\partial}{\partial x^l}\Delta_M \mathbf{u})\mathrm{d}x =$$

$$-\int_M (\Delta_M^2 \mathbf{u})^2 \mathrm{d}M = -\|\Delta_M^2 \mathbf{u}\|^2,$$

$$(\nabla\Delta_M(|\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u}), \nabla\Delta_M \mathbf{u})$$

$$= \int_M \gamma^{\delta l} \frac{\partial}{\partial x^\delta} \Delta_M(|\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x^l} \Delta_M \mathbf{u} \cdot \sqrt{\gamma}\, \mathrm{d}x =$$

$$- \int_M \Delta_M(|\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x^\delta} \sqrt{\gamma}\, \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^l} \Delta_M \mathbf{u} \mathrm{d}x =$$

$$- \int_M \Delta_M(|\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) \Delta_M^2 \mathbf{u} \mathrm{d}M \qquad (1.12.45)$$

注意到如下等式成立：

$$\Delta_M(|\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n (|\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u})_{ii} =$$

$$\sum_{i=1}^n (|\nabla \mathbf{u}|_i^2 \mathbf{u} + |\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u}_i)_i =$$

$$\sum_{i=1}^n (|\nabla \mathbf{u}|_{ii}^2 + 2|\nabla \mathbf{u}|_i^2 \mathbf{u}_i + |\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u}_{ii}) =$$

$$\Delta_M(|\nabla \mathbf{u}|^2) + 2\nabla(|\nabla \mathbf{u}|^2)\nabla \mathbf{u} + |\nabla \mathbf{u}|^2 \Delta_M \mathbf{u},$$

$$\Delta_M(|\nabla \mathbf{u}|^2) = 2\sum u_{ij}^2 + 2\sum u_i u_{ijj} =$$

$$2\sum u_{ij}^2 + 2\sum u_i (\Delta_M \mathbf{u})_i + 2\mathrm{Ric}(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u})$$

（见文献[243,P129]）

则从式(1.12.45)得

$$\int_M \Delta_M(|\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) \Delta_M^2 \mathbf{u} \mathrm{d}M =$$

$$\int_M [2\nabla^2 \mathbf{u} + 2\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \Delta_M \mathbf{u} + 2\mathrm{Ric}(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u})] \Delta_M^2 \mathbf{u} \mathrm{d}M$$

$$(1.12.46)$$

其中

$$|2\int_M \nabla^2 \mathbf{u} \Delta_M^2 \mathbf{u} \mathrm{d}M| \leqslant \frac{\alpha_1}{8} \| \Delta_M^2 \mathbf{u} \|^2 + C_7,$$

$$\| \nabla \mathbf{u} \|_\infty \leqslant C \| \nabla^3 \mathbf{u} \|^{\frac{1}{3}} \| \nabla \mathbf{u} \|^{\frac{2}{3}},$$

$$\| \nabla \Delta_M \mathbf{u} \| = \| \Delta_M(\nabla \mathbf{u}) - S_{10}(\nabla \mathbf{u}) \| \leqslant \| \Delta_M(\nabla \mathbf{u}) \| +$$

$$C \| \nabla \mathbf{u} \| \leqslant \| \nabla^3 \mathbf{u} \| + C \| \nabla^2 \mathbf{u} \| + C \| \nabla \mathbf{u} \| \leqslant$$

$$\| \nabla^3 \mathbf{u} \| + C$$

$$|2\int_M \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \Delta_M \mathbf{u} \cdot \Delta_M^2 \mathbf{u} dM| \leqslant 2 \| \nabla \mathbf{u} \|_\infty \| \nabla \Delta_M \mathbf{u} \| \ \| \Delta_M^2 \mathbf{u} \| \leqslant$$

$$\frac{\alpha_1}{8} \| \nabla^4 \mathbf{u} \|^2 + C_8,$$

$$|\int_M 2\mathrm{Ric}(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) \Delta_M^2 \mathbf{u} dM| \leqslant$$

$$2 \| \nabla \mathbf{u} \|_\infty \| \nabla \mathbf{u} \| \ \| \Delta_M^2 \mathbf{u} \| \leqslant \frac{\alpha_1}{8} \| \nabla^4 \mathbf{u} \|^2 + C,$$

$$\| \nabla^4 \mathbf{u} \|^2 - C(\| \nabla^3 \mathbf{u} \|^2 + 1) \leqslant \| \Delta_M^2 \mathbf{u} \|^2 \leqslant$$

$$\| \nabla^4 \mathbf{u} \|^2 + C[\| \nabla^3 \mathbf{u} \|^2 + 1]$$

其中我们用到了 Ricci 公式，我们有

$$|\int_M \Delta_M(|\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) \Delta_M^2 \mathbf{u} dM| \leqslant \frac{3\alpha_1}{8} \| \nabla^4 \mathbf{u} \|^2 + C_{10} \| \nabla^3 \mathbf{u} \|^2 + C_{11} \tag{1.12.47}$$

其次，我们估计式(1.12.44)中的项

$$\alpha_2 \int_M \nabla \Delta_M \mathbf{u} \cdot \nabla \Delta_M (\mathbf{u} \times \Delta_M \mathbf{u}) dM$$

$$\int_M \nabla \Delta_M \mathbf{u} \cdot \nabla \Delta_M (\mathbf{u} \times \Delta_M \mathbf{u}) dM = -\int_M \Delta_M^2 \mathbf{u} \cdot \Delta_M (\mathbf{u} \times \Delta_M \mathbf{u}) dM,$$

其中

$$\begin{aligned}
&\Delta_M(\mathbf{u} \times \Delta_M \mathbf{u}) = \sum_i (\mathbf{u} \times \sum_j \mathbf{u}_{jj})_{ii} = \\
&\sum_i [(\mathbf{u}_i \times \sum_j \mathbf{u}_{jj}) + (\mathbf{u} \times \sum_j \mathbf{u}_{jji})]_i = \\
&\sum_i (\mathbf{u}_{ii} \times \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_{jj}) + \sum_i \mathbf{u}_i \times \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_{jji} + \\
&\sum_i (\mathbf{u}_i \times \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_{jji}) + \sum_j \mathbf{u} \times \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_{jjii} = \\
&2\sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \times \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_{jji} + \mathbf{u} \times \Delta_M^2 \mathbf{u}
\end{aligned}$$

于是可得

$$|\int_M \nabla \Delta_M \mathbf{u} \cdot \nabla \Delta_M (\mathbf{u} \times \Delta_M \mathbf{u}) dM| \leqslant$$

$$2\int_M |\Delta_M^2 \mathbf{u}| \cdot |\nabla \mathbf{u}| \nabla \Delta_M \mathbf{u}| dM \leqslant 2 \| \nabla \mathbf{u} \|_\infty \| \Delta_M^2 \mathbf{u} \| \ \| \nabla \Delta_M \mathbf{u} \| \leqslant$$

$$C\|\nabla^4\mathbf{u}\|^{\frac{1}{3}}\|\nabla\mathbf{u}\|^{\frac{2}{3}}\|\Delta_M^2\mathbf{u}\|\ \|\nabla\Delta_M\mathbf{u}\| + C \leqslant$$

$$\|\nabla^4\mathbf{u}\|^{\frac{1}{3}}\|\nabla^3\mathbf{u}\|\ \|\nabla^4\mathbf{u}\| +$$

$$C\|\nabla^3\mathbf{u}\| + C \leqslant \frac{\alpha_1}{4|\alpha_2|}\|\nabla^4\mathbf{u}\|^2 + C_{12}\|\nabla^3\mathbf{u}\|^2 + C_{13} \tag{1.12.48}$$

其中我们用到了如下的 Sobolev 插值不等式

$$\|\nabla^3\mathbf{u}\| \leqslant C\|\nabla^4\mathbf{u}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla^2\mathbf{u}\|^{\frac{1}{2}} + C$$

由式(1.12.47)、(1.12.48)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\Delta_M\mathbf{u}\|^2 + \frac{3}{4}\alpha_1\|\nabla^4\mathbf{u}\| \leqslant C_{14}\|\nabla^3\mathbf{u}\|^2 + C_{15} \tag{1.12.49}$$

在以上不等式中，我们用到不等式

$$\|\nabla^4\mathbf{u}\|^2 - C(\|\nabla^3\mathbf{u}\|^2 + 1) \leqslant \|\Delta_M^2\mathbf{u}\|^2 \leqslant \|\nabla^4\mathbf{u}\|^2 + C(\|\nabla^3\mathbf{u}\|^2 + 1)$$

式(1.12.49)对 $t\in[0,T]$积分得

$$\|\nabla\Delta_M\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2 + \frac{3}{4}\alpha_1\int_0^t\|\nabla^4\mathbf{u}\|^2\mathrm{d}t \leqslant$$

$$C_{14}\int_0^t\|\nabla^3\mathbf{u}\|^2\mathrm{d}t + C_{15}t + \|\nabla\Delta_M\mathbf{u}_0\|^2 \tag{1.12.50}$$

利用不等式

$$\|\nabla^3\mathbf{u}\|^2 - C \leqslant \|\nabla\Delta_M\mathbf{u}\|^2 \leqslant \|\nabla^3\mathbf{u}\|^2 + C$$

和 Gronwall 不等式，由式(1.12.50)，有

$$\|\nabla\Delta_M\mathbf{u}\|^2 \leqslant C_{16}$$

其中常数 C_{16}依赖于 $\|\mathbf{u}_0(x)\|_{H^3}$。

利用引理 1.12.6，引理 1.12.2 和引理 1.12.8，可得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{H^3(M)} \leqslant C_{17}$$

其中常数 C_{17}依赖于 $\|\mathbf{u}_0(x)\|_{H^3(M)}$。

引理 1.12.9 设引理 1.12.8 的条件满足。且 $\mathbf{u}_0(x)\in$

$H^m(M)(m\geqslant 4)$，则有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{H^m(M)}\leqslant C_{18} \qquad (1.12.51)$$

其中常数 C_{18} 依赖于 $\|\mathbf{u}_0(x)\|_{H^m(M)}$。

证 首先，设 $m=2n$，作用方程(1.12.3)以 Δ_M^{2n}，再和 $\Delta_M^{2n}\mathbf{u}$ 作内积可得

$$(\Delta_M^{2n}\mathbf{u},\Delta_M^{2n}\mathbf{u}_t-\alpha_1\Delta_M^{2n+1}\mathbf{u}-\alpha_1\Delta_M^{2n}(|\nabla\mathbf{u}|^2\mathbf{u})-$$
$$\alpha_2\Delta_M^{2n}(\mathbf{u}\times\Delta_M\mathbf{u}))=0$$

由归纳法，Sobolev 插值不等式，和 Ricci 公式以及

$$C'_3\|\nabla^{4n}\mathbf{u}\|-C'_4\|\nabla^{4n-1}\mathbf{u}\|-C'_5\leqslant\|\Delta_M^{2n}\mathbf{u}\|\leqslant$$
$$\|\nabla^{4n}\mathbf{u}\|+C'_1\|\nabla^{4n-1}\mathbf{u}\|+C'_2,$$
$$C''_3\|\nabla^{4n-1}\mathbf{u}\|-C''_4\|\nabla^{4n}\mathbf{u}\|-C''_5\leqslant\|\nabla\Delta_M^{2n}\mathbf{u}\|\leqslant$$
$$\|\nabla^{4n+1}\mathbf{u}\|+C''_1\|\nabla^{4n}\mathbf{u}\|+C''_2$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta_M^{2n}\mathbf{u}\|^2+C_{19}\alpha_1\|\nabla^{4n+1}\mathbf{u}\|^2\leqslant C_{20} \qquad (1.12.52)$$

其次，$m=2n+1$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta_M^{2n+1}\mathbf{u}\|^2+C_{21}\alpha_1\|\nabla^{4n-2}\mathbf{u}\|^2\leqslant C_{22} \qquad (1.12.53)$$

从式(1.12.52)、(1.12.53)，推出不等式(1.12.51)。

从引理 1.12.6～1.12.10，定理 1.12.6 可得问题(1.12.1)、(1.12.2)整体光滑解的存在性。至于光滑解的唯一性是容易得到的。

定理 1.12.1 设 M 为紧的无边的 Riemann 流形。且以下条件满足：

(1) $\mathbf{u}_0(x)\in H^m(M),m\geqslant 2,|\mathbf{u}_0(x)|^2=1$,

$$x=(x_1,\cdots,x_n)\in M,1\leqslant n\leqslant 2$$

(2) 当 $n=2$ 时，

$$\|\nabla\mathbf{u}_0(x)\|\leqslant\lambda$$

其中常数 λ 适当小。则存在初值问题(1.12.1)、(1.12.2)的整体唯

一光滑解 $\mathbf{u}(x,t):M\times[0,\infty)\to S^2$,

$$\mathbf{u}(x,t)\in L^{\infty}(0,\infty;H^m(M))$$

利用定理 1.12.1 以及引理 1.12.1、引理 1.12.2 等我们将证明问题(1.12.1)、(1.12.2)具有吸引子。

定理 1.12.2 设 M 为 n 维无边的紧的 Riemann 流形,($n\leqslant 2$),设以下条件满足:

(i) $\alpha_1>0$, $|\mathbf{u}_0(x)|=1$, $\mathbf{u}_0(x)\in H^1(M)$, $x=(x^1,\cdots,x^n)\in M$, $n\leqslant 2$;

(ii) $\|\nabla\mathbf{u}_0(x)\|\leqslant\lambda$, $x\in M$, $n=2$,其中常数 λ 适当小。

则在流形 M 上的 Landau-Lifshitz 方程的初值问题(1.12.1)、(1.12.2),具有吸引子 $\mathscr{A}$,它在 $H^1(M)$中是紧的,且

$$\mathscr{A}=\omega(B_1)=\bigcap_{s\geqslant 0}\bigcap_{t\geqslant s}\overline{S(t)B_1}$$

于此

$$B_1=\{\mathbf{u}\in H^1(M),|\mathbf{u}(\cdot,t)|=1,\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{H^1(M)}\leqslant\rho_1\}$$

为 $S(t)$在 $H^1(M)$中的子集 $E=\{u\in H^1(M)\ |u(\cdot,t)|=1\}$中的有界吸收集,$\rho_1$ 为一正常数,$S(t)\mathbf{u}_0$ 为问题(1.12.1)、(1.12.2)所生成的半群算子。

证 由定理 1.12.1,存在问题(1.12.1)、(1.12.2)的整体唯一光滑解,由此形成半群 $S(t)\boldsymbol{u}_0$。由引理 1.12.1、引理 1.12.2,可知

$$B_1=\{\mathbf{u}\in H^1(M),|\mathbf{u}|=1,\|\mathbf{u}\|_{H^1(M)}\leqslant \|\nabla\mathbf{u}_0(x)\|+\mathrm{vol}\,M=\rho_1\}$$

为 $S(t)$在 $H^1(M)$中的子集 E 的有界吸收集。由引理 1.12.4,有

$$\|\mathbf{u}(\cdot t)\|_{H^2(M)}\leqslant\frac{E_1}{t},t>0$$

其中常数 E_1 仅依赖于 $\|\nabla\mathbf{u}_0(x)\|_{H^1(M)}$。这就推出半群算子 $S(t)$ 在 $H^1(M)$中是完全连续的,$t>0$。于是由文献[80]中定理可知,半群算子 $S(t)$具有在 $H^1(M)$中的紧的吸引子。

$$\mathscr{A}=\bigcap_{s\geqslant 0}\bigcup_{t\geqslant s}\overline{S(t)B_1}=\omega(B_1)$$

现估计吸引子 $\mathscr{A}$ 的 Hausdorff 维数和分形维数的上、下界。

考虑问题(1.12.1)、(1.12.2)的线性变分问题

$$\mathbf{v}(t) + L(\mathbf{u}(t))\mathbf{v} = 0 \tag{1.12.54}$$

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0(x) \tag{1.12.55}$$

其中

$$L(\mathbf{u}(t))\mathbf{v} = -\alpha_1\Delta_M\mathbf{v} - \alpha_1|\nabla\mathbf{u}|^2\mathbf{v} - 2\alpha_1\nabla\mathbf{u}\mathbf{u}\nabla\mathbf{v} - \alpha_2A'(\mathbf{u})\Delta_M\mathbf{u}\mathbf{v} - \alpha_2A(\mathbf{u})\Delta_M\mathbf{v}, \tag{1.12.56}$$

$$A(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

因问题(1.12.1)、(1.12.2)的解适当光滑，容易证明线性问题(1.12.54)、(1.12.55)存在整体解 $\mathbf{v}(x,t)\in L^\infty(0,\infty;H^2(M))$，只要初值 $\mathbf{v}_0(x)$适当光滑。事实上，对线性方程(1.12.54)，其主部为

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} D_\alpha(a_{\alpha\beta}(x,t,\mathbf{u})D_\beta\mathbf{u}) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} D_\alpha\sqrt{\gamma}\,(\gamma^{\alpha\beta}D_\beta\mathbf{u} + \mathbf{u}\times\gamma^{\alpha\beta}D_\beta\mathbf{u}) \tag{1.12.57}$$

相应的系统 $a_{\alpha,\beta}^{ij}$为

$$a_{\alpha,\beta}^{ij} = \sqrt{\gamma}\,\gamma^{\alpha\beta}g_{ij}A\#,$$

其中

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2u_3 & \alpha_2u_2 \\ \alpha_2u_3 & \alpha_1 & -\alpha_2u_1 \\ -\alpha_2u_2 & \alpha_2u_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \tag{1.12.58}$$

因此有

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} a_{\alpha,\beta}^{ij}(x,t,\eta)\xi^\alpha\xi^\beta\zeta_i\zeta_j = \alpha_1|\zeta|^2\sum_{\alpha,\beta=1}^{m}\gamma^{\alpha\beta}\sqrt{\gamma}\,\xi^\alpha\xi^\beta > 0 \tag{1.12.59}$$

对于一切$(x,t,\eta)\in M\times[0,T]\times\mathbf{R}^3$，$\xi=(\xi^1,\cdots,\xi^m)\in\mathbf{R}^m\setminus\{0\}$，$\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\in\mathbf{R}^3\setminus\{0\}$。因此问题(1.12.54)、(1.12.55)是可解的。

令G_t为解算子，$\mathbf{v}(t)=G_t\mathbf{v}_0$。

不难证明，半群算子$S_t\mathbf{u}_0$在$L_2(M)$中是可微的。$S_t\mathbf{u}_0$的Fréchet导数存在。而且$G_t\mathbf{v}_0=S'_t\mathbf{u}_0$。

为了估计吸引子$\mathscr{A}$的维数，我们需要以下定理。

定理 1.12.3[78] 设(M,g)为n维Riemann流形。对任何p

$$\max\{1,\frac{n}{2m}\}<p\leqslant 1+\frac{n}{2m}$$

则存在两个正常数$k(M)$和$\chi(M)$，使得对任何有限系$\{\varphi_1,\cdots,\varphi_N\}\in H^m(M)$，它在$L^2(M)$中是正交的，有

$$\left(\int_M\rho^{\frac{p}{p-1}}\mathrm{d}M\right)^{\frac{2m(p-1)}{n}}\leqslant k(M)\sum_{j=1}^N\int_M|\nabla^m\varphi_j|^2\mathrm{d}M+\chi(M)\int_M\rho\,\mathrm{d}M \tag{1.12.60}$$

其中$\rho=\sum_{j=1}^N|\varphi_j(x)|^2$，常数$k(M)$和$\chi(M)$依赖于$m,n,p$和$(M,g)$。

引理 1.12.10 [243] 设M为紧的n维有边或无边的Riemann流形。$\{\lambda_j\}$为Laplace—Beltrami算子在M上的谱。则以下不等式成立

$$\lambda_k\geqslant\frac{\delta}{e}\left(\frac{k}{\mathrm{vol}(M)}\right)^{\frac{2}{n}} \tag{1.12.61}$$

其中$n=\dim M$，δ为在M上的Sobolev常数。即对任何$\mathbf{u}\in C^\infty(M)$有

$$\int_M|\nabla\mathbf{u}|^2\mathrm{d}M\geqslant\delta\left(\int_M|\mathbf{u}|^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n}}$$

定理 1.12.4 设定理1.12.2的条件满足，则问题(1.12.1)(1.12.2)的吸引子$\mathscr{A}$的Hausdorff、分形维数是有限的，即有

$$d_H(\mathscr{A})\leqslant J_0,\ d_F(\mathscr{A})\leqslant 2J_0 \tag{1.12.62}$$

其中J_0是最小整数，使得

$$J_C \geqslant C_0 \alpha_1^{\frac{-4n}{(4-n)(2-n)}}, \ (1 \leqslant n \leqslant 2) \qquad (1.12.63)$$

其中常数 C_0 依赖于 M 和 $\| \mathbf{u} \|_\infty$，$\| \nabla \mathbf{u} \|_\infty$ 和 $\| \nabla^2 \mathbf{u} \|_2$。

证 基于文献[80]的定理 7.1，我们仅需估计 $Tr(L(\mathbf{u}(t)) \cdot Q_J(t))$ 的下界。设 $\{\varphi_1(x), \cdots, \varphi_J(x)\}$ 是 $Q_J L_2$ 的标准正交基，于是有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}(L(\mathbf{u}(t)) \cdot Q_J) = \sum_{j=1}^{J} (L(\mathbf{u}(t)) \cdot Q_J(\tau)\varphi_j, \varphi_j) = \\
&\sum_{j=1}^{J} (L(\mathbf{u}(t)) \cdot Q_J(t)\varphi_j(\tau), \varphi_j(\tau)) = \\
&\sum_{j=1}^{J} \{-\alpha_1(\Delta_M \varphi_j, \varphi_j) - \alpha_1(|\nabla \mathbf{u}|^2 \varphi_j, \varphi_j) - \\
&2\alpha_1(\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_j) - \alpha_2(A'(\mathbf{u}) \nabla \mathbf{u} \varphi_j, \varphi_j) - \\
&\alpha_2(A(\mathbf{u}) \cdot \Delta_M \varphi_j, \varphi_j)\} \geqslant \\
&\alpha_1 \sum_{j=1}^{J} \lambda_j - \alpha_1 \| |\nabla \mathbf{u}|^2 \|_2 \| \rho(x) \|_2 - \\
&2\alpha_1 \| \nabla(\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \|_2 \| \rho(x) \|_2 - \\
&\alpha_2 \| A'(\mathbf{u}) \|_\infty \| \nabla \mathbf{u} \|_2 \| \rho(x) \|_2 \geqslant \\
&\alpha_1 \sum_{j=1}^{J} \lambda_j - 2\alpha_1 \| \nabla \mathbf{u} \|_\infty \| \nabla \mathbf{u} \|_2 \| \rho(x) \|_2 - \\
&2\alpha_1 \| \mathbf{u} \|_\infty \| \nabla^2 \mathbf{u} \|_2 \| \rho(x) \|_2 - \\
&\alpha_2 \| A'(\mathbf{u}) \|_\infty \| \nabla \mathbf{u} \|_2 \| \rho(x) \|_2 \geqslant \\
&\alpha_1 \sum_{j=1}^{J} \lambda_j - (2\alpha_1 \| \nabla \mathbf{u} \|_\infty \| \nabla \mathbf{u} \|_2 + 2\alpha_1 \| \mathbf{u} \|_\infty \| \nabla^2 \mathbf{u} \|_2 + \\
&\alpha_2 \| A'(\mathbf{u}) \|_\infty \| \nabla \mathbf{u} \|_2) \| \rho(x) \|_2 \geqslant \\
&\alpha_1 \sum_{j=1}^{J} \lambda_j - H(k(M) \sum\nolimits_{j=1}^{J} \lambda_j + \chi(M))^{\frac{m}{4}} \geqslant \\
&\alpha_1 (\sum_{j=1}^{J} \lambda_j)^{\frac{m}{4}} \cdot [(\sum\nolimits_{j=1}^{J} \lambda_j)^{1-\frac{m}{4}} - \frac{C_1}{\alpha_1} H] - C_2 H \geqslant \\
&\alpha_1 (\sum\nolimits_{j=1}^{J} \lambda_j^{\frac{m}{4}} - C_2 H) > 0
\end{aligned}$$

其中

$$H = 2\alpha_1 \| \nabla \mathbf{u} \|_\infty \| \nabla \mathbf{u} \|_2 + 2\alpha_1 \| \mathbf{u} \|_\infty \| \nabla^2 \mathbf{u} \|_2 +$$

$\alpha_2 \| A'(\mathbf{u}) \|_{\infty} \| \nabla \mathbf{u} \|_2)$

$$J \geqslant \max\{(C_3(\frac{2}{n}))^{\frac{n}{2+n}} \cdot [\frac{C_1}{\alpha_1}H + 1]^{\frac{4n}{(4-n)(2+n)}},$$

$$(C_3(\frac{2}{n}))^{\frac{n}{2+n}}[\frac{C_2}{\alpha_1}H]^{2+\frac{4}{n}}\}$$

于此，我们用到如下不等式[80]：

$$\sum_{j=1}^{J} j^{\frac{2}{m}} \geqslant C_3(\frac{2}{m})J^{\frac{2}{m}+1}$$

C_1, C_2 为依赖于流形 M 的常数。

现在估计吸引子 $\mathscr{A}$ 的维数的下界。

考虑 Banach 空间 E 和连续算子半群 $S(t): E \to E$

$$S(t+s) = S(t)S(s),\ \forall\ s,t > 0 \tag{1.12.64}$$

$$S(0) = I(E\ \text{中的单位元}) \tag{1.12.65}$$

半群 $(t, \mathbf{u}_0) \to S(t)\mathbf{u}_0 : \mathbf{R}^+ \times E \to E$ 是连续的。

设 Z 为 $S(t)$ 的不动点，即

$$S(t)Z = Z,\ \forall t \in \mathbf{R}^+ \tag{1.12.66}$$

设映照 $\mathbf{u} \to S(t)\mathbf{u}$ 在 Z 的邻域 Θ 中是 Fréchet 可微的，且其微分 $S'(t)$ 满足 Hölder 条件

$$\| S'(t)u_1 - S'(t)u_2 \| \leqslant C_3(T) \| u_1 - u_2 \|^{\alpha},\ 0 < \alpha \leqslant 1 \tag{1.12.67}$$

$$\forall\ u_1, u_2 \in \Theta,\ \forall t \in [0, T]$$

其中常数 C_3 依赖于 T，但与 u_1, u_2 无关。

定义 1.12.1 我们说不动点 Z 是双曲的，如以下条件满足：

(i) $S'(t)$ 的谱 $\sigma(S'(t))$ 不与圆 $\{\lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| = 1\}$ 相交；

(ii) E_+ 具有有限维数，其中 $E_+ = E_-(Z)$ 和 $E_- = E_-(Z)$ 为 E 的线性不变子空间，它们分别对应于 $S'(t)$ 的子集被包含在 $\{\lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| > 1\}$ 和 $\{\lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| < 1\}$。$E_-$ 与 E_- 是与时间 t 无关的。

定义 1.12.2 Z 的不稳定流形 $\mu_+(Z)$ 为点 $u_* \in H$ 的集合（可能是空的），它属于完全轨线 $\{u(t), t \in \mathbf{R}\}$ 且使

$$u(t) \to u_0, \text{当} t \to -\infty,$$

$$\mu_+(Z) = \{u_0 \in E, \forall t \leqslant 0, \exists\, u(t) \in S(-t)^{-1}u_0,$$

$$\text{且} u(t) \to Z, \text{当} t \to -\infty\}$$

Z 的稳定流形 $\mu_-(Z)$ 为点 u_* 的集合(可能是空集),它属于完全轨线 $\{u(t), t \in \mathbf{R}\}, u_* = u(t_0)$ 且使

$$u(t) = S(t - t_0)u_* \to u_0, \ t \to \infty,$$

$$\mu_-(Z) = \{u_0 \in E, \ \forall t \leqslant 0, \exists\, u(t) \in S(-t)^{-1}u_0, \text{且}$$

$$S(t)u_0 \to Z \text{ 当 } t \to \infty\}$$

从定义可直接推出

$$S(t)\mu_+(Z) = \mu_+(Z), S(t)\mu_-(Z) = \mu_-(Z), \forall t \geqslant 0$$

定义 1.12.3 异宿轨道是指从一定常点 u_* 的不稳定流形,到另一个定常解 u_{**} 的稳定流形,$u_{**} \neq u_*$;而当 $u_{**} = u_*$ 时,则称为曲线的同宿轨道。属于异宿(或同宿)轨道的点称为异宿(或同宿)点。

考虑 $R>0$ 球

$$\Theta_R(Z) = \{y \in E, \| y - Z \|_0 \leqslant R\}$$

$$\mu_+^R(Z) = \{u_0 \in \Theta(Z), \forall n \in N, \exists\, u_n \in S^{-n}(u_0) \cap \Theta_R(Z),$$

$$\text{且 } u_n \to Z \text{ 当 } n \to \infty\} \tag{1.12.68}$$

定理 1.12.5[20] 设 E 为 Banach 空间,$S(t)$ 为半群算子,$t \in \mathbf{R}^+$,它满足假设(1.12.64)、(1.12.65)和(1.12.67)。设 $S(t)$ 具有整体吸引子 $\mathscr{A}$ 且 $Z \in \mathscr{A}$ 为 $S(t)$ 的双曲不动点。则有

$$\mathrm{A} \supset \mu_+(Z) \supset \mu_+^R(Z) \tag{1.12.69}$$

对 $R>0$ 充分小。

现考虑如下 Landau-Lifshitz 方程的初值问题

$$\mathbf{Z}_t = -\alpha_1(\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \times \Delta_M \mathbf{Z})) + \mathbf{Z} \times J\mathbf{Z} \tag{1.12.70}$$

$$\mathbf{Z}|_{t=0} = \mathbf{Z}_0(x), x \in M, \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \nu}|\partial_M = 0 \tag{1.12.71}$$

其中 M 为无边的紧的 Riemann 流形。$J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, 0), \alpha_1 > 0$。由定理 1.12.5,可得问题(1.12.70)、(1.12.71)吸引子的维数下

界。

定理 1.12.6 设 $\mathscr{A}$ 为问题(1.12.70)、(1.12.71)的整体吸引子，$J_1J_2<0$，则有

$$\dim \mathscr{A} \geqslant C\alpha_1^{-\frac{n}{2}} \tag{1.12.72}$$

其中 $\dim\mathscr{A}$ 为 A 的 Hausdorff 或分形维数，C 为正常数。

证 易知 $=\mathbf{Z}=(0,0,1)$ 为问题(1.12.70)、(1.12.71)所生成半群 $S(t)$ 的不动点，即 $\mathbf{Z}(0,0,1)$ 满足方程

$$-A_1(\mathbf{Z}) = -\alpha_1(\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}\times\Delta_M\mathbf{Z})) + \mathbf{Z}\times J\mathbf{Z} = 0 \tag{1.12.73}$$

方程(1.12.73)的线性变分方程为

$$-A'_1(\mathbf{Z})\boldsymbol{v} = \alpha_1\Delta_M\boldsymbol{v} + \mathbf{Z}\times J\boldsymbol{v} = 0 \tag{1.12.74}$$

令 ζ 为矩阵 $B(\mathbf{Z})\boldsymbol{v}=\mathbf{Z}\times J\boldsymbol{v}=\zeta\boldsymbol{v}$ 的特征值，其中

$$B(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} 0 & -J_2 & 0 \\ J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此

$$\zeta^2 + J_1J_2 = 0,$$

$$\zeta_1 = \sqrt{-J_1J_2} > 0,\ \zeta_2 = -\sqrt{-J_1J_2}$$

令 $\lambda_k, k\in N$ 表示无边 M 上 $-\Delta_M$ 算子的特征值，即

$$-\Delta_M\psi_k = \lambda_k\psi_k,\ \frac{\partial\psi_k}{\partial\nu}|\partial_M = 0, \tag{1.12.75}$$

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots,\quad \lambda_k\to\infty, k\to\infty$$

令 $\mu_k, k\in N$ 表示线性算子

$$-A'(\mathbf{Z})\boldsymbol{w}_k = \alpha_1\Delta_M\boldsymbol{w}_k + B(\mathbf{Z})\boldsymbol{w}_k = \mu_k\boldsymbol{w}_k \tag{1.12.76}$$

的特征值序列。其中 $\boldsymbol{w}_k(x)=\psi_k(x)p_k, p_k\in C^3$，有

$$(\alpha_1\lambda_k + B(\mathbf{Z}))p_k = \mu_kp_k \tag{1.12.77}$$

如果 μ_k 为方程

$$\det(\alpha_1\lambda_k + B(\mathbf{Z}) - \mu_kI) = 0, \mathrm{Re}\ \mu_k > 0 \tag{1.12.78}$$

的根，则存在非零解 p_k。在定理的假设下，当 $\alpha_1\neq 0$，则至少存在一

个根 $\zeta_1=\sqrt{-J_1J_2}>0$。因此存在方程(1.12.78)的一个根 μ_k, $\mathrm{Re}\mu_k>0$, 当 $\alpha_1\lambda_k<\delta$ 时，其中 δ 为适当小的常数，则由特征值 λ_k 的渐进行态，$\lambda_k\sim Ck^{-\frac{n}{2}}$，可得不等式

$$1\leqslant k\leqslant C_1\delta^{\frac{n}{2}}\alpha_1^{-\frac{n}{2}}=C_2\alpha_1^{-\frac{n}{2}}$$

从定理 1.12.5，可得

$$\dim\mathscr{A}\geqslant C\alpha_1^{-\frac{n}{2}}$$

1.13 $\mathbf{R}^3$ 上耗散 Klein-Gordon-Schrödinger 方程组

考虑如下 Klein-Gordon-Schrödinger(KGS)方程组

$$\mathrm{i}\psi_t+\Delta\psi=-\phi\psi \tag{13.1}$$

$$\phi_{tt}-\Delta\phi+\mu^2\phi=|\psi|^2 \tag{13.2}$$

其中：$\psi(x,t)$ 为复值核子场；ϕ 为实的介子场；μ 表示介子的质量。KGS 方程组的柯西问题和初边值问题，已为许多作者所研究，如文献[6,7,8,9]等。文献[6]利用 Schrödinger 方程解的 L^p-L^q 估计得到了整体解的存在性。在文献[7]中研究了多维 KGS 方程组解的渐进行态。在文献[8]中考虑 KGS 方程组的初边值问题并得到了三维强解的存在性，在文献[9]中对此结果又作了改进。

当考虑阻尼时，我们有如下的具耗散的 KGS 方程组

$$\mathrm{i}\psi_t+\Delta\psi+\mathrm{i}\alpha\psi+\phi\psi=f \tag{13.3}$$

$$\phi_{tt}+(I-\Delta)\phi+\beta\phi_t=|\psi|^2+g \tag{13.4}$$

其中：α,β 为正数；$f(x),g(x)$ 为已知函数；f 是复的；g 为实的。

方程组(1.13.3)、(1.13.4)在有界区域 Ω 上的长时间行态，已为文献[10,11]所研究，在文献[10]中 Biler 证明了整体吸引子在 $H_0^1\times H_0^1(\Omega)$ 的弱拓扑中的存在性和 Hausdorff 维数的有限性。在文献[11]中证明有限维整体吸引子在 $H^2\cap H_0^1(\Omega)\times H^2\cap H_0^1(\Omega)$ 上的存在性。这里我们在文献[221]中在全空间 $\mathbf{R}^3$ 上考虑

KGS 方程组(1.13.3)、(1.13.4)和初始条件

$$\psi(0,x)=\psi_0(x),\phi(0,x)=\phi_0(x),\phi_t(0,x)=\phi_1(x),$$
$$x\in\mathbf{R}^3 \qquad (1.13.5)$$

我们证明问题(1.13.3)~(1.13.5)在 $H^2\times H^2\times H^1(\mathbf{R}^3)$上存在整体吸引子，它依 $H^2\times H^2\times H^1(\mathbf{R}^3)$吸引 $H^3\times H^3\times H^2(\mathbf{R}^3)$中的有界集。

由于是无界区域，$H^s(\mathbf{R}^3)$嵌入 $H^{s'}(\mathbf{R}^3)(s>s')$不是紧的。为了克服这一困难，我们利用非紧的 Kuratowskii α 测度去证明半群 $S(t)$的渐近光滑性，然后再用文献[218]中的理论去证明整体吸引子的存在性。

令 $\theta=\phi_t-\delta\phi$，δ 为待定的正常数。式(1.13.3)~(1.13.5)等价于

$$\mathrm{i}\psi_t+\Delta\psi+\mathrm{i}\alpha\psi+\phi\psi=f \qquad (1.13.6)$$

$$\phi_t+\delta\phi=\theta \qquad (1.13.7)$$

$$\theta_t+(\beta-\delta)\theta+(1-\delta(\beta-\delta)-\Delta)\phi=|\psi|^2+g \qquad (1.13.8)$$

及初始条件

$$(\psi,\phi,\theta)(0,x)=(\psi_0,\phi_0,\theta_0)(x),\ x\in\mathbf{R}^3 \qquad (1.13.9)$$

其中 $\theta_0=\delta\phi_0+\phi_1$。选取 $\delta\leqslant\min\left\{\frac{\beta}{2},\frac{1}{2\beta}\right\}$，则 $A=1-\delta(\beta-\delta)-\Delta$ 为正的，自共轭的二阶椭圆型算子。置

$$H=L^2\times H^{\frac{1}{2}}\times H^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^3),$$
$$V=H^1\times H^1\times L^2(\mathbf{R}^3),$$
$$X=H^2\times H^2\times H^1(\mathbf{R}^3),$$
$$Y=H^3\times H^3\times H^2(\mathbf{R}^3)$$

则 $Y\hookrightarrow X\hookrightarrow V$ 为连续嵌入。

引理 1.13.1 设 $f\in L^\infty(\mathbf{R}^+;L^2(\mathbf{R}^3))$，则 $\psi\in L^\infty(\mathbf{R}^+,L^2(\mathbf{R}^3))$，且满足

$$\|\psi(t)\|^2\leqslant\|\psi_0\|^2\exp(-\alpha t)+\frac{\|\|f\|\|^2}{\alpha^2}(1-\exp(-\alpha t))$$

因此，存在 $t_1(R)>0$，使得

$$\|\psi(t)\|^2\leqslant 1+\frac{|||f|||^2}{\alpha^2},\quad \forall\, t\geqslant t_1(R),$$

只要 $\|\psi_0\|\leqslant R$，$|||f|||$ 表示 f 在 $L^\infty(\mathbf{R}^+;L^2(\mathbf{R}^3))$中的模。

证 作式(1.13.6)和 ψ 在 $L^2(\mathbf{R}^3)$上的内积，再取虚部，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\psi\|^2+\alpha\|\psi\|^2=\operatorname{Im}\,(f,\psi)\leqslant$$

$$\|f\|\;\|\psi\|\leqslant\frac{\alpha}{2}\|\psi\|^2+\frac{\|f\|^2}{2\alpha}$$

由 Gronwall 不等式，即得引理。

引理 1.13.2 设 $f,g\in L^\infty(\mathbf{R}^+;L^2(\mathbf{R}^3))$. 则对$(\psi_0,\phi_0,\theta_0)\in V$，解$(\psi,\phi,\theta)\in L^\infty(\mathbf{R}^+,V)$。进一步，存在 $t_2(R)>0$，使得

$$\|(\psi,\phi,\theta)\|_V\leqslant C,\quad t\geqslant t_2(R)$$

其中$\|(\psi_0,\phi_0,\theta_0)\|_V\leqslant R$。

证 作(1.13.6)和$-(\psi_t+\alpha\psi)$在 L^2 上的内积，再取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\psi\|^2+\alpha\|\nabla\psi\|^2-\operatorname{Re}\,(\phi\psi,\psi_t)-\alpha\operatorname{Re}\,(\phi\psi,\psi)=$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{Re}\,(f,\psi)-\operatorname{Re}\,(f_t,\psi)-\alpha\operatorname{Re}\,(f,\psi)\qquad(1.13.10)$$

注意到

$$-\operatorname{Re}\,(\phi\psi,\psi_t)=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi,|\psi|^2)+\frac{1}{2}(\phi_t,|\psi|^2)$$

则从式(1.13.10)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|\nabla\psi\|^2-\int\phi|\psi|^2\mathrm{d}x+2\operatorname{Re}\int f\,\overline{\psi}\mathrm{d}x\Big)+\alpha\|\nabla\psi\|^2-$$

$$\alpha\int\phi|\psi|^2\mathrm{d}x+\alpha\int f\,\overline{\psi}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\phi_t|\psi|^2\mathrm{d}x=0\qquad(1.13.11)$$

作式(1.13.8)和 θ 的 L^2 内积，利用式(1.13.7)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\theta\|^2+(1-\delta(\beta-\delta))\|\phi\|^2+\|\nabla\phi\|^2)+$$

$$(\beta-\delta)\|\theta\|^2+\delta(1-\delta(\beta-\delta))\|\phi\|^2+\delta\|\nabla\phi\|^2=$$

$$\int \phi_t |\psi|^2 dx + \delta \int \phi |\psi|^2 dx + \int g\theta dx \qquad (1.13.12)$$

那么 2×式(1.13.11)+式(1.13.12)得

$$\frac{dt}{dt} H_1(t) + I_1(t) = 0 \qquad (1.13.13)$$

其中

$$H_1(t) = 2\|\nabla\psi\|^2 - 2\int \phi|\psi|^2 dx + 2\mathrm{Re}\int f\bar{\psi}dx + \|\theta|^2 + (1-\delta(\beta-\delta))\|\phi\|^2 + \|\nabla\phi\|^2,$$

$$I_2(t) = 4\alpha\|\nabla\psi\|^2 - 2(2\alpha+\delta)\int\phi|\psi|^2 dx + 4\mathrm{Re}\int f\bar{\psi}dx + 2(\beta-\delta)\|\theta\|^2 + 2\delta(1-\delta(\beta-\delta))\|\phi\|^2 + 2\delta\|\nabla\psi\|^2 - 2\int g\theta dx$$

(1.13.14)

因 $H^1(\mathbf{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbf{R}^3)$

$$\|\psi\|_3 \leqslant C\|\psi\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\psi\|^{\frac{1}{2}}$$

则对任意 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$，有

$$\left|\int\phi|\psi|^2 dx\right| \leqslant C\|\phi\|_6\|\psi\|_3\|\psi\| \leqslant C\|\nabla\phi\|\,\|\psi\|^{\frac{3}{2}}\|\nabla\psi\|^{\frac{1}{2}} \leqslant \varepsilon_1\|\nabla\psi\|^2 + \varepsilon_2\|\nabla\phi\|^2 + C(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\|\psi\|^6 \qquad (1.13.15)$$

$$\left|\int f\bar{\psi}dx\right| \leqslant \|f\|\,\|\psi\|$$

在式(1.13.15)中取 $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}, \varepsilon_2 = \frac{1}{4}$，可得

$$H_1(t) \geqslant \|\nabla\psi\|^2 + \|\theta\|^2 + (1-\delta(\beta-\delta))\|\phi\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla\phi\|^2 - C\|\psi\|^6 - 2\|f\|\,\|\psi\|,$$

$$H_1(t) \leqslant 3\|\nabla\psi\|^2 + \|\theta\|^2 + (1-\delta(\beta-\delta))\|\phi\|^2 - \frac{3}{2}\|\nabla\phi\|^2 + C\|\psi\|^6 + 2\|f\|\,\|\psi\| \qquad (1.13.16)$$

在式(1.13.15)中取 $\varepsilon_1=\dfrac{\alpha}{2\alpha+\delta},\varepsilon_2=\dfrac{\delta}{2(2\alpha+\delta)}$，由

$$\left|\int g\theta\mathrm{d}x\right|\leqslant \|g\|\ \|\theta\|\leqslant\frac{\beta-\delta}{2}\|\theta\|^2+\frac{1}{2(\beta-\delta)}\|g\|^2$$

可知

$$I_1(t)\geqslant 2\alpha\|\psi\|^2+(\beta-\delta)\|\theta\|^2+\delta(1-\delta(\beta-\delta))\|\phi\|^2+$$
$$\delta\|\nabla\psi\|^2-C\|\psi\|^6-4\|f\|\ \|\psi\|-\frac{1}{\beta-\delta}\|g\|^2 \tag{1.13.17}$$

从式(1.13.16)、(1.13.17)，可找到 $\beta_1>0$，使得

$$\beta_1H_1(t)\leqslant I_1(t)+C\|\psi\|^6+C\|f\|\ \|\psi\|+C\|g\|^2 \tag{1.13.18}$$

因此，从式(1.13.13)和式(1.13.18)得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_1(t)+\beta_1H_1(t)\leqslant C\|\psi\|^6+C\|f\|\ \|\psi\|^2+C\|g\|^2\overset{\text{def}}{=\!=}K_1$$

由 Gronwall 不等式，得到

$$H_1(t)\leqslant H_1(0)\mathrm{e}^{-\beta_1t}+\frac{K_1}{\beta_1}(1-\mathrm{e}^{-\beta_1t}) \tag{1.13.19}$$

从式(1.13.16)和式(1.13.19)得到引理。

引理 1.13.3　设 $f,g\in L^\infty(\mathbf{R}^+;H^1(\mathbf{R}^3))$。则对 $(\psi_0,\phi_0,\theta_0)\in X$，解 $(\psi,\phi,\theta)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;X)$。进一步，存在 $t_3(R)>0$，使得

$$\|(\psi,\phi,\theta)\|_X\leqslant C,\quad t\geqslant t_2(R)$$

其中 $\|(\psi_0,\phi_0,\theta_0)\|_X\leqslant R$。

证　作方程(1.13.6)与 $\Delta\psi_t+\alpha\Delta\psi$ 的内积，取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta\psi\|^2+\alpha\|\Delta\psi\|^2+\mathrm{Re}\int\phi\psi\Delta\overline{\psi}_t\mathrm{d}x+\alpha\mathrm{Re}\int\phi\psi\Delta\overline{\psi}\mathrm{d}x=$$
$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\int\nabla f\nabla\overline{\psi}\mathrm{d}x-\alpha\mathrm{Re}\int\nabla f\nabla\overline{\psi}\mathrm{d}x \tag{1.13.20}$$

注意到

$$\mathrm{Re}\int\phi\psi\Delta\overline{\psi}_t\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\mathrm{Re}\ \phi\psi\Delta\overline{\psi}\mathrm{d}x-\mathrm{Re}\int\phi_t\psi\Delta\overline{\psi}\mathrm{d}x-\mathrm{Re}\int\phi\psi_t\Delta\overline{\psi}\mathrm{d}x$$

而从式(1.13.7)

$$-\operatorname{Re}\int\phi_t\psi\Delta\bar{\psi}\mathrm{d}x=-\operatorname{Re}\int\theta\psi\Delta\bar{\psi}\mathrm{d}x+\delta\operatorname{Re}\int\phi\psi\Delta\bar{\psi}\mathrm{d}x$$

由式(1.13.6)

$$\psi_t=-\mathrm{i}(f-\Delta\psi-\mathrm{i}\alpha\psi-\phi\psi),$$

$$-\operatorname{Re}\int\phi\psi_t\Delta\bar{\psi}\mathrm{d}x=\operatorname{Re}\int\mathrm{i}\phi[f-\Delta\psi-\mathrm{i}\alpha\psi-\phi\psi]\Delta\bar{\psi}\mathrm{d}x=$$

$$-\operatorname{Im}\int\phi f\Delta\bar{\psi}\mathrm{d}x+\alpha\operatorname{Re}\int\phi\psi\Delta\bar{\psi}\mathrm{d}x+\operatorname{Im}\int\phi^2\psi\Delta\bar{\psi}\mathrm{d}x$$

从式(1.13.20),有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\Delta\psi\|^2+2\operatorname{Re}\int\phi\psi\Delta\bar{\psi}\mathrm{d}x+2\operatorname{Re}\int\nabla f\nabla\bar{\psi}\,\mathrm{d}x)+$$

$$\alpha\|\Delta\psi\|^2+(2\alpha+\delta)\operatorname{Re}\int\phi\psi\Delta\bar{\psi}\mathrm{d}x+\alpha\operatorname{Re}\int\nabla f\nabla\bar{\psi}\mathrm{d}x-$$

$$\operatorname{Re}\int\theta\psi\Delta\bar{\psi}\mathrm{d}x-\operatorname{Im}\int\phi f\Delta\bar{\psi}\mathrm{d}x+\operatorname{Im}\int\phi^2\psi\Delta\bar{\psi}\mathrm{d}x=0\qquad(1.13.21)$$

作$-\Delta\theta$和式(1.13.8)的内积,得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla\theta\|^2+(1-\delta(\beta-\delta))\|\nabla\phi\|^2+\|\Delta\phi\|^2)+$$

$$(\beta-\delta)\|\nabla\theta\|^2+\delta(1-\delta(\beta-\delta))\|\nabla\phi\|^2+\delta\|\Delta\phi\|^2=$$

$$-\int\theta\Delta|\psi|^2\mathrm{d}x+\int\nabla g\nabla\theta\mathrm{d}x=-2\operatorname{Re}\int\theta\psi\Delta\bar{\psi}\mathrm{d}x-$$

$$2\int\theta|\nabla\psi|^2\mathrm{d}x+\int\nabla g\nabla\theta\mathrm{d}x\qquad(1.13.22)$$

令

$$H_2(t)=\|\Delta\psi\|^2+2\operatorname{Re}\int\phi\psi\Delta\bar{\psi}\mathrm{d}x+2\operatorname{Re}\int\nabla f\nabla\bar{\psi}\mathrm{d}x+$$

$$\frac{1}{2}\|\nabla\theta\|^2+\frac{1}{2}(1-\delta(\beta-\delta))\|\nabla\phi\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta\phi\|^2$$

(1.13.23)

$$I_2(t)=2\alpha\|\Delta\psi\|^2+2(\alpha+\delta)\operatorname{Re}\int\phi\psi\Delta\bar{\psi}\mathrm{d}x+$$

$$
\begin{aligned}
&2\alpha\mathrm{Re}\int\nabla f\nabla\bar{\psi}\mathrm{d}x-2\mathrm{Im}\int\phi f\Delta\bar{\psi}\mathrm{d}x+\\
&2\mathrm{Im}\int\phi^2\psi\Delta\bar{\psi}\mathrm{d}x+(\beta-\delta)\|\nabla\theta\|^2+\\
&\delta(1-\delta(\beta-\delta))\|\nabla\phi\|^2+\delta\|\Delta\phi\|^2+\\
&2\int\theta|\nabla\psi|^2\mathrm{d}x-\int\nabla g\nabla\theta\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{1.13.24}
$$

则由2×式(1.13.21)+式(1.13.22)推出

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_2(t)+I_2(t)=0 \tag{1.13.25}
$$

估计 $H_2(t)$ 和 $I_2(t)$ 中不确定符号的项

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathrm{Re}\int\phi\psi\Delta\bar{\psi}\mathrm{d}x\right|\leqslant\|\phi\|_4\|\psi\|_4\|\Delta\psi\|\leqslant\varepsilon_3\|\Delta\psi\|^2+\\
&\qquad C(\varepsilon_3)\|\nabla\phi\|^2\|\nabla\psi\|^2,\\
&\qquad\left|\mathrm{Re}\int\nabla f\nabla\bar{\psi}\mathrm{d}x\right|\leqslant\|\nabla f\|\|\nabla\psi\|,\\
&\left|\mathrm{Im}\int\phi f\Delta\bar{\psi}\mathrm{d}x\right|\leqslant\|\phi\|_4\|f\|_4\|\Delta\psi\|\leqslant\frac{1}{4}\|\Delta\psi\|^2+\\
&\qquad C\|\nabla f\|^2\|\nabla\phi\|^2,\\
&\left|\mathrm{Im}\int\phi^2\psi\Delta\bar{\psi}\mathrm{d}x\right|\leqslant\|\phi\|_6^2\|\psi\|_6\|\Delta\psi\|\leqslant\frac{1}{4}\|\Delta\psi\|^2+\\
&\qquad C\|\nabla\phi\|^4\|\nabla\psi\|^2,\\
&\left|\int\theta|\nabla\psi|^2\mathrm{d}x\right|\leqslant\|\theta\|\|\nabla\psi\|_4^2\leqslant C\|\theta\|\|\nabla\psi\|^{\frac{1}{2}}\|\Delta\psi\|^{\frac{3}{2}}\leqslant\\
&\qquad\frac{1}{4}\|\Delta\psi\|^2+C\|\theta\|^4\|\nabla\psi\|^2,\\
&\left|\int\nabla g\nabla\theta\mathrm{d}x\right|\leqslant\|\nabla\theta\|\|\nabla g\|\leqslant\frac{\beta-\delta}{2}\|\nabla\theta\|^2+\\
&\qquad\frac{1}{2(\beta-\delta)}\|g\|^2
\end{aligned}
$$

在估计 $H_2(t)$ 时，取 $\varepsilon_3=\dfrac{1}{4}$；在估计 $I_2(t)$ 时，取 $\varepsilon_3=\dfrac{\alpha}{2(2\alpha+\delta)}$。则从以上不等式有

$$H_2(t) \geqslant \frac{1}{2}\|\Delta\psi\|^2 + \frac{1}{4}[\|\nabla\theta\|^2 + \|\Delta\phi\|^2 +$$
$$(1 - \delta(\beta - \delta))\|\nabla\phi\|^2 - C\|\nabla\phi\|^2\|\nabla\psi\|^2 -$$
$$2\|\nabla f\|\|\nabla\psi\|]$$

$$H_2(t) \leqslant \frac{3}{2}\|\Delta\psi\|^2 - \|\nabla\theta\|^2 + \|\Delta\phi\|^2 +$$
$$(1 - \delta(\beta - \delta))\|\nabla\phi\|^2 + C\|\nabla\phi\|^2\|\nabla\psi\|^2 +$$
$$2\|\nabla f\|\|\nabla\psi\| \tag{1.13.26}$$

$$I_2(t) \geqslant \alpha\|\Delta\psi\|^2 + \frac{1}{2}(\beta - \delta)\|\nabla\theta\|^2 + \frac{\delta}{2}\|\Delta\phi\|^2 +$$
$$\delta(1 - \delta(\beta - \delta))\|\nabla\phi\|^2 - C(\varepsilon_3)\|\nabla\phi\|^2\|\nabla\psi\|^2 -$$
$$C\|\nabla f\|\|\nabla\psi\| - C\|\nabla f\|^2\|\nabla\phi\|^2 -$$
$$C\|\nabla\phi\|^4\|\nabla\psi\|^2 - C\|\theta\|^4\|\nabla\psi\|^2 - C\|g\|^2 \tag{1.13.27}$$

因此，存在常数 $\beta_2 > 0$，使得

$\beta_2 H_2(t) \leqslant I_2(t) + C(\|\phi\|_{H^1}, \|\psi\|_{H^1}, \|\theta\|, \|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1})$

且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_2(t) + \beta_2 H_2(t) \leqslant K_2$$

其中 $K_2 \overset{\text{def}}{=\!=} C(\|\phi\|_{H^1}, \|\psi\|_{H^1}, \|\theta\|, \|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1})$。因此由 Gronwall 不等式有

$$H_2(t) \leqslant H_2(0)\mathrm{e}^{-\beta_2 t} + \frac{K_2}{\beta_2}(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2 t}) \tag{1.13.28}$$

从式(1.13.26)和式(1.13.28)即得引理1.13.3。

推论1.13.1 设 $f, g \in L^\infty(\mathbf{R}^+; H^1(\mathbf{R}^3))$. 则对 $(\psi_0, \phi_0, \theta_0) \in X$，解 $(\psi, \phi, \theta) \in L^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^3)$。

引理1.13.4 设 $f, g \in L^\infty(\mathbf{R}^+; H^2(\mathbf{R}^3))$。则对 $(\psi_0, \phi_0, \theta_0) \in Y$，解 $(\psi, \phi, \theta) \in L^\infty(\mathbf{R}^+; Y)$。进一步，存在 $t_4(R) > 0$，使得对一切 $t \geqslant t_4(R)$，成立

$$\|(\psi, \phi, \theta)\|_Y \leqslant C$$

只要$\|(\psi_0,\phi_0,\theta_0)\|_Y\leqslant R$。

证 类似于引理1.13.3的证明，我们可得到引理的证明。

从以上先验估计，可得到如下结果。

定理1.13.1 设$f,g\in L^\infty(\mathbf{R}^+;H^1(\mathbf{R}^3))$。则对任何$(\psi_0,\phi_0,\theta_0)\in X$，存在问题(1.13.6)～(1.13.9)的唯一解$(\psi,\phi,\theta)\in L^\infty(\mathbf{R}^+,X)$。进一步，解算子$S(t)$从$X$到$X$是连续的，且具有有界吸收集$B_1\subset X$。

证 我们首先由标准的迭代格式证明局部解的存在，再由引理1.13.1～1.13.3的先验估计，可知能把局部解延拓为整体解。解的唯一性则从$S(t):X\to X$的连续性推出。

事实上，设$(\psi_k,\phi_k,\theta_k)(k=1,2)$为问题(1.13.6)～(1.13.9)相应于初值$(\psi_{0k},\phi_{0k},\theta_{0k})$的两个解。令$(\psi,\phi,\theta)=(\psi_1-\psi_2,\phi_1-\phi_2,\theta_1-\theta_2)$，$(\psi_0,\phi_0,\theta_0)=(\psi_{01}-\psi_{02},\phi_{01}-\phi_{02},\theta_{01}-\theta_{02})$。则$(\psi,\phi,\theta)$满足

$$\mathrm{i}\psi_t+\Delta\psi+\mathrm{i}\alpha\psi=-\phi_1\psi-\phi\psi_2,$$

$$\phi_t+\delta\phi=\theta,$$

$$\theta_t+(\beta-\delta)\theta+(1-\delta(\beta-\delta)-\Delta)\phi=\psi_1\bar{\psi}+\psi\bar{\psi}_2,$$

$$(\psi,\phi,\theta)|_{t=0}=(\psi_0,\phi_0,\theta_0)(x),\quad x\in\mathbf{R}^3。$$

不难证明，

$$\|\psi\|^2+\|\Delta\psi\|^2+\|\theta\|^2+\|\nabla\theta\|^2+(1-\delta(\beta-\delta))\|\phi\|^2+(2-\delta(\beta-\delta))\|\nabla\phi\|^2+\|\Delta\phi\|^2\leqslant C(\|\psi_0\|^2+\|\Delta\psi_0\|^2+\|\theta_0\|^2+\|\nabla\theta_0\|^2+\|\phi_0\|^2+\|\Delta\phi_0\|^2)\mathrm{e}^{Ct}$$

由此推得$S(t)$的连续性，有界吸收集的存在性已在引理1.13.3中证明。

附注：我们能用近似方法证明问题(1.13.6)～(1.13.9)，当$(\psi_0,\phi_0,\theta_0)\in V$具有解$(\psi,\phi,\theta)\in V$。但$S(t)$在$V$中的连续性是未知的。然而，$S(t)$从$V$到$H$是连续的。因此，解在$V$中是唯一的。

定理1.13.2 设$f,g\in L^\infty(\mathbf{R}^+;H^2(\mathbf{R}^3))$，则对任何$(\psi_0,\phi_0,\theta_0)\in Y$，存在问题(1.13.6)～(1.13.9)的唯一解$(\psi,\phi,\theta)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;Y)$。进一步，$S(t)$从$Y$到$Y$是连续的，且具有有界吸收集

$\mathscr{B}_2 \subset Y$。

证 类似于定理1.13.1的证明(从略)。

以下,设 $f,g\in H^2(\mathbf{R}^3)$ 与 t 无关。则 $S(t)$ 形成一个半群。设 $B\subset Y$ 为有界集,则 $S(t)B\subset Y$ 也是有界的。我们分解 $S(t)$,以便能利用 Kuratowskii 非紧性的 α 测度去证明 $S(t)$ 的渐近光滑性。换言之,我们分解 $S(t)$ 为两部分:$S_1(t)$ 和 $S_2(t)$,其中,当 $t\to\infty$ 时,$\alpha(S_1(t)B)\to 0$ 而 $S_2(t)$ 在 X 中是相对紧的。对一个集合 $A\subset X$,它的所谓非紧性 α 测度定义为

$$\alpha(A)=\inf\{d \mid \text{存在 } A \text{ 的有限个半径} < d \text{ 的覆盖}\}。$$

因此

$$\alpha(S(t)B)\leqslant\alpha(S_1(t)B)+\alpha(S_2(t)B)=\alpha(S_1(t)B)\to 0, t\to\infty$$

设 $B\subset Y$, $\sup\limits_{\xi\in B}\|\xi\|_Y\leqslant R$, $(\psi,\phi,\theta)=S(t)(\psi_0,\phi_0,\theta_0)$ 为问题(1.13.6)～(1.13.9)具初值 $(\psi_0,\phi_0,\theta_0)\in B$ 的解。我们已知道 (ψ,ϕ,θ) 在 Y 中是一致有界的。

令 $\chi L(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$, $0\leqslant\chi L\leqslant 1$ 满足

$$\chi L(x)=\begin{cases}1, |x|\leqslant L\\ 0, |x|\geqslant 1+L\end{cases}$$

则对任何 $\eta\in(0,1)$,存在 $L(\eta)>0$(充分大),使得

$$\|f-f_\eta\|^2_{H^2(\mathbf{R}^3)}\leqslant\eta, f_\eta=f\chi_{L(\eta)},$$

$$|g-g_\eta|^2_{H^2(\mathbf{R}^3)}\leqslant\eta, g_\eta=g\chi_{L(\eta)},$$

$$\||\psi|^2-|\psi|^2\chi_{L(\eta)}\|^2_{H^2(\mathbf{R}^3)}\leqslant\eta$$

设 $(\psi_\eta,\phi_\eta,\theta_\eta)$ 为如下问题的解

$$\mathrm{i}\psi_{\eta t}+\Delta\psi_\eta+\mathrm{i}\alpha\psi_\eta-\mathrm{i}\eta\Delta\psi_\eta+\phi\psi_\eta=f-f_\eta-\mathrm{i}\eta\Delta\psi \qquad (1.13.29)$$

$$\phi_{\eta tt}+(I-\Delta)\phi_\eta+\beta\phi_{\eta t}=(|\psi|^2+g)(1-\chi_{L(\eta)}) \qquad (1.13.30)$$

$$\begin{aligned}&\psi_\eta(0,x)=\psi_0(x), \phi_\eta(0,x)=\phi_0(x),\\ &\phi_{\eta t}(0,x)=\phi_1(x)=\theta_0-\delta\phi_0, x\in\mathbf{R}^3\end{aligned} \qquad (1.13.31)$$

$\theta_\eta=\phi_{\eta t}+\delta\phi_\eta$。令 $S_{1\eta}(t)(\psi_0,\phi_0,\theta_0)=(\psi_\eta,\phi_\eta,\theta_\eta)$。则

$$(u_\eta,v_\eta,w_\eta)=S_{2\eta}(t)(\psi_0,\phi_0,\theta_0)=$$

$$S(t)(\psi_0,\phi_0,\theta_0) - S_{1\eta}(t)(\psi_0,\phi_0,\theta_0) =$$
$$(\psi - \psi_\eta, \phi - \phi_\eta, \theta - \theta_\eta)$$

为问题

$$\mathrm{i}u_{\eta t} + \Delta u_\eta + \mathrm{i}\alpha u_\eta - \mathrm{i}\eta\Delta u_\eta + \phi u_\eta = f_\eta(x) \quad (1.13.32)$$

$$v_{\eta tt} + (I - \Delta)v_\eta + \beta v_{\eta t} = |\psi|^2\chi_{L_{(\eta)}} + g_\eta(x) \quad (1.13.33)$$

$$u_\eta(0,x) = 0,\ v_\eta(x,0) = v_{\eta t}(0,x) = 0,\ x \in \mathbf{R}^3 \quad (1.13.34)$$

的解，而 $w_\eta = v_{\eta t} + \delta v_\eta$。我们证明如下的引理

引理1.13.5 存在常数 $C>0$ 和一个递增函数 $\omega(\eta)(\omega(0)=0)$，使得问题(1.13.29)～(1.13.31)的解满足

$$\|\psi_\eta\|_{H^2},\|\phi_\eta\|_{H^2},\|\phi_{\eta t}\|_{H^1} \leqslant C, \forall\ 0<\eta\leqslant 1, t\geqslant 0,$$
$$\|\psi_\eta\|_{H^2},\|\phi_\eta\|_{H^2},\|\phi_{\eta t}\|_{H^1} \leqslant \omega(\eta),$$
$$\forall\ 0<\eta\leqslant 1, t\geqslant t_*(\exists\ t_*>0)$$

证 作式(1.13.29)和 $2\psi_\eta$ 的内积，再取虚部，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\psi_\eta\|^2 + 2\alpha\|\psi_\eta\| + 2\eta\|\nabla\psi_\eta\|^2 =$$
$$2\mathrm{Im}\,(f - f_\eta, \psi_\eta) + 2\eta\mathrm{Im}\,(\nabla\psi, \nabla\psi_\eta) \leqslant$$
$$C\|f - f_\eta\|^2 + \alpha\|\psi_\eta\|^2 + \eta\|\nabla\psi_\eta\|^2 + \eta\|\nabla\psi\|^2$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\psi_\eta\|^2 + \alpha\|\psi_\eta\|^2 + \eta\|\nabla\psi_\eta\|^2 \leqslant C\eta$$

由 Gronwall 不等式，有

$$\|\psi_\eta\| \leqslant \|\psi_0\|^2\mathrm{e}^{-\alpha t} + \frac{C\eta}{\alpha}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t})$$

因此

$$\|\psi_\eta\|^2 \leqslant C, \forall\ t\geqslant 0, 0<\eta\leqslant 1 \quad (1.13.35)$$

取 $t_1 = t_1(R) > 0$，使得 $\mathrm{e}^{-\alpha t_1}\|\psi_0\|^2 \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha t_1}R^2 < \eta$。则

$$\|\psi_\eta\|^2 \leqslant C\eta,\quad \forall\ t\geqslant t_1 \quad (1.13.36)$$

因此 $\|\psi_\eta\| \leqslant C\sqrt{\eta}$，$t \geqslant t_1$。

作式(1.13.29)和 $\Delta^2\psi_\eta$ 的内积，再取虚部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta\psi_\eta\|^2+\alpha\|\Delta\psi_\eta\|^2+\eta\|\nabla\Delta\psi_\eta\|^2=$$

$$-\mathrm{Im}(\Delta\phi\psi_\eta,\Delta\psi_\eta)-2\,\mathrm{Im}(\nabla\phi\nabla\psi_\eta,\Delta\psi_\eta)+$$

$$\mathrm{Im}(\Delta(f-f_\eta),\Delta\psi_\eta)+\eta\,\mathrm{Im}(\nabla\Delta\psi,\nabla\Delta\psi_\eta)\leqslant$$

$$C\|\Delta\phi\|\|\psi_\eta\|_\infty\|\Delta\psi_\eta\|+2\|\nabla\phi\|_4\|\nabla\psi_\eta\|_4\|\Delta\psi_\eta\|+$$

$$\|\Delta(f-f_\eta)\|\|\Delta\psi_\eta\|+\eta\|\nabla\Delta\psi\|\|\nabla\Delta\psi_\eta\|\leqslant$$

$$C\|\Delta\phi\|\|\psi_\eta\|^{\frac{1}{4}}\|\Delta\psi_\eta\|^{\frac{7}{4}}+C\|\phi\|_{H^2}\|\psi_\eta\|^{\frac{1}{8}}\|\Delta\psi_\eta\|^{\frac{15}{8}}+$$

$$\frac{\alpha}{6}\|\Delta\psi_\eta\|^2+\frac{3}{2\alpha}\|\Delta(f-f_\eta)\|^2+\frac{1}{4}\eta\|\nabla\Delta\psi_\eta\|^2+$$

$$\eta\|\nabla\Delta\psi\|^2\leqslant\frac{\alpha}{2}\|\Delta\psi_\eta\|^2+\frac{\eta}{2}\|\nabla\Delta\psi_\eta\|^2+C\|\Delta\phi\|^8\|\psi_\eta\|^2+$$

$$C\|\phi\|_{H^2}^{16}\|\psi_\eta\|^2+C\|f-f_\eta\|_{H^2}^2+\eta\|\nabla\Delta\psi\|^2$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta\psi_\eta\|^2+\alpha\|\Delta\psi_\eta\|^2+\eta\|\nabla\Delta\psi_\eta\|^2\leqslant C\eta+$$

$$C(\|\phi\|_{H^2}^{16}+1)\|\psi_\eta\|^2$$

由 Gronwall 不等式，得

$$\|\Delta\psi_\eta\|^2\leqslant\|\Delta\psi_0\|^2\mathrm{e}^{-\alpha t}+\frac{C(\|\phi\|_{H^2}^{16}+1)}{2}\|\psi_\eta\|^2(1-\mathrm{e}^{-\alpha t})$$

(1.13.37)

由式(1.13.35)、(1.13.36)和式(1.13.37)

$$\|\Delta\psi_\eta\|^2\leqslant C,\quad\forall\, t\geqslant 0, 0<\eta\leqslant 1$$

取 $t_2=t_2(R)\geqslant t_1$，使得 $\mathrm{e}^{-\alpha t_2}\|\Delta\psi_0\|^2\leqslant\mathrm{e}^{-\alpha t_2}R^2<\eta$。则由式(1.13.37)和式(1.13.36)，有

$$\|\Delta\psi_\eta\|^2\leqslant C\eta,\ t\geqslant t_2$$

因此 $\|\Delta\psi_\eta\|\leqslant C\sqrt{\eta}$，$t\geqslant t_2$。

现估计 ϕ_η。作式(1.13.30)和 $2\phi_{\eta t}$ 的内积，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\phi_{\eta t}\|^2+\|\phi_\eta\|^2+\|\nabla\phi_\eta\|^2)+2\beta\|\phi_{\eta t}\|^2=$$

$$2((|\psi|^2+g)(1-\chi_{L(\eta)}),\phi_{\eta t})\leqslant$$

$$\beta\|\phi_{\eta t}\|^2+C(\||\psi|^2(1-\chi_{L(\eta)})\|^2-\|g-g_\eta\|^2)$$

我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\phi_{\eta t}\|^2+\|\phi_\eta\|^2+\|\nabla\phi_\eta\|^2)+\beta\|\phi_{\eta t}\|^2\leqslant$$

$$C\||\psi|^2(1-\chi_{L(\eta)})\|^2+C\|g-g_\eta\|^2\leqslant C\eta \tag{1.13.38}$$

作式(1.13.30)和 ϕ_η 的 L^2内积，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\phi_\eta\phi_{\eta t}\mathrm{d}x-\|\phi_{\eta t}\|^2+\|\phi_\eta\|^2+\|\nabla\phi_\eta\|^2+\frac{1}{2}\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\phi_\eta\|^2=$$

$$((|\psi|^2+g)(1-\chi_{L(\eta)}),\phi_\eta)\leqslant\frac{1}{2}\|\phi_\eta\|^2+C\eta \tag{1.13.39}$$

则由 $\delta\times$式(1.13.39)+式(1.13.38)推出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_\eta+I_\eta\leqslant C\eta \tag{1.13.40}$$

其中

$$H_\eta=\|\phi_{\eta t}\|^2+\left(1+\frac{1}{2}\delta\beta\right)\|\phi_\eta\|^2+\|\nabla\phi_\eta\|^2+\delta\int\phi_\eta\phi_{\eta t}\mathrm{d}x,$$

$$I_\eta=(\beta-\delta)\|\phi_{\eta t}\|^2+\frac{\delta}{2}\|\phi_\eta\|^2+\delta\|\nabla\phi_\eta\|^2$$

注意到

$$\left|\delta\int\phi_\eta\phi_{\eta t}\mathrm{d}x\right|\leqslant\delta\|\phi_\eta\|\|\phi_{\eta t}\|\leqslant\frac{1}{2}\delta\beta\|\phi_\eta\|^2+\frac{\delta}{2\beta}\|\phi_{\eta t}\|^2$$

因 $\delta\leqslant\frac{1}{2}\beta$，则对于适当大的 $L_1>0$，有

$$\frac{3}{4}\|\phi_{\eta t}\|^2+\left(1+\frac{1}{4}\delta\beta\right)\|\phi_\eta\|^2+\|\nabla\phi_\eta\|^2\leqslant H_\eta(t)\leqslant$$

$$\frac{5}{4}\|\phi_{\eta t}\|^2+\left(1+\frac{3}{4}\delta\beta\right)\|\phi_\eta\|^2+\|\nabla\phi_\eta\|^2\leqslant L_1I_\eta(t) \tag{1.13.41}$$

取 $\beta_3=L_1^{-1}$，则从式(1.13.40)、(1.13.41)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_\eta(t) + \beta_3 H_3(t) \leqslant C\eta$$

由 Gronwall 不等式，得

$$H_\eta(t) \leqslant H_\eta(0)\mathrm{e}^{-\beta_3 t} + \frac{C\eta}{\beta_3}(1 - \mathrm{e}^{-\beta_3 t}) \qquad (1.13.42)$$

于是由式(1.13.41)、(1.13.42)，有

$$\frac{3}{4}\|\phi_{\eta t}\|^2 + \left(1 + \frac{1}{4}\delta\beta\right)\|\phi_\eta\|^2 + \|\nabla\phi_\eta\|^2 \leqslant C,$$

$$\forall\, t \geqslant 0, 0 < \eta \leqslant 1$$

取 $t_3 = t_3(R) > t_2$，使得 $H_\eta(0)\mathrm{e}^{-\beta_3 t_3} \leqslant CR^2\mathrm{e}^{-\beta_3 t_3} \leqslant \eta$。则从式(1.13.41)、(1.13.42)得

$$\|\phi_{\eta t}\|^2 + \|\phi_\eta\|^2 - \|\nabla\phi_\eta\|^2 \leqslant C\eta$$

式(1.13.30)乘以 $-2\Delta\phi_{\eta t}$ 在 R^3 上部分积分得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla\phi_{\eta t}\|^2 + \|\nabla\phi_\eta\|^2 + \|\Delta\phi_\eta\|^2) + 2\beta\|\nabla\phi_{\eta t}\|^2 =$$

$$2(\nabla((|\psi|^2 + g)(1 - \chi_{L(\eta)})), \nabla\phi_{\eta t}) \leqslant$$

$$\beta\|\nabla\phi_{\eta t}\|^2 + C\|\nabla((|\psi|^2 + g)(1 - \chi_{L(\eta)}))\|^2$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla\phi_{\eta t}\|^2 + \|\nabla\phi_\eta\|^2 + \|\Delta\phi_\eta\|^2) + \beta\|\nabla\phi_{\eta t}\|^2 \leqslant C\eta \qquad (1.13.43)$$

作式(1.13.30)和 $-\Delta\phi_\eta$ 的内积，得

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\phi_{\eta t}\Delta\phi_\eta\mathrm{d}x - \|\nabla\phi_{\eta t}\|^2 + \|\nabla\phi_\eta\|^2 + \|\Delta\phi_\eta\|^2 +$$

$$\frac{1}{2}\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\phi_{\eta t}\|^2 = ((|\psi|^2 + g)(1 - \chi_{L(\eta)}), \Delta\phi_\eta) \leqslant$$

$$\frac{1}{2}\|\Delta\phi_\eta\|^2 + C\eta \qquad (1.13.44)$$

式(1.13.43)$+\delta\times$式(1.13.44)推出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla\phi_{\eta t}\|^2 + (1 + \frac{1}{2}\delta\beta)\|\nabla\phi_\eta\|^2 + \|\Delta\phi_\eta\|^2 -$$

$$\delta\int\phi_{\eta t}\Delta\phi_\eta \mathrm{d}x) + (\beta-\delta)\|\nabla\phi_{\eta t}\|^2 + \delta\|\nabla\phi_\eta\|^2 +$$

$$\delta\|\Delta\phi_\eta\|^2 \leqslant C\eta$$

令

$$J_\eta(t) = \|\nabla\phi_{\eta t}\|^2 + \left(1+\frac{1}{2}\beta\delta\right)\|\nabla\phi_\eta\|^2 + \|\Delta\phi_\eta\|^2 -$$

$$\delta\int\phi_{\eta t}\Delta\phi_\eta \mathrm{d}x$$

则

$$J_\eta(t) \leqslant J_\eta(0)\mathrm{e}^{-\beta_4 t} + \frac{C\eta}{\beta_4}(1-\mathrm{e}^{-\beta_4 t}),$$

$$\|\nabla\phi_{\eta t}\|^2 + \|\Delta\phi_\eta\|^2 \leqslant C, \quad \forall\ t\geqslant 0, 0<\eta\leqslant 1$$

取 $t_4=t_4(R)\geqslant t_3$，使得

$$J_\eta(0)\mathrm{e}^{-\beta_4 t} \leqslant CR\mathrm{e}^{-\beta_4 t} \leqslant \eta$$

则有

$$\|\nabla\phi_{\eta t}\|^2 + \|\Delta\phi_\eta\|^2 \leqslant C\eta,\ t\geqslant t_4$$

引理1.13.5得证。

引理1.13.6 存在常数 $C_1(\eta),C_2(\eta),C_3(\eta),C_4(\eta)$使得

$$\||x|u_\eta\| \leqslant C_1(\eta),$$

$$\||x|\nabla u_\eta\|, \||x|D_{jk}^2 u_\eta\| \leqslant C_2(\eta),$$

$$\||x|v_\eta\| + \||x|\nabla v_\eta\| + \||x|v_{\eta t}\| \leqslant C_3(\eta),$$

$$\||x|D_{jk}^2 v_\eta\| + \||x|\nabla v_\eta\| + \||x|\nabla v_{\eta t}\| \leqslant C_4(\eta),$$

其中 u_η,v_η 为问题(1.13.32)、(1.13.33)、(1.13.34)的解。

证 首先考虑 u_η，作式(1.13.32)和$2|x|^2u_\eta$ 的内积，取虚部得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|x|^2|u_\eta|^2\mathrm{d}x + 2\alpha\int|x|^2|u_\eta|^2\mathrm{d}x + 2\eta\int|x|^2|\nabla u_\eta|^2\mathrm{d}x =$$

$$-2\mathrm{Im}\int f_\eta|x|^2\bar{u}_\eta\mathrm{d}x + 4\eta\mathrm{Re}\int x\nabla u_\eta\bar{u}_\eta\mathrm{d}x +$$

$$4\mathrm{Im}\int x\nabla u_\eta \bar{u}_\eta \mathrm{d}x \qquad (1.13.45)$$

则式(1.13.45)的右端小于或等于

$$(4-4\eta)\||x|\nabla u_\eta\|\|u_\eta\| + 2\||x|f_\eta\|\||x|u_\eta\| \leqslant$$

$$\eta\||x|\nabla u_\eta\|^2 + \left(\frac{4}{\eta}+4\right)\|u_\eta\|^2 +$$

$$\alpha\||x|u_\eta\|^2 + \frac{1}{\alpha}\||x|f_\eta\|^2$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\||x|u_\eta\|^2 + \alpha\||x|u_\eta\|^2 + \eta\||x|\nabla u_\eta\|^2 \leqslant$$

$$\left(4+\frac{4}{\eta}\right)\|u_\eta\|^2 + \frac{1}{4\alpha}\||x|f_\eta\|^2 \qquad (1.13.46)$$

因 f_η 具有紧支集，$\||x|f_\eta\|$是有限的。由 Gronwall 不等式，得

$$\||x|u_\eta\|^2 \leqslant C_1(\eta), \quad \forall t \geqslant 0$$

令 $D_{jk}^2 = D_{x_jx_k}^2$作用于式(1.13.32)两端，得

$$\mathrm{i}D_{jk}^2u_{\eta t} + \Delta D_{jk}^2u_\eta + \mathrm{i}\alpha D_{jk}^2u_\eta - \mathrm{i}\eta\Delta D_{jk}^2u_\eta = F_\eta(x) \qquad (1.13.47)$$

其中

$$F_\eta = D_{jk}^2f_\eta - D_{jk}^2\phi u_\eta - D_j\phi D_ku_\eta - D_k\phi D_ju_\eta$$

于是式(1.13.45)仍为正确的，此时 F_η 换为 f_η，由部分积分得

$$\int D_{jk}^2\phi u_\eta|x|^2D_{jk}^2\bar{u}_\eta\mathrm{d}x = -\int D_j\phi[D_ku_\eta|x|^2D_{jk}^2\bar{u}_\eta +$$

$$2u_\eta x_kD_{jk}^2\bar{u}_\eta + u_\eta|x|^2D_kD_{jk}^2\bar{u}_\eta]\mathrm{d}x$$

我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|x|^2|D_{jk}^2u_\eta|^2\mathrm{d}x + 2\alpha\int|x|^2|D_{jk}^2u_\eta|^2\mathrm{d}x + 2\eta\int|x|^2|\nabla D_{jk}^2u_\eta|^2\mathrm{d}x =$$

$$-2\mathrm{Im}\int[D_{jk}^2f_\eta - D_j\phi D_ku_\eta - D_k\phi D_ju_\eta]|x|^2D_{jk}^2\bar{u}_\eta\mathrm{d}x -$$

$$2\mathrm{Im}\int D_j\phi[D_ku_\eta|x|^2D_{jk}^2\bar{u}_\eta + 2u_\eta x_kD_{jk}^2\bar{u}_\eta + u_\eta|x|^2D_kD_{jk}^2\bar{u}_\eta]\mathrm{d}x +$$

$$4\eta\mathrm{Re}\int x\nabla D_{jk}^2u_\eta D_{jk}^2\bar{u}_\eta dx + 4\mathrm{Im}\int x\nabla D_{jk}^2u_\eta D_{jk}^2\bar{u}_\eta\mathrm{d}x \qquad (1.13.48)$$

因ψ,ϕ在$H^3(\mathbf{R}^3)$中有界，且ψ_η,ϕ_η在$H^2(\mathbf{R}^3)$中有界，因此$u_\eta=\psi-\psi_\eta$，$v_\eta=\phi-\phi_\eta$也在$H^2(\mathbf{R}^3)$中有界。$\|u_\eta\|_{H^2}$，$\||x|u_\eta\|$，$\|f_\eta\|$，$\||x|f_\eta\|\leqslant C(\eta)$，$\|\nabla\phi\|_\infty\leqslant C\|\phi\|_{H^3}\leqslant C$。于是

$$
\begin{aligned}
&\text{式(1.13.48)的右端}\leqslant 2\||x|D^2_{jk}f_\eta\|\||x|D^2_{jk}u_\eta\|+\\
&6\|\nabla\phi\|_\infty\||x|\nabla u_\eta\|\||x|D^2_{jk}u_\eta\|+\\
&4\|D_j\phi\|_\infty\||x|u_\eta\|\|D^2_{jk}u_\eta\|+\\
&2\|D_j\phi\|_\infty\||x|u_\eta\|\||x|\nabla D^2_{jk}u_\eta\|+\\
&(4+4\eta)\||x|\nabla D^2_{jk}u_\eta\|\|D^2_{jk}u_\eta\|\leqslant\\
&\eta\||x|\nabla D^2_{jk}u_\eta\|^2+\alpha\||x|D^2_{jk}u_\eta\|^2+\\
&C(\eta)(\||x|D^2_{jk}f_\eta\|^2+|\nabla\phi\|^2_{H^2}\||x|\nabla u_\eta\|^2+\\
&\|\nabla\phi\|^2_{H^2}\||x|u_\eta\|^2+\|u_\eta\|^2_{H^2})\leqslant\\
&\eta\int|x|^2|\nabla D^2_{jk}u_\eta|^2\mathrm{d}x+C(\eta)+C(\eta)\||x|\nabla u_\eta|^2
\end{aligned}
$$

因此得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|x|^2|D^2_{jk}u_\eta|^2\mathrm{d}x+\alpha\int|x|^2|D^2_{jk}u_\eta|^2\mathrm{d}x+\\
&\eta\int|x|^2|\nabla D^2_{jk}u_\eta|^2\mathrm{d}x\leqslant C(\eta)+C(\eta)\||x|\nabla u_\eta\|^2
\end{aligned}\tag{1.13.49}
$$

由式(1.13.46)，我们有

$$
\||x|\nabla u_\eta\|^2\leqslant C(\eta)-\frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|x|^2|u_\eta|^2\mathrm{d}x
$$

由 Gronwall 不等式，我们得到(注意到$u_\eta(0,x)=0$)

$$
\begin{aligned}
&\int|x|^2|D^2_{jk}u_\eta|^2\mathrm{d}x\leqslant\\
&\int_0^t\mathrm{e}^{-2\alpha(t-s)}(C(\eta)+C(\eta)\||x|\nabla u_\eta\|^2(s))\mathrm{d}s\leqslant\\
&C(\eta)\int_0^t\mathrm{e}^{-2\alpha(t-s)}(C(\eta)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int|x|^2|u_\eta(s)|^2\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\leqslant\\
&C(\eta)-C(\eta)\int_0^t\mathrm{e}^{-2\alpha(t-s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\||x|u_\eta(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant
\end{aligned}
$$

$$C(\eta)-C(\eta)e^{-2a(t-s)}\||x|u_\eta\|^2\Big|_{s=0}^{s=t}+$$

$$C(\eta)\int_0^t 2a\||x|u_\eta(s)\|^2 e^{-2a(t-s)}ds\leqslant$$

$$C(\eta)-C(\eta)\||x|u_\eta\|^2+C(\eta)C_1(\eta)(1-e^{-2at})\leqslant C_2(\eta)$$

分部积分，有

$$\int|x|^2|\nabla u_\eta|^2dx=-\int 2x\nabla u_\eta u_\eta dx-\int|x|^2\Delta u_\eta u_\eta dx\leqslant$$

$$2\||x|u_\eta\|\|\nabla u_\eta\|+\||x|\Delta u_\eta\|\||x|u_\eta\|\leqslant C(\eta)$$

现建立 v_η 的不等式。作式(1.13.33)和$2|x|^2v_{\eta t}$的内积，得

$$\frac{d}{dt}\left(\int|x|^2|v_{\eta t}|^2dx+\int|x|^2|v_\eta|^2dx+\int|x|^2|\nabla v_\eta|^2dx\right)+$$

$$\beta\int|x|^2|v_{\eta t}|^2dx=\int(|\psi|^2+g)\chi_{L(\eta)}|x|^2v_{\eta t}dx-$$

$$4\int x\nabla v_\eta v_{\eta t}dx \tag{1.13.50}$$

作式(1.13.33)和$|x|^2v_\eta$ 的内积得

$$\frac{d}{dt}\int|x|^2v_{\eta t}v_\eta dx-\||x|v_{\eta t}\|^2+\||x|v_\eta\|^2+\||x|\nabla v_\eta|^2+$$

$$2\int x\nabla v_\eta v_\eta dx+\frac{1}{2}\beta\frac{d}{dt}\||x|v_\eta\|^2=$$

$$\int(|\psi|^2+g)\chi_{L(\eta)}|x|^2v_\eta dx \tag{1.13.51}$$

那么，由式(1.13.50)+(1.13.51)推出

$$\frac{d}{dt}\left(\||x|v_{\eta t}\|^2+(1+\frac{1}{2}\delta\beta)\||x|v_\eta\|^2+\||x|\nabla v_\eta\|^2+\right.$$

$$\left.\delta\int xv_\eta v_{\eta t}dx\right)+(\beta-\delta)\||x|v_{\eta t}\|^2+\delta\||x|v_\eta\|^2+$$

$$\delta\||x|\nabla v_\eta\|^2=\int(|\psi|^2+g)\chi_{L(\eta)}|x|^2v_{\eta t}dx-4\int x\nabla v_\eta v_{\eta t}dx-$$

$$2\delta\int x\nabla v_\eta v_\eta dx+\delta\int(|\psi|^2+g)\chi_{L(\eta)}|x|^2v_\eta dx$$

因 $\delta\leqslant\frac{1}{2}\beta$，$(\psi,\phi,\theta)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;\mathbf{Y})$，由引理1.13.5，$\|\phi_\eta\|_{H^2}\leqslant C$，所以

$v_\eta = \phi - \phi_\eta \in L^\infty(\mathbf{R}^+; H^2)$。因此，

式(1.13.52)的右端 $\leqslant$

$$\| |x| \chi_{L(\eta)}(|\psi|^2 + g) \| \| |x| v_{\eta t} \| + 4 \| \nabla v_\eta \| \| |x| v_{\eta t} \| +$$

$$2\delta \| |x| \nabla v_\eta \| \| v_\eta \| + \| |x| \chi_{L(\eta)}(|\psi|^2 + g) \| \| |x| v_\eta \| \leqslant$$

$$\frac{1}{2}(\beta - \delta) \| |x| v_{\eta t} \|^2 + \frac{1}{2} \| |x| \nabla v_\eta \|^2 + \frac{1}{2} \delta \| |x| v_\eta \|^2 +$$

$$C(\eta)(\| |x| \chi_{L(\eta)}(|\psi|^2 + g) \|^2 + \| \nabla v_\eta \|^2 + \| v_\eta \|^2),$$

$$\left| \delta \int x v_\eta v_{\eta t} \mathrm{d}x \right| \leqslant \delta \| x v_{\eta t} \| \| v_\eta \| \leqslant \frac{1}{2} \| x v_{\eta t} \|^2 + C \| v_\eta \|^2$$

将这些不等式代入式(1.13.41)，再利用 Gronwall 不等式，得

$$\| |x| v_{\eta t} \|^2 + (1 + \delta\beta) \| |x| v_\eta \|^2 + \| |x| \nabla v_\eta \|^2 \leqslant C_3(\eta)$$

式(1.13.33)对 $x_k (k=1,2,3)$ 作微分后，再乘以 $2|x|^2 v_{\eta x_k t}$，在 $\mathbf{R}^3$ 上分部积分后，同样可以得到

$$\| |x| v_{\eta x_k t} \|^2 + (1 + \delta\beta) \| |x| v_{\eta x_k} \|^2 + \| |x| \nabla v_{\eta x_k} \|^2 \leqslant C_4(\eta)$$

于是，完成了引理1.13.6的证明。

现来证明吸引子的存在性。

定理1.13.3 设 $f, g \in H^2(\mathbf{R}^3)$，$S(t)$ 为问题(1.13.6)～(1.13.9)生成的半群，则存在一个集合 $\mathscr{A} \subset X$ 满足

(1) $S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}, \forall\ t \geqslant 0$，

(2) $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{dist}_X(S(t)B, \mathscr{A}) = \lim\limits_{t\to\infty} \sup\limits_{y\in\mathscr{B}} \mathrm{dist}_X(S(t)y, \mathscr{A}) = 0$，其中 $B \subset Y$ 为有界集。

(3) $\mathscr{A}$ 在 X 中是紧的。

也就是说，$\mathscr{A}$ 为在 X 中的整体吸引子，它依 X 的拓扑吸引 Y 中的一切有界集。

为证明这个定理，我们需要如下的紧嵌入引理。

引理1.13.7 设 $s > s_1$ 为整数，$H^s(\mathbf{R}^n) \cap H^{s_1}(\mathbf{R}^n, (1+|x|^2)\mathrm{d}x)$ 嵌入到 $H^{s_1}(\mathbf{R}^n)$ 是紧的。

证 设 $B \subset H^s \cap H^{s_1}((1+|x|^2)\mathrm{d}x)$ 为一有界集，只需要证明 B 有有限的 ϵ 网(对任何 $\epsilon > 0$)即可。

首先，因

$$\int_{\mathbf{R}^n}|x|^2\sum_{l\leqslant s_1}|D^lu|^2\mathrm{d}x\leqslant C,\qquad \forall\, u\in B$$

则存在 $A>0$，使得

$$\int_{|x|>A}\sum_{l\leqslant s_1}|D^lu|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{A^2}\int_{|x|>A}|x|^2\sum_{l\leqslant s_1}|D^lu|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{C}{A^2}\leqslant\frac{\varepsilon^2}{2}$$

令 $\Omega=\{x\,|\,|x|<A\}$。则嵌入 $H^s(\Omega)\hookrightarrow H^{s_1}(\Omega)$ 是紧的。因此 $B|_\Omega=\{u\,|\,u=v|_\Omega,v\in B\}\subset H^s(\Omega)$ 在 $H^{s_1}(\Omega)$ 中是相对紧的，且具有有限 $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ 网 $\left\{B\left(\tilde{u}_k,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right),k=1,2,\cdots,m\right\}$，$\tilde{u}_k\in B|_\Omega$，$\tilde{u}_k=u_k|_\Omega$，$u_k\in B$。我们要证 $\left\{B\left(u_k,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ 为 B 在 $H^{s_1}(\mathbf{R}^n)$ 中的 ε 网。事实上，对任意 $u\in B$，$\tilde{u}=u|_\Omega$，存在 $\tilde{u}_k$，使得

$$\|\tilde{u}_k-\tilde{u}\|_{H^{s_1}(\Omega)}<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

因此

$$\|u-u_k\|^2_{H^{s_1}(\mathbf{R}^n)}=\|\tilde{u}-\tilde{u}_k\|^2_{H^{s_1}(\Omega)}+\|\tilde{u}-\tilde{u}_k\|^2_{H^{s_1}(\mathbf{R}^n\setminus\Omega)}\leqslant$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2}+\int_{|x|>A}\sum_{l\leqslant s_1}|D^lu|^2\mathrm{d}x<\varepsilon^2$$

引理证毕。

定理1.13.3的证明 由引理1.13.6和引理1.13.7可知，由式(1.13.32)～(1.13.34)定义的算子 $S_{2\eta}(t)$ 从 Y 到 X 是紧的。因此，对任何 $B\subset Y$ 的有界集，有

$$\alpha(S_{2\eta}(t)\,B)=0,\forall t\geqslant 0$$

从引理1.13.5，我们可知，对 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 η 和 $t_0>0$，使得

$$\|S_{1\eta}(t)(\psi_0,\phi_0,\theta_0)\|<\varepsilon,\quad \forall t\geqslant t_0$$

和 $(\psi_0,\phi_0,\theta_0)\in B$，$B\subset Y$ 为有界集，

即对 $\eta>0$，

$$\alpha(S_{1\eta}(t)B)\leqslant 2\varepsilon,t\geqslant t_0$$

于是,有

$$\alpha(S(t)B) \leqslant \alpha(S_{1\eta}(t)B) + \alpha(S_{2\eta}(t)B) = \alpha(S_{1\eta}(t)B) \leqslant 2\varepsilon, t \geqslant t_0$$

因此

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(S(t)B) = 0$$

于是 $S(t)$是渐近光滑的。由文献[218]中的理论,定理 1.13.3 的证明完毕。

1.14 二维无界区域上导数 Ginzburg-Landau 方程

前面已提到,郭、王在文献[131]中考虑了如下的二维具导数项的 Ginzburg-Landau(简称 DGL)方程

$$\begin{aligned} u_t = \rho u + (1+\mathrm{i}\nu)\Delta u - (1+\mathrm{i}\mu)|u|^{2\sigma}u + \\ + \alpha\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|u|^2 u) + \beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u)|u|^2 \end{aligned} \tag{1.14.1}$$

其中:$\rho>0$,α,β,ν,μ 均为实常数;$\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2$ 为实常数向量。他们证明了方程(1.14.1)的周期初值问题具有有限维的整体吸引子,其中假设存在正数 $\delta>0$,使得如下不等式成立:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\mu-\nu\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2}-1} \geqslant \sigma \geqslant 3 \tag{1.14.2}$$

1997 年,高、段在文献[81]中,对于如下形式的二维导数 GL 方程的 Gauchy 问题

$$\begin{aligned} u_t = \alpha_0 u + \alpha_1\Delta u + \alpha_2|u|^2 u_x + \alpha_3|u|^2 u_y + \\ \alpha_4 u^2\overline{u}_x + \alpha_5 u^2\overline{u}_y - \alpha_6|u|^{2\sigma}u \end{aligned}$$

其中:$\alpha_0>0$;$\alpha_j=a_j+\mathrm{i}b_j$;$1\leqslant j\leqslant 6$;$a_1>0$;$a_6>0$;$\sigma>0$。证明 H^2 整体解的存在性,他们假设如果 $b_1b_6>0$,$\sigma\geqslant\dfrac{1+\sqrt{10}}{2}$;当 $b_6=0$ 或 $b_1b_6<0$,则存在正数 $\delta>0$,使得

$$\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{(b_1\delta-b_6)^2}{(1+\delta)(a_1\delta+a_6)}}-1} \geqslant \sigma \geqslant \frac{1+\sqrt{10}}{2} \tag{1.14.3}$$

1997年，郭、李在文献[82]中对上述问题在无界区域上证明了整体吸引子的存在性，并进一步改善了条件(1.14.3)。

现我们考虑如下二维具导数项的GL方程的Cauchy问题

$$u_t = \gamma u + (1 + \mathrm{i}\nu)\Delta u - (1 + \mathrm{i}\mu)|u|^{2\sigma}u + \lambda_1 \cdot \nabla(|u|^2 u) + (\lambda \cdot \nabla u)|u|^2, t > 0, x \in \mathbf{R}^2 \tag{1.14.4}$$

$$u(0,x) = u_0(x), x \in \mathbf{R}^2 \tag{1.14.5}$$

其中：$\gamma>0$，ν,μ为实常数；λ_1,λ_2为复常数向量。设σ,ν,μ满足如下条件(A)

$$\sigma>2 \text{和} -1-\nu\mu<\frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma}|\nu-\mu|$$

可得如下定理：

定理1.14.1 设σ,ν,μ满足条件(A)。则DGL方程Cauchy问题(1.14.4)～(1.14.5)形成半群$S(t)$，它具有整体吸引子$\mathscr{A} \subset H^1_{lu}$，具有性质

(1) 不变性：$S(t)\mathscr{A}=\mathscr{A}$，$\forall\ t\geqslant 0$；

(2) 紧性：$\mathscr{A}$在H^2_{lu}中有界，因此它在H^1_ρ中紧；

(3) 吸引性：对于任何有界集$B\subset H^1_{lu}$，

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}_\rho(S(t)B,\mathscr{A}) = \lim_{t\to\infty} \sup_{v\in B} \mathrm{dist}_\rho(S(t)v,\mathscr{A}) = 0$$

下面给出加权空间H^m_ρ，H^m_{lu}的定义。设$\rho>0$为适当的加权函数，具有性质：

$$|\nabla\rho(x)|, |\Delta\rho(x)| \leqslant \rho_0\rho(x), \text{和}\int\rho(x)\mathrm{d}x = \rho_0 < +\infty \tag{1.14.6}$$

例如$\rho=\dfrac{1}{\cosh|x|}$，$\rho=\mathrm{e}^{-|x|}$等等。令$T_y\rho(x)=\rho(x-y)$表示平移的加权函数。加权L^p模为$\|u\|_{p,\rho}=\left(\int\rho|u|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$，$1<p<\infty$，一致局部模

$$\|u\|_{p,lu} = \sup_{y\in\mathbf{R}^2} \|u\|_{p,T_y\rho}$$

令 L_ρ^p 表示一切具有限加权 L^p 模的函数空间，$\|u\|_{p,\rho}<+\infty$，L_{lu}^p 表示一切 u 的一致局部空间，

$$\|u\|_{p,lu}<+\infty \text{ 和 } \|T_y u-u\|_{p,lu}\to 0 \text{ 当 } y\to 0$$

$(L_\rho^p,\|\cdot\|_{p,\rho})$，$(L_{lu}^p,\|\cdot\|_{p,lu})$ 均为 Banach 空间。我们也可定义加权 Sobolev 空间 $W_\rho^{m,p}$，$\|u\|_{W_\rho^{m,p}}=(\sum\limits_{k\leqslant m}\|D^k u\|_{p,\rho}^p)^{\frac{1}{p}}$；一致局部 Sobolev 空间 $W_{lu}^{m,p}$ = 函数空间 C_b^∞ 在模 $\|u\|_{W_{lu}^{m,p}}=\sup\limits_{y\in\mathbf{R}^2}\|u\|_{W_{T_y\rho}^{m,p}}$ 下的完备化。特别 $H_\rho^m=W_\rho^{m,2}$，$H_{lu}^m=W_{lu}^{m,2}$。

利用半群理论和压缩映射原理，可得如下局部存在性定理

定理1.14.2 设 $u_0\in H_{lu}^1$，则存在 Cauchy 问题(1.14.4)～(1.14.5)在区间$[0,T_*)$上的唯一解，

$$u(t)\in C([0,T_*),H_{lu}^1)\cap C((0,T_*),H_{lu}^2)$$

如 $T_*<+\infty$，则

$$\lim_{t\to T_*}\|u(t)\|_{H_{lu}^1}=+\infty$$

为了得到无界域上整体解和整体吸引子的存在性，我们必须在加权空间上给出一致先验估计。

引理1.14.1 设条件(A)成立。且

$$2\leqslant p<\frac{2\sqrt{1+\nu^2}}{\sqrt{1+\nu^2}-1} \tag{1.14.7}$$

则存在常数 C，它和 R 无关，以及常数 $t_0(R)>0$，使得

$$\|u\|_{p,\rho}^p\leqslant C,\quad t\geqslant t_0(R)$$

其中$\|u_0\|_{p,\rho}\leqslant R$。

证 直接计算得

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{p,\rho}^p=\mathrm{Re}\int\rho|u|^{p-2}\bar{u}u_t\mathrm{d}x=$$

$$\mathrm{Re}\int\rho|u|^{p-2}\bar{u}(\gamma u+(1+\mathrm{i}\nu)\Delta u-(1+\mathrm{i}\mu)|u|^{2\sigma}u+$$

$$(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla)(|u|^2u)+(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)|u|^2)\mathrm{d}x=$$

$$\gamma\|u\|_{p,\rho}^{p}-\|u\|_{p+2\sigma,\rho}^{p+2\sigma}+I_1+I_2 \tag{1.14.8}$$

其中

$$I_1=\operatorname{Re}\int(1+\mathrm{i}\nu)\rho|u|^{p-2}\bar{u}\Delta u\mathrm{d}x,$$

$$I_2=\operatorname{Re}\int\rho|u|^{p-2}\bar{u}((\lambda_1\cdot\nabla)(|u|^2u)+(\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^2)\mathrm{d}x$$

由分部积分得

$$I_1=-\operatorname{Re}\int(1+\mathrm{i}\nu)\nabla\rho|u|^{p-2}\bar{u}\nabla u\mathrm{d}x-$$

$$\operatorname{Re}\int(1+\mathrm{i}\nu)\rho\nabla(|u|^{p-2}\bar{u})\nabla u\mathrm{d}x=$$

$$-\operatorname{Re}\int(1+\mathrm{i}\nu)\nabla\rho|u|^{p-2}\bar{u}\nabla u\mathrm{d}x-$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int\rho|u|^{p-4}(p|u|^2|\nabla u|^2+(1+\mathrm{i}\nu)(p-2)\bar{u}^2(\nabla u)^2)\mathrm{d}x=$$

$$-\operatorname{Re}\int(1+\mathrm{i}\nu)\nabla\rho|u|^{p-2}\bar{u}\nabla u\mathrm{d}x-$$

$$\frac{1}{4}\int\rho|u|^{p-4}\sum_{j=1}^{2}(\bar{u}\partial_ju,u\partial_j\bar{u})M(\nu,p)\begin{pmatrix}u\partial_j\bar{u}\\ \bar{u}\partial_ju\end{pmatrix}\mathrm{d}x \tag{1.14.9}$$

其中

$$M(\nu,p)=\overline{M(\nu,p)}^{\mathrm{tr}}=\begin{pmatrix}p & (1+\mathrm{i}\nu)(p-2)\\ * & p\end{pmatrix} \tag{1.14.10}$$

当式(1.14.7)满足时，$M(\nu,p)$的最小特征值为

$$\lambda_M(\nu,p)=p-|p-2|\sqrt{1+\nu^2}>0 \tag{1.14.11}$$

因此 $M(\nu,p)$是正定的，有

$$I_1\leqslant\rho_\nu\int\rho|u|^{p-1}|\nabla u|\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\lambda_M(\nu,p)\int\rho|u|^{p-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\frac{2\rho_\nu^2}{\lambda_M(\nu,p)}\int\rho|u|^p\mathrm{d}x-\frac{1}{8}\lambda_M(\nu,p)\int\rho|u|^{p-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x$$

其中 $\rho_\nu=\rho_0\sqrt{1+\nu^2}$。由 Gauchy 不等式有

$$|I_2| \leqslant (3|\lambda_1| + |\lambda_2|)\int\rho|u|^{p+1}|\nabla u|\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\frac{1}{8}\lambda_M(\nu,p)\int\rho|u|^{p-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x +$$

$$\frac{2(3|\lambda_1| + |\lambda_2|)^2}{\lambda_M(\nu,p)}\int\rho|u|^{p+4}\mathrm{d}x$$

因 $\sigma>2$，由 Hölder 不等式有

$$\frac{2(3|\lambda_1| + |\lambda_2|)^2}{\lambda_M(\nu,p)}\int\rho|u|^{p+4}\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\frac{2(3|\lambda_1| + |\lambda_2|)^2}{\lambda_M(\nu,p)}\left(\int\rho|u|^{p}\mathrm{d}x\right)^{1-2/\sigma}\left(\int\rho|u|^{p+2\sigma}\mathrm{d}x\right)^{2/\sigma} \leqslant$$

$$\frac{1}{2}\|u\|_{p+2\sigma,\rho}^{p+2\sigma} + C_1\|u\|_{p,\rho}^{p}$$

其中 $C_1=\frac{\sigma-2}{\sigma}\left(\frac{\sigma}{4}\right)^{\frac{2(\sigma-2)}{\sigma^2}}\left(\frac{2(3|\lambda_1|+|\lambda_2|)^2}{\lambda_M(\nu,p)}\right)^{\frac{2\sigma}{\sigma-2}}$。于是可得

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{p,\rho}^{p} \leqslant C_2\|u\|_{p,\rho}^{p} - \frac{1}{2}\|u\|_{p+2\sigma,\rho}^{p+2\sigma} \leqslant -\frac{C_2}{p}\|u\|_{p,\rho}^{p} + \frac{C_3}{p},$$

其中 $C_2=\gamma+\frac{2\rho^2}{\lambda_M(\nu,p)}+C_1, C_3=\sigma\rho_0\left(\frac{2C_2(p-1)}{p+2\sigma}\right)^{\frac{p+2\sigma}{2\sigma}}$。由 Gronwall 不等式，有

$$\|u\|_{p,\rho}^{p} \leqslant \|u_0\|_{p,\rho}^{p}\ \mathrm{e}^{-C_2t} + \frac{C_3}{C_2}, \quad t\geqslant 0$$

引理证毕。

附注： 如 $\sigma=2$，可设 $6|\lambda_1|+2|\lambda_2|<\lambda_M(\nu,p)$ 则引理也是成立的。

引理1.14.2 在条件(A)下，存在常数 C，它与 R 无关和常数 $t_1(R)>0$，使得

$$\|\nabla u(t)\|_{2,\rho}^2 \leqslant C, \quad t\geqslant t_1(R),$$

其中 $\|u_0\|_{H_0^1}\leqslant R$。

证 由方程(1.14.4)和分部积分可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\rho|\nabla u|^2\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\int\rho\nabla\bar{u}\nabla u_t\mathrm{d}x=$$

$$\mathrm{Re}\int\rho\nabla\bar{u}\nabla(\gamma u+(1+\mathrm{i}\nu)\Delta u-(1+\mathrm{i}\mu)|u|^{2\sigma}u+$$

$$(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla)(|u|^2u)+(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)|u|^2)\mathrm{d}x=$$

$$\gamma\|\nabla u\|_{2,\rho}^2-\|\Delta u\|_{2,\rho}^2-\mathrm{Re}\int(1+\mathrm{i}\nu)\nabla\rho\nabla\bar{u}\Delta u\mathrm{d}x+$$

$$\mathrm{Re}\int(1+\mathrm{i}\mu)\rho|u|^{2\sigma}u\Delta\bar{u}\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int(1+\mathrm{i}\mu)\nabla\rho\nabla\bar{u}|u|^{2\sigma}u\mathrm{d}x-$$

$$\mathrm{Re}\int\rho\Delta\bar{u}((\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla)(|u|^2u)+(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)|u|^2)\mathrm{d}x-$$

$$\mathrm{Re}\int\nabla\rho\nabla\bar{u}((\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla)(|u|^2u)+(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)|u|^2)\mathrm{d}x=$$

$$\gamma\|\nabla u\|_{2,\rho}^2-\|\Delta u\|_{2,\rho}^2+\sum_{k=3}^{7}I_k \tag{1.14.12}$$

其中

$$|I_3|=|-\mathrm{Re}\int(1+\mathrm{i}\nu)\nabla\rho\nabla\bar{u}\Delta u\mathrm{d}x|\leqslant\rho_\nu\int\rho|\nabla u||\Delta u|\mathrm{d}x,$$

$$I_4=\mathrm{Re}\int\rho(1-\mathrm{i}\mu)|u|^{2\sigma}\bar{u}\Delta u\mathrm{d}x,$$

$$|I_5|=|-\mathrm{Re}\int(1+\mathrm{i}\mu)\nabla\rho\nabla\bar{u}|u|^{2\sigma}u\mathrm{d}x|\leqslant$$

$$\rho_\mu\int\rho|u|^{2\sigma+1}|\nabla u|\mathrm{d}x,$$

$$|I_6|=|-\mathrm{Re}\int\nabla\rho\nabla\bar{u}((\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla)(|u|^2u)+(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)|u|^2)\mathrm{d}x|\leqslant$$

$$(3|\boldsymbol{\lambda}_1|+|\boldsymbol{\lambda}_2|)\rho_0\int\rho|u|^2|\nabla u|^2\mathrm{d}x,$$

$$|I_7|=|-\mathrm{Re}\int\rho\Delta\bar{u}((\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla)(|u|^2u)+(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)|u|^2)\mathrm{d}x|\leqslant$$

$$(3|\boldsymbol{\lambda}_1|+|\boldsymbol{\lambda}_2|)\int\rho|u|^2|\nabla u||\Delta u|\mathrm{d}x$$

令 $\delta>0$(适当选取)，定义

$$V_\delta(u(t)) = \int \rho\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{\delta}{2\sigma+2}|u|^{2\sigma+2}\right)\mathrm{d}x, \tag{1.14.13}$$

从式(1.14.12)和式(1.14.8)，$p=2\sigma+2$，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_\delta(u(t)) = \gamma(\|\nabla u\|_{2,\rho}^2 - \delta\|u\|_{2\sigma+2,\rho}^{2\sigma+2}) - (\|\Delta u\|_{2,\rho}^2 +$$

$$\delta\|u\|_{4\sigma+2,\rho}^{4\sigma+2}) + (\delta I_1 + I_4) + I_3 + I_5 + I_6 + \delta I_2 + I_7 \leqslant$$

$$\gamma(\|\nabla u\|_{2,\rho}^2 + \delta\|u\|_{2\sigma-2,\rho}^{2\sigma-2}) - (\|\Delta u\|_{2,\rho}^2 + \delta\|u\|_{4\sigma+2,\rho}^{4\sigma-2}) +$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int\rho(|u|^{2\sigma}u,\Delta u)\cdot N_0\cdot\begin{pmatrix}|u|^{2\sigma}\overline{u}\\ \Delta u\end{pmatrix}\mathrm{d}x +$$

$$\rho_o\int\rho|\nabla u||\Delta u|\mathrm{d}x + \rho_\rho\int\rho|u|^{2\sigma+1}|\nabla u|\mathrm{d}x +$$

$$(3|\lambda_1| + |\lambda_2|)\rho_0\int\rho|u|^2|\nabla u|^2\mathrm{d}x +$$

$$\delta(3|\lambda_1| + |\lambda_2|)\int\rho|u|^{2\sigma+3}|\nabla u|\mathrm{d}x +$$

$$(3|\lambda_1| + |\lambda_2|)\int\rho|u|^2|\nabla u||\Delta u|\mathrm{d}x, \tag{1.14.14}$$

其中，$N_0 = \overline{N_0}^T = \begin{pmatrix}0 & 1+\delta-\mathrm{i}(\delta\nu-\mu)\\ * & 0\end{pmatrix}$。类似于式(1.14.9)～(1.14.10)，对任何 α

$$|\alpha| < \frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma}$$

$M(\alpha,2\sigma+2)$的最小特征值 $\lambda_M(\alpha,2\sigma+2)$是正的。因此$M(\alpha,2\sigma+2)$是正定的。于是

$$\mathrm{Re}\int(1+\mathrm{i}\alpha)\rho|u|^{2\sigma}\overline{u}\Delta u\mathrm{d}x = -\mathrm{Re}\int(1+\mathrm{i}\alpha)\nabla\rho|u|^{2\sigma}\overline{u}\nabla u\mathrm{d}x -$$

$$\int\rho|u|^{2\sigma-2}\sum_{j=1}^{2}(\overline{u}\partial_j u, u\partial_j\overline{u})M(\alpha,2\sigma+2)\begin{pmatrix}u\partial_j\overline{u}\\ \overline{u}\partial_j u\end{pmatrix}\mathrm{d}x \leqslant$$

$$-\lambda_M(\alpha,p)\int\rho|u|^{2\sigma}|\nabla u|^2\mathrm{d}x + \rho_a\int\rho|u|^{2\sigma+1}|\nabla u|\mathrm{d}x,$$

即有

$$\mathrm{Re}\int(1+\mathrm{i}\alpha)\rho|u|^{2\sigma}\overline{u}\Delta u\mathrm{d}x+\lambda_M(\alpha,2\sigma)\int\rho|u|^{2\sigma}|\nabla u|^2\mathrm{d}x$$

$$\rho_\alpha\int\rho|u|^{2\sigma-1}|\nabla u|\mathrm{d}x\leqslant 0 \tag{1.14.15}$$

式(1.14.15)乘以$-\eta$($\eta>0$待选取),再和式(1.14.14)相加得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_\delta(u(t))\leqslant$$

$$\gamma(\|\nabla u\|_2^2+\delta\|u\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2})-(1-\kappa)(\|\Delta u\|_2^2+\delta\|u\|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2})-$$

$$\eta\lambda_M(\alpha,2\sigma+2)\int\rho|u|^{2\sigma}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int\rho(|u|^{2\sigma}u,\Delta u)\cdot N\cdot\begin{pmatrix}|u|^{2\sigma}\overline{u}\\ \Delta\overline{u}\end{pmatrix}\mathrm{d}x+$$

$$(\rho_\mu+\eta\rho_\alpha)\int\rho|u|^{2\sigma+1}|\nabla u|\mathrm{d}x+\rho_\nu\int\rho|\nabla u||\Delta u|\mathrm{d}x+$$

$$(3|\lambda_1|+|\lambda_2|)\rho_0\int\rho|u|^2|\nabla u|^2\mathrm{d}x+$$

$$\delta(3|\lambda_1|+|\lambda_2|)\int\rho|u|^{2\sigma+3}|\nabla u|\mathrm{d}x+$$

$$(3|\lambda_1|+|\lambda_2|)\int\rho|u|^2|\nabla u||\Delta u|\mathrm{d}x \tag{1.14.16}$$

其中,$0\leqslant\kappa<1$为待定,

$$N=\overline{N^{tr}}=\begin{pmatrix}-2\delta\kappa & 1+\delta-\eta-\mathrm{i}(\delta\nu-\mu-\alpha\eta)\\ * & -2\kappa\end{pmatrix}$$

对于这样的距阵N,我们有

命题1.14.1 当σ,ν和μ满足条件(A),我们能选取适当的δ,η为正的,$\kappa\in(0,1)$和$|\alpha|<\dfrac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma}$,使得$N$为非正的。因此

$$\mathrm{Re}\int\rho(|u|^{2\sigma}u,\Delta u)\cdot N\cdot\begin{pmatrix}|u|^{2\sigma}\overline{u}\\ \Delta u\end{pmatrix}\mathrm{d}x\leqslant 0$$

对于式(1.14.16)的最后五个积分可作如下估计:

$$(\rho_\mu+\eta\rho_\alpha)\int\rho|u|^{2\sigma+1}|\nabla u|\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\frac{1}{8}(1-\kappa)\int\rho|u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x+\frac{2(\rho_\mu+\eta\rho_a)^2}{1-\kappa}\int\rho|\nabla u|^2\mathrm{d}x,$$

$$\rho_r\int\rho|\nabla u||\Delta u|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{8}(1-\kappa)\int\rho|\Delta u|^2\mathrm{d}x+\frac{2\rho_\mu^2}{1-\kappa}\int\rho|\nabla u|^2\mathrm{d}x,$$

$$(3|\lambda_1|+|\lambda_2|)\rho_0\int\rho|u|^2|\nabla u|^2\mathrm{d}x=$$

$$(3|\lambda_1|+|\lambda_2|)\rho_0\int\rho^{1/\sigma}|u|^2|\nabla u|^{2/\sigma}\cdot\rho^{1-1/\sigma}|\nabla u|^{2-2/\sigma}\mathrm{d}x\leqslant$$

$$(3|\lambda_1|+|\lambda_2|)\rho_0\left(\int\rho|u|^{2\sigma}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\sigma}}\left(\int\rho|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{\sigma}}\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\eta\lambda_M(\alpha,2\sigma+2)\int\rho|u|^{2\sigma}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+$$

$$\frac{(\sigma-1)[(3|\lambda_1|+|\lambda_2|)\rho_0]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}{\sigma}\left(\frac{2}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\int\rho|\nabla u|^2\mathrm{d}x,$$

$$\int\rho|u|^2|\nabla u||\Delta u|\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon_1\int\rho|\Delta u|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{4\varepsilon_1}\int\rho|u|^4|\nabla u|^2\mathrm{d}x,$$

$$\int\rho|u|^{2\sigma+3}|\nabla u|\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon_2\int\rho|u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x+\frac{1}{4\varepsilon_2}\int\rho|u|^4|\nabla u|^2\mathrm{d}x,$$

其中 $\varepsilon_1>0,\varepsilon_2>0$为任意，因 $\sigma>2$，由 Young 不等式，有

$$\int\rho|u|^4|\nabla u|^2\mathrm{d}x=\int\rho|u|^4|\nabla u|^{4/\sigma}|\nabla u|^{2(1-2/\sigma)}\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\varepsilon_3\int\rho|u|^{2\sigma}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{\sigma-2}{\sigma}\left(\frac{2}{\sigma\varepsilon_3}\right)^{\frac{2}{\sigma-2}}\int\rho|\nabla u|^2\mathrm{d}x,$$

$$\forall\ \varepsilon_3>0$$

选取 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$和 $\varepsilon_3>0$充分小，使得

$$\varepsilon_1(3|\lambda_1|+|\lambda_2|)\leqslant\frac{1}{2}(1-\kappa)$$

$$\varepsilon_1\delta(3|\lambda_1|+|\lambda_2|)\leqslant\frac{1}{2}(1-\kappa)$$

$$\varepsilon_3\left(\frac{1}{4\varepsilon_1}+\frac{\delta}{4\varepsilon_2}\right)(3(|\lambda_1|+|\lambda_2|)\leqslant\frac{1}{2}\eta\lambda_M(\alpha,2\sigma+2)$$

因此可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_\delta(u(t)) \leqslant (\gamma + C_4)\|\nabla u\|_{2,\rho}^2 + \delta\gamma\|u\|_{2\sigma-2,\rho}^{2\sigma+2} -$$

$$\frac{1}{2}(1-\kappa)(\|\Delta u\|_2^2 + \delta\|u\|_{4\sigma+2,\rho}^{4\sigma+2}) \quad (1.14.17)$$

其中 C_4 为出现于上面不等式积分项$\int\rho|\nabla u|^2\mathrm{d}x$ 系数之和。注意到存在 $C_5=C_5(\gamma,\sigma,\kappa)>0$，使得

$$\delta\gamma\|u\|_{2\sigma-2,\rho}^{2\sigma+2} - \frac{1}{2}\delta(1-\kappa)\|u\|_{4\sigma+2,\rho}^{4\sigma+2} \leqslant$$

$$\delta\int\rho(C_5 - \frac{2\gamma}{2\sigma-2}|u|^{2\sigma+2})\mathrm{d}x = -\frac{2\delta\gamma}{2\sigma+2}\|u\|_{2\sigma-2,\rho}^{2\sigma-2} + \delta C_5\rho_0,$$

利用分部积分和 Cauchy 不等式，得

$$\|\nabla u\|_{2,\rho} = \int\rho\nabla u\nabla\bar{u}\mathrm{d}x = -\int\nabla\rho\nabla u\,\bar{u}\mathrm{d}x - \int\rho\Delta u\,\bar{u}\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\rho_0\|u\|_{2,\rho}\|\nabla u\|_{2,\rho} + \|u\|_{2,\rho}\|\Delta u\|_{2,\rho} \leqslant$$

$$\frac{1}{2}\|\nabla u\|_{2,\rho}^2 + \frac{1-\kappa}{4(2\gamma+C_4)}\|\Delta u\|_{2,\rho}^2 +$$

$$\left(\frac{\rho_0^2}{2} + \frac{(2\gamma+C_4)}{1-\kappa}\right)\|u\|_{2,\rho}^2,$$

由引理1.14.1，$\|u\|_{2,\rho}\leqslant C_0$，和

$$(\gamma + C_4)\|\nabla u\|_{2,\rho} \leqslant C_6 + \frac{1}{2}(1-\kappa)\|\Delta u\|_{2,\rho}^2 - \gamma\|\nabla u\|_{2,\rho}^2,$$

其中 $C_6=\left(\rho_0^2(2\gamma+C_4)+\dfrac{2(2\gamma+C_4)^2}{1-\kappa}\right)C_0$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_\delta(u(t)) \leqslant -2\gamma V_\delta(u(t)) + \delta C_5\rho_0 + C_6 \quad (1.14.18)$$

由 Gronwall 不等式得

$$V_\delta(u(t)) \leqslant V(u_0)\mathrm{e}^{-2\gamma t} + \frac{\delta C_5\rho_0 + C_6}{2\gamma}, t\geqslant 0 \quad (1.14.19)$$

引理证毕。

推论1.14.1 在引理1.14.2的相同假设下，有

$$\|u(t)\|_{H_{lu}^1} \leqslant C, \quad t \geqslant t_1(R)$$

其中$\|u_0\|_{H^1_{lu}}\leqslant R$，$C$ 与 R 无关。

附注：当 $\sigma=2$时，$3|\lambda_1|+|\lambda_2|$充分小，则引理1.14.2和推论1.14.6均成立。

基于局部存在性定理和上述先验估计，我们有

定理1.14.3 整体存在性：设条件(A)成立。则对任何 $u_0\in H^1_{lu}$问题 (1.14.4)、(1.14.5)具有整体唯一解

$$u(t)\in C([0,+\infty);H^1_{lu})\cap C((0,+\infty);H^2_{lu})$$

DGL 方程形成的半群 $S(t)$在 H^1_{lu}中连续($t>0$)。且存在常数 L_1和 $t_1(R)>0$使得

$$\|u(t)\|_{H^1_{lu}}\leqslant L_1,\quad t\geqslant t_1(R)$$

其中$\|u_0\|_{H^1_{lu}}\leqslant R$。此时，$B(0,L_1)$为在 H^1_{lu}中的吸收集。对任何 $q>2$，存在常数 $L_2>0$和 $t_*(R)>0$使得

$$\|u(t)\|_{W^{1,q}_{lu}}\leqslant L_2,\quad t\geqslant t_*(R)$$

我们首先证明解的 H^2_{lu}正则性。因 $M_1=\sup\limits_{t\geqslant 0}\|u(t)\|_{H^1_{lu}}<\infty$，当$1<p<2$时，

$$\|F(u(t))\|_{L^p_{lu}}\leqslant C(p)(M_1+M_1^{2\sigma+1}+M_1^3)\stackrel{\text{def}}{=\!=}M_2\quad t\geqslant 0,$$

其中方程(1.14.4)可写成

$$u_t=B_pu+F(u)$$

$$B_p=A_p-(R_1+1),$$

$$F(u)=(\gamma-R_1+1)u+(1+\mathrm{i}\mu)|u|^{2\sigma}u+$$

$$(\lambda_1\cdot\nabla)(|u|^2u)+(\lambda_2\cdot u)|u|^2,$$

$$A_pu=(1+\mathrm{i}\nu)\Delta u$$

因此，对 $q>2$由插值不等式(设 $p=\dfrac{2q}{1+q}\in(1,2)$，$\theta=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{p}=1-\dfrac{1}{2q}\in(0,1)$)和

$$\|\mathrm{e}^{B_qt}u\|_{W^{s+1,q}_{lu}}\leqslant Mt^{-(\frac{1}{p}+\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\mathrm{e}^{-\omega t}\|u\|_{W^{s,p}_{lu}},$$

$$\forall\, u\in W^{s,p}_{lu},1<p\leqslant q,\ t>0\qquad(1.14.20)$$

可得

$$\|e^{B_q(t-s)}F(u(s))\|_{W_{lu}^{1,q}} \leqslant$$

$$(\|e^{B_p(t-s)}F(u(s))\|_{L_{lu}^p})^{1-\theta}(\|e^{B_p(t-s)}F(u(s))\|_{W_{lu}^{2,p}})^{\theta} \leqslant$$

$$M(t-s)^{-\theta}e^{-\omega(t-s)}\|F(u(s))\|_{L_{lu}^p} \leqslant$$

$$MM_2(t-s)^{-\theta}e^{-\omega(t-s)}, \quad t > s \geqslant 0$$

由于

$$u(t) = e^{B_q t}u(0) + \int_0^t e^{B_q(t-s)}F(u(s))ds$$

可得

$$\|u(t)\|_{W_{lu}^{1,q}} \leqslant Mt^{-\frac{1}{2}}e^{-\omega t}\|u(0)\|_{L_{lu}^q} -$$

$$\int_0^t \|e^{B_p(t-s)}F(u(s))\|_{W_{lu}^{1,q}}\, ds \leqslant$$

$$CMt^{-\frac{1}{2}}e^{-\omega t}\|u_0\|_{H_{lu}^1} + \int_0^t MM_2(t-s)^{-\theta}e^{-\omega(t-s)}ds \leqslant$$

$$MM_1 t^{-\frac{1}{2}}e^{-\omega t} + \frac{MM_2\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)}{\omega}, \quad t > 0$$

特别，我们有$\|u(t)\|_{W_{lu}^{1,q}} \leqslant M_3(t_0)$，$\forall\, t \geqslant t_0$，任意固定 $t_0 > 0$。

于是可得

$$\|F(u(t))\|_{H_{lu}^1} \leqslant C(\|u(t)\|_{H_{lu}^1} + \|u(t)\|_{W_{lu}^{1,4}}^{2\sigma-1} +$$

$$\|u(t)\|_{W_{lu}^{1,4}}^2\|u(t)\|_{H_{lu}^2}) \leqslant C(M_3+1)^{2\sigma+1}(1+\|u(t)\|_{H_{lu}^2}) \leqslant$$

$$M_4(1+\|u(t)\|_{H_{lu}^2}), \quad t \geqslant t_0,$$

因此

$$\|u(t)\|_{H_{lu}^2} \leqslant$$

$$\|e^{B_2(t-t_0)}u(t_0)\|_{H_{lu}^2} + \int_{t_0}^t \|e^{B_2(t-s)}F(u(s))\|_{H_{lu}^2}ds \leqslant$$

$$M(t-t_0)^{-\frac{1}{2}}e^{-\omega(t-t_0)}\|u(t_0)\|_{H_{lu}^1} +$$

$$\int_{t_0}^{t} M(t-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\omega(t-s)}\|F(u(s))\|_{H^1_{lu}}ds \leqslant$$

$$M(t-t_0)^{-\frac{1}{2}}e^{-\omega(t-t_0)}\|u(t_0)\|_{H^1_{lu}} +$$

$$\int_{t_0}^{t} MM_4(t-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\omega(t-s)}(1+\|u(s)\|_{H^2_{lu}})ds, \quad t > t_0$$

因此，由广义 Gronwall 不等式，得

$$\|u(t)\|_{H^2_{lu}} \leqslant M_5(t-t_0)^{-\frac{1}{2}}, \quad t_0 < t \leqslant T$$

因 $t_0>0$ 是任意的，因此 $u(t)\in H^2_{lu}$，且是连续的，$t>0$。

其次，我们证明存在 $t_*>0$ 使得 $u(t)$ 在 $W^{1,q}_{lu}$ 中一致有界，其中 $\|u_0\|_{H^1_{lu}}\leqslant R$，由此推出 $B(0,L_2)$（即在 $W^{1,q}_{lu}$ 中以半径为 L_2 的球）是一个在 H^1_p 中 $S(t)$ 的紧吸收集。

因 $\sup\limits_{t\geqslant t_1(R)}\|u(t)\|_{H^1_{lu}}\leqslant L_1$，当 $1<p<2$，

$$\|F(u(t))\|_{L^p_{lu}} \leqslant C(p)(L_1+L_1^{2\sigma+1}+L_1^3) \xlongequal{\text{def}} C_1(p), t \geqslant t_1(R)$$

其中 $C_1(p)$ 与 R 无关，类似于上面的证明，对于 $q>2$，由插值公式（设 $p=\dfrac{2q}{1+q}$，$\theta=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{p}=1-\dfrac{1}{2q}$）和式(1.14.20)，有

$$\|e^{B_q(t-s)}F(u(s))\|_{W^{1,q}_{lu}} \leqslant$$

$$(\|e^{B_p(t-s)}F(u(s))\|_{L^p_{lu}})^{1-\theta}(\|e^{B_p(t-s)}F(u(s))\|_{W^{2,p}_{lu}})^{\theta} \leqslant$$

$$M(t-s)^{-\theta}e^{-\omega(t-s)}\|F(u(s))\|_{L^p_{lu}} \leqslant$$

$$MC_1(p)t^{-\theta}e^{-\omega t}, \quad t > s \geqslant t_1$$

由于

$$u(t) = e^{B_q(t-t_1)}u(t_1) + \int_{t_1}^{t} e^{B_q(t-s)}F(u(s))ds$$

可得

$$\|u(t)\|_{W^{1,q}_{lu}} \leqslant M(t-t_1)^{-\frac{1}{2}}e^{-\omega(t-t_1)}\|u(t_1)\|_{L^q_{lu}} +$$

$$\int_{t_1}^{t} MC_1(p)(t-s)^{-\theta}e^{-\omega(t-s)}ds \leqslant$$

$$M(t-t_1)^{-\frac{1}{2}}e^{-\omega(t-t_1)}\|u(t_1)\|_{H^1_{lu}}+\frac{MC_1(p)\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)}{\omega},\quad t>t_1$$

取 $t_*=t_1+1+\frac{1}{\omega}\lg(ML_1)$，则

$$\|u(t)\|_{W^{1,q}_{lu}}\leqslant L_2=1+\frac{MC_1(p)\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)}{\omega},\quad t\geqslant t_*(R)$$

定理1.14.1直接从 H^2_{lu} 到 H^1_ρ 的紧嵌入和应用 Hale J R 在文献[218]中和 Temam 在文献[80]中的理论可得。整体吸引子 $\mathscr{A}$ 可表为 DGL 方程(1.14.4)具初值(1.14.5)所形成的半群 $S(t)$ 的 ω 极限集，即

$$\mathscr{A}=\omega(B(0,L_1))=\bigcap_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant s}S(t)B(0,L_1)},$$

其中　闭包取 H^1_ρ 拓扑，具有性质

(1) $\mathscr{A}$ 具有平移不变性；

(2) $\mathscr{A}$ 具有旋转不变性；

(3) 如 σ 为整数和 ρ 为光滑，$|D^m\rho(x)|\leqslant\rho_m\rho(x)$，$\forall\ m\geqslant 1$，则

$$\mathscr{A}\subset\bigcap_{m=1}^{\infty}H^m_{lu}$$

(1)、(2)从 DGL 方程(1.14.4)的平移和旋转不变性得到。(3)用归纳法类似于定理1.14.1的证明得到。

1.15　吸引子和湍流的联系

随着对 Navier-Stokes 方程动力系统性质研究的深入，使得这些研究成果和 Kolmogorov 的湍流理论可进行某种类比。现简叙如下：

1. 特征模的代数衰减

设 Navier-Stokes 方程的解 u 可依特征函数展开：

$$u(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\hat{u}_j(t)w_j(x)\tag{1.15.1}$$

其中$\{w_j(x)\}$为对应于特征值λ_j的正交完备集，

$$\begin{cases} -\Delta w_j + \mathrm{grad}\ r_j = \lambda_j w_j \\ \mathrm{div}\ w_j = 0 \end{cases} \tag{1.15.2}$$

w_j满足如同u的边界条件，r_j对应于压力项。

令$|\cdot|_0$表示向量函数ϕ在Ω上的L^2模

$$|\phi|_0 = \{\int_\Omega |\phi(x)|^2 \mathrm{d}x\}^{\frac{1}{2}}$$

以$\|\cdot\|$表示ϕ的梯度的L^2模。

$$\|\phi\| = |\mathrm{grad}\ \phi|_0 = \{\int_\Omega |\mathrm{grad}\ \phi(x)|^2 \mathrm{d}x\}^{\frac{1}{2}}$$

以R_0表示u的初值$u(x,0)$的L^2模的上界

$$|u(\cdot,0)|_0 \leqslant R_0 \tag{1.15.3}$$

Foias 等在文献[83]中得到如下结果

定理1.15.1 设空间维数为二维，则存在常数k_1仅依赖于ν，$|f|_0$和Ω，和常数t_1，依赖于上述参量和R_0使得

$$|\hat{u}_m(t)| \leqslant k_1\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)\left(1 + \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)\right)^{\frac{1}{2}}, \forall\ m, \forall\ t \geqslant t_1 \tag{1.15.4}$$

其中ν为粘性系数，f为外力项。这里$\lambda_m = k_m^2$，k_m为波数。记$\hat{u}_m(t) = \hat{u}(k_m,t)$，由式(1.15.4)得

$$|\hat{u}(k_m,t)| \leqslant \left(\frac{\kappa_1}{k_m^2}\right)\left(1 + \ln\left(\frac{k_1}{k_m}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

能量谱E的衰减率为

$$E(k,t) \approx k|\tilde{u}(k,t)|^2 \leqslant \left(\frac{\kappa}{k^3}\right)\ln k, t \geqslant t_1$$

除去因子$\ln k$，它和二维 Kraichnan 衰减率一致（文献[84]）。

三维的类似结果也是成立的。设没有奇性发生，$\|u(\cdot,t)\|$保持一致有界：

$$M_1 = \sup_{t \geqslant 0}\|u(\cdot,t)\| < +\infty \tag{1.15.5}$$

类似于式(1.15.4)有

$$|\hat{u}_m(t)| \leqslant \kappa_1\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^{\frac{2}{3}}, \forall m, \forall t \geqslant t_1'$$

因此有

$$|\hat{u}(k_m, t)| \leqslant \frac{x}{k_m^{\frac{4}{3}}}$$

能量谱为

$$E(k,t) \approx k^2 |\hat{u}(k,t)|^2 \leqslant \frac{\kappa}{k^{\frac{2}{3}}}, t \geqslant t_1'$$

如 Grashof 数或 Reynolds 数相当大,则它和 Kolmogorov 衰减率一致。

2. Fourier 系数的指数衰减

设式(1.15.1)可作标准 Fourier 级数展开

$$u(x,t) = \sum_{j \in Z^n} \hat{u}_j(t) e^{ijx} \tag{1.15.6}$$

这里 $j = \{j_1, j_2\}$ 或 $\{j_1, j_2, j_3\}$。设 $\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x = 0$,因而 $\hat{u}_0 = 0$,且

$$\hat{u}_j = \overline{\hat{u}_j}$$

不可压缩条件 div $\boldsymbol{u}=0$,要求

$$j \cdot \hat{u}_j = 0, \quad \forall j \tag{1.15.7}$$

$f(x)$和 压力 p 作 Fourier 级数展开

$$f(x) = \sum_{j \in Z^n} \hat{f}_j e^{ij \cdot x}, \quad p(x,t) = \sum_{j \in Z^n} \hat{p}_j(t) e^{ij \cdot x}$$

则 Navier-Stokes 方程等价于代数微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}_j}{\mathrm{d}t} + 4\pi^2\nu\hat{u}_j + \mathrm{i}\sum_{k,l \in Z^n, k+l=j} (l \cdot \hat{u}_k)\hat{u}_l + \mathrm{i}j\hat{p}_j = \hat{f}_j, \forall j \neq 0$$

由式(1.15.7)得

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}_j}{\mathrm{d}t} + 4\pi^2\nu\hat{u}_j + \sum_{k \in Z^n} (j \cdot \hat{u}_k)\hat{u}_{j-k} + \mathrm{i}j\hat{p}_k = \hat{f}_j, \forall j \neq 0 \tag{1.15.8}$$

对式(1.15.8)和 j 作内积,利用式(1.15.7)可得 $\hat{p}_j$ 的表示

$$\hat{p}_j = -\mathrm{i}\frac{j_k \cdot \hat{f}_j}{|j|^2} - \sum_{k\in Z^n}(j\cdot\hat{u}_k)(j\cdot\hat{u}_{j-k})$$

将 $\hat{p}_j$ 代入式(1.15.8)可得

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}_j}{\mathrm{d}t} + 4\pi^2\nu\,\hat{u}_j + \mathrm{i}\sum_{k\in Z^n}(j\cdot\hat{u}_k)\left\{j\cdot\hat{u}_{j-k} - \frac{j}{|j|}\left(\frac{j}{|j|}\cdot\hat{u}_{j-k}\right)\right\} =$$

$$\hat{f}_j - \frac{j}{|j|}\left(\frac{j}{|j|}\cdot\hat{f}_j\right) \tag{1.15.9}$$

设 $|j|$ 大时,$\hat{f}_j$ 消失,例如

$$\hat{f}_j = 0, |j| > j_0$$

再设 $\hat{f}_j$ 关于 $|j|$ 指数衰减,即存在 $\sigma_1,\sigma_2>0$,使得

$$|\hat{f}_j| \leqslant \sigma_1 \mathrm{e}^{-\sigma_2|j|} \quad \forall\, j$$

Foias 等在文献[85]中证明了:

定理1.15.2 设空间为二维,则存在 常数 k_2、k_3仅依赖于 ν,$|f|_0,\sigma_1,\sigma_2,t_2$依赖上述相同参数和 κ_0,使得

$$|\hat{u}_j(t)| \leqslant \left(\frac{k_2}{|j|}\right)\mathrm{e}^{-k_3|j|}, \forall\, j\neq 0, \forall\, t\geqslant t_2 \tag{1.15.10}$$

当空间为三维时,只要解保持光滑性,则类似结果也是成立的。这些结果和 Kolmogorov 的湍流表述是一致的,式(1.15.10)是和 Kolmogorov 的湍流的耗散表示完全一致的,这个结果比1941年 Kolmogorov 的结果更细致,因为它具体应用于决定流并得到了明显的指数衰减率。同时,它又不如 Kolmogorov 的结果精确,因为常数 k_2,k_3太大。

3. 吸引子的维数

Navier-Stokes 方程可写成泛函形式:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \nu A u + B(u,u) = f \tag{1.15.11}$$

其中 A 为 Stokes 算子,$B(\cdot,\cdot)$为非线性项,f 为外力项,$u=u(t)$

$(=u(\cdot,t))$。考虑依式(1.15.11)的解 $u(t)$ 的线性化算子

$$\Phi \to \nu A\Phi + B(u(t),\Phi) + B(\Phi,u(t))$$

我们需要估计一下对一切可能轨线 $u(t)$ 这些算子有限维投影的迹的时间平均值。对于适当的函数族 Φ_j, $j=1,\cdots,m$(这些函数 $\Phi_j\in D(A^{\frac{1}{2}})$,且在 $L^2(\Omega)^m$ 中正交,$D(A^{\frac{1}{2}})=V$,$\phi\in L^2$,$\|\phi\|=|\nabla\phi|_0<+\infty$)。考虑如下的和

$$\sum_{j=1}^{m}\langle(\nu A\Phi_j + B(u(t),\Phi_j) + B(\Phi_j,u(t)),\Phi)\rangle =$$

$$\sum_{j=1}^{m}\{\nu\|\Phi_j\|^2 + (B(\Phi_j,u(t),\Phi_j)\},$$

设 $q_m(t)$ 为上述和的下界,其中对在吸引子上的一切轨线和一切 Φ_j,令

$$q_m = \liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T q_m(t)\mathrm{d}t$$

证明 m 适当大,$q_m>0$,则得到吸引子的维数 m。设 $l_0=k_0^{-1}$ 的区域 Ω 的标准长度(即为直径或 $|\Omega|^{\frac{1}{n}}$)。Kolmogorov 耗散长度 $l_d=k_d^{-1}$ 定义为

$$l_d=\left(\frac{\Delta^3}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}$$

其中 ε 为能量以 $|\nabla u(x,t)|^2>$ 耗散的平均率。在吸引子 $\mathscr{A}$ 上平均率为

$$\varepsilon=\nu\limsup_{t\to+\infty}\{\sup_{u(0)\in\mathscr{A}}\frac{1}{t}\int_0^t\sup_{x\in\Omega}|\nabla u(\tau,x)|^2\mathrm{d}\tau\}$$

Constantin 等在文献[86]中 给出如下结果:

吸引子 $\mathscr{A}$ 的 Haustorff 或分形维数有上界

$$C\left(\frac{k_d}{k_0}\right)^n (n=3) \tag{1.15.12}$$

其中 C 为一个绝对常数。

如下的附注是引人注目的。设 $\overline{|\nabla v|}$ 表示 $|\nabla v(x)|$ 在 $x\in\Omega$,$v\in\mathscr{A}$ 上的上界。显然

$$\varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon} = \nu(\overline{|\nabla v|})^2,$$

$$k_d \leqslant \overline{k_d} = \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\nu^3}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\overline{|\nabla v|}}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}$$

由式(1.15.12)推出

$$\dim \mathscr{A} \leqslant C l_0^n \left(\frac{\overline{|\nabla v|}}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}n} \quad (n=3) \qquad (1.15.13)$$

长度$\left(\frac{\nu}{\overline{|\nabla v|}}\right)^{\frac{1}{2}}$被 Henshow 等(1991年)和 Bartocelli 等(1990年)称为最小尺度,Constantin,Foias 和 Temam 等在文献[86]中证明了

$$\left(\frac{l_0}{l_d}^2\right) \leqslant G$$

因此

$$\dim \mathscr{A} \leqslant CG \qquad (1.15.14)$$

其中 G 为 Grashof 数

$$G = \frac{L^{\frac{1}{2}n-3}}{\nu^2}\left(\int_\Omega |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

这里 ν 为动力粘性,L 为 Ω 的直径或 $|\Omega|^{\frac{1}{n}}$,$\mathrm{Re}=G^{\frac{1}{2}}$。这个结果改善了 Babin 和 Vishik(1983年),Ladyzhenskaya(1982年,1985年),Foias 和 Temam(1983年)的结果。

对于空间周期情形,这个结果进一步得到改进。Constantin 等在文献[87]中证明了

$$\dim \mathscr{A} \leqslant C\left(\frac{l_0}{l_\eta}\right)^2\left(1+\ln\left(\frac{l_0}{l_\eta}\right)\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (1.15.15)$$

其中 Kraichnan 耗散长度 l_η 取代了 Kolmogorov 耗散长度 l_d。

$$l_\eta = \left(\frac{\nu_3}{\eta}\right)^{\frac{1}{6}}$$

η 为 $\nu|\mathrm{curl\ curl}\ u(x,t)|^2$在吸引子 $\mathscr{A}$ 上的时空平均,即

$$\eta = \nu \limsup_{t\to\infty} \sup_{u(0)\in\mathscr{A}} \int_0^t \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |\Delta u(x,s)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s$$

同时证明了 $\frac{l_0}{l_\eta} \leqslant G^{\frac{1}{3}}$。因此由式(1.15.15)有

$$\dim\mathscr{A} \leqslant CG^{\frac{2}{3}}(1 + \ln G)^{\frac{1}{3}} \tag{1.15.16}$$

式(1.15.15)和式(1.15.16)的简化证明出现于 Doering 和 Gibbon(1991年)和 Ghidagila, Temam(1990年)的文章中。

4. 吸引子的最佳维数估计

Babin 和 Vishik 在文献[88]中考虑在一个细长区域 $\Omega=(0,\frac{2\pi L}{\alpha})\times(0,2\pi L)$ 空间周期流的状况。首先, Ghidaglia 和 Temam (1990年)证明了:

$$\dim\mathscr{A} \leqslant C\left(1 + \frac{G}{\alpha}^{\frac{2}{3}}\right)\left(\ln\left(1 + \frac{g}{\alpha^{\frac{1}{4}}}\right)\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \alpha \neq 1 \tag{1.15.17}$$

其中 C 为绝对常数。当 $\alpha\to 0$ 时有估计

$$\dim\mathscr{A} \leqslant C\left(1 + \frac{G}{\alpha^{\frac{1}{2}}}\right) \tag{1.15.18}$$

Babin-Vishik 建立了 $\dim\mathscr{A}$ 的下界估计。设外力 $f(x_1,x_2)$ 具有形式

$$f(x_1,x_2) = (g(x_2),0) \tag{1.15.19}$$

$$\int_0^{2\pi L} g(x_2)\mathrm{d}x_2 = 0$$

设 Grashof 数 G

$$G = \frac{\overline{G}}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \tag{1.15.20}$$

$$\overline{G} = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\nu^2}\left(\int_0^{2\pi L} g(y)^2\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}$$

容易看到 Navier-Stokes 方程具有定常解 $u_s, p_s, p_s = 0, u_s = (U(x_2),0)$,

$$-\nu U''(x_2) = g(x_2)$$

$$U(x_2) = -\frac{1}{\nu}\int_0^{x_2}(x_2 - s)\, g(s)\mathrm{d}s - \frac{x_2}{2\pi L\nu}\int_0^{2\pi L} sg(s)\mathrm{d}s + \text{const}$$

选取常数使得

$$\int_0^{2\pi L} U(x_2)\mathrm{d}x_2 = 0$$

对于小的 α，区域 Ω 变成细长，定常解变成不稳定。这时知道整体吸引子 $\mathscr{A}$ 含有定常解 u_s 和它的不稳定流形 $\mathscr{M}_{uns}$。因此

$$\dim\mathscr{A} \geqslant \dim\mathscr{M}_{uns}$$

利用 Orr-Sommerfeld 方程的性质可知存在至少 $\frac{\kappa}{\alpha}$ 个不稳定模，其中 κ 依赖于 $\overline{G}$

$$\dim\mathscr{A} \geqslant \frac{\kappa(\overline{G})}{\alpha} \tag{1.15.21}$$

Ghidaglia 和 Temam（1990年）在文献[90]中，推广这些结果到三维情况。

设 $\Omega = \left(0, \frac{2\pi L}{\alpha}\right) \times (0, 2\pi L) \times \left(0, \frac{2\pi L}{\beta}\right)$，$0 < \beta \leqslant \alpha$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (g(x_2), 0, 0)$$

当 α 较小时，定常解 u_s 是不稳定流形

$$\dim\mathscr{A} \geqslant \dim\mathscr{M}_{uns} \geqslant \frac{\kappa(\overline{G})}{\alpha\beta}$$

另一方面，可估计

$$\dim\mathscr{M} \leqslant C\,\frac{(1 + \mathrm{Re}^3)}{\alpha\beta}$$

其中

$$\mathrm{Re} = \frac{L}{2}\sup_{u}\ \limsup_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t \sup_{x\in\Omega}|u(x,s)|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

因此

$$\dim\mathscr{M} \approx \frac{\kappa}{\alpha\beta}$$

这是不变集合 $\mathscr{M}$ 的维数的最佳估计。

第二章 惯性流形

惯性流形的概念首先是由 Foias C,Sell G R 和 Temam R[91] 于 1985 年提出的,它是一个至少为 Lip 连续的有限维流形,在相空间是正不变的,指数地逼近轨线,且含有整体吸引子。

在文献[91]中研究的是一般的非线性发展方程的初值问题

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = f(u)$$

$$u(0) = u_0$$

其中非线性半群 $S(t)$ 定义在 Hibert 空间上,为自共轭算子。Chow S N 和 K. Lu 1988 年在文献[92]中考虑一般方程在 Banach 空间上,非线性项 $f \in C^1$,且是有界的,但指数吸引于流形未被证明一致在相空间的有界子集上。Mallet-Paret,Sell 1988 年在文献[93]中引入空间平均的原则,当谱间隙条件不完全满足时,证明了反应扩散方程惯性流形的存在性。1988 年 Constantin 等在文献[94]中,在 Hilbert 空间上用"spectral barries"的概念企图精确化谱间隙条件。1990 年 Bernal 在文献[95]中考虑 Banach 空间的情形,但证明更加复杂,谱间隙条件更为苛刻。1991 年 Demengel,Ghidaglia 在文献[96]中,在 Hillert 空间上当 A 为自共轭算子时,给出 f 为无界时惯性流形存在性的第一个证明。1993 年 Debussche,Temam 在文献[97]中给出了 f 实质上为无界的另一种证明。1990 年 Debussche 在文献[98]中对于一般 Banach 空间,$f \in C^1$,运用 Scaker 方程给予不变流形存在性的另一种证明。1991 年,Fabes,Luskin,Sell 在文献[99]中用椭圆型正则化方法构造了惯性流形。对于 Hilbert 空间上 A 为非自共轭算子,惯性流形存在性的证明见文献[100](Debussche,Temam,1991 年)和文献[101]

(Sell,You,1992 年)。在 Hilbert 空间中构造惯性流形,关于强挤压性和锥条件的研究,在文献[102](Robinson,1993 年)中有很好的工作。1978 年,Conway,Hoff,Smoller 在文献[103];1981 年,Mane 在文献[104]和 1983 年,Mora 在文献[105]中对于反应扩散型方程,抛物型方程隐含了惯性流形存在性的证明。

有许多工作是把一般理论应用于某些具体的方程,特别是估计惯性流形的最低维数,例如,KS 方程,(1988 年,Foias 等,文献[106];1994 年,Temam,Wang,文献[107])及 Cahn Hilliard 方程,非局部 Burgers 方程和某些反应扩散方程(1988 年,Constantin 等,文献[94]);可压缩气体动力学模型(1989 年,Nicolaenko,文献[108]);一维反应扩散方程(显式构造惯性流形)(1989 年,Jolly,文献[109]);Swift-Hohenberg 对流模型(1990 年,Jaboada,文献[110]);Ginzburg-Landau 方程(1991 年,Demengel,Ghidaglia,文献[96]);相流方程(1992 年,Bates,Zheng,文献[111])等。

许多存在性的结果依赖于谱间隙条件的限制,但这个条件是很苛刻的,例如 Navier-Stokes 方程就不满足。1992 年,Kwak 在文献[112]中指出对于 2D Navier-Stoles 方程局周期边界条件,且沿两个方向周期之比为有理数时,有可能克服这个困难。他的概念是将原来方程通过非线性因变量的变换,变为一组反应扩散方程组,这个方程组满足谱间隙条件,并且有如同原来的 NS 方程相同的渐近性质。显然,反应扩散方程组的惯性流形没有证明横截于流形,因此 NS 方程轨线的指数吸引于有限维不变流形,仍是一个悬而未决的问题。

惯性流形的新进展主要表现在:

(1)方程的广泛性,谱间隙条件的精确性,惯性流形的完全渐近性;

(2)连续不变叶片(foliation)的存在性,完全轨线的增长特征:$u(t)=O(e^{-\sigma t}),\sigma>0,t\to-\infty$;

(3)C^1 正则性和法向双曲性(normal hyperbolicity);

(4)$C^{m,\alpha}$正则性。

这些方面可参见1996年，Rasa，Temam的文献[124]，1995年郭在文献[125，126]中证明广义Kuramoto-Sivashinsky型惯性流形的存在性，1996年高、郭在文献[127]中证明了一维广义Ginzburg-Landau方程有限维惯性流形的存在性。其余可见文献[113～121]。

2.1 一类非线性演化方程的惯性流形

在Hilbert空间H上给定内积$(\cdot,\cdot)$。非线性演化方程具形式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au+R(u)=0 \tag{2.1.1}$$

其中

$$R(u)=B(u,u)+Cu-f \tag{2.1.2}$$

A是H上线性无界自共轭算子，$D(A)$在H中稠。设A是正的，即

$$(Av,v)>0,\forall\, v\in D(A),v\neq 0$$

A^{-1}是紧的，映射$u\to Au$是从$D(A)$到H的同构。A^s表示A的s（$s\in\mathbf{R}$）次幂。空间$V_{2s}=D(A^s)$是Hilbert空间，具有内积

$$(u,v)_{2s}=(A^s u,A^s v),\forall\, u,v\in D(A^s)$$

$u\in V_s$，令$|u|_s=(u,u)_s^{\frac{1}{2}}$。

因A^{-1}是紧的和自共轭的，则存在H的正交基$\{w_j\}$，由A的特征向量组成，

$$Aw_j=\lambda_j w_j \tag{2.1.3}$$

特征值满足

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots,\lambda_j\to+\infty,j\to\infty \tag{2.1.4}$$

从式(2.1.3)、(2.1.4)易得

$$|A^{\frac{1}{2}}u|\geqslant\lambda_1^{\frac{1}{2}}|u|,u\in D(A^{\frac{1}{2}}) \tag{2.1.5}$$

$$|A^{p-\frac{1}{2}}u| \geqslant \lambda_1^{\frac{1}{2}}|A^p u|, \forall u \in D(A^{p-\frac{1}{2}}), \forall p \quad (2.1.6)$$

令 P_N 是 H 在$\{w_1,w_2,\cdots,w_N\}$所成子空间的正交投影($N=1,2,\cdots$),$Q_N=I-P_N$。在式(2.1.2)中的非线性项 $R(u)$,$B(u,u)$为双线性算子 $D(A)\times D(A)\to H$,C 是 $D(A)$到 H 的线性算子,$f\in D(A^{\frac{1}{2}})$。进一步,设

$$(B(u,v),v) = 0, \forall\ u,v \in D(A) \quad (2.1.7)$$

$$|B(u,v)| \leqslant C_1|u|^{\frac{1}{2}}|A^{\frac{1}{2}}u|^{\frac{1}{2}}|A^{\frac{1}{2}}v|^{\frac{1}{2}}|Av|^{\frac{1}{2}}|, \forall u,v \in D(A) \quad (2.1.8)$$

$$|Cu| \leqslant C_2|A^{\frac{1}{2}}u|^{\frac{1}{2}}|Au|^{\frac{1}{2}}, \forall\ u \in D(A) \quad (2.1.9)$$

其中,C_1,C_2 和下面的 $C_i(i=3,4)$均为正常数。对 B,C 附加如下连续性质

$$|A^{\frac{1}{2}}B(u,v)| \leqslant C_3|Au||Av|, \forall u,v \in D(A) \quad (2.1.10)$$

$$|A^{\frac{1}{2}}Cu| \leqslant C_4|Au|, \forall u \in D(A) \quad (2.1.11)$$

最后,设 $A+C$ 是正的,即有

$$((A+C)u,u) \geqslant \alpha|A^{\frac{1}{2}}u|^2, \forall u \in D(A), \alpha > 0 \quad (2.1.12)$$

考虑式(2.1.1)的初值问题,即式(2.1.1)满足初始条件

$$u(0) = u_0 \in H \quad (2.1.13)$$

设问题(2.1.11)、(2.1.13)具有唯一解 $S(t)u_0$,$\forall t\in\mathbf{R}^+$。$S(t)u_0\in D(A)$,$\forall t\in\mathbf{R}^+$。映射 $S(t)$具有通常的半群性质。

现对方程(2.1.1)的解作一致先验估计。为此,需要如下不等式和引理:对于 $\beta>0$,$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,$1<p,q<+\infty$,有

$$\Sigma|x_iy_i| = \Sigma|\beta x_i||\beta^{-1}y_i| \leqslant$$

$$\frac{\beta^p}{p}(\Sigma|x_i|^p)+\frac{\beta-q}{q}(\Sigma|y_i|^q) \tag{2.1.14}$$

引理 2.1.1 设 $g(t),h(t),y(t)$是三个正的可积函数,$t_0\leqslant t<\infty$,它满足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\leqslant gy+h,\forall\ t\geqslant t_0 \tag{2.1.15}$$

且

$$\int_t^{t+1}g(s)\mathrm{d}s\leqslant\alpha_1,\int_t^{t+1}h(s)\mathrm{d}s\leqslant\alpha_2,$$

$$\int_t^{t+1}y(s)\mathrm{d}s\leqslant\alpha_3,\forall\ t\geqslant t_0 \tag{2.1.16}$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为正常数.则有

$$y(t+1)\leqslant(\alpha_3+\alpha_2)\exp(\alpha_1),\forall\ t\geqslant t_0 \tag{2.1.17}$$

式(2.1.1)和 u 作内积,利用式(2.1.7)、(2.1.12)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|^2+\alpha|A^{\frac{1}{2}}u|^2\leqslant|(f,u)|\leqslant\lambda_1^{-\frac{1}{2}}|f||A^{\frac{1}{2}}u|\leqslant$$

$$\frac{\alpha}{2}|A^{\frac{1}{2}}u|^2+\frac{1}{2\lambda_1\alpha}|f|^2$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|^2+\alpha\lambda_1|u|^2\leqslant\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|^2+\alpha|A^{\frac{1}{2}}u|^2\leqslant\frac{1}{\alpha\lambda_1}|f|^2 \tag{2.1.18}$$

式(2.1.1)和 Δu 作内积,由式(2.1.8)、(2.1.9)和式(2.1.14),有

$$|B(u,u)+(u,Au)|\leqslant$$

$$C|u|^{\frac{1}{2}}|A^{\frac{1}{2}}u||Au|^{\frac{3}{2}}+C_2|A^{\frac{1}{2}}u|^{\frac{1}{2}}|Au|^{\frac{3}{2}}\leqslant$$

$$54(C_1^4|u|^2|A^{\frac{1}{2}}u|^4+C_2^4|A^{\frac{1}{2}}u|^2)+\frac{1}{4}|Au|^2$$

类似地,有 $|(f,Au)|\leqslant|f||Au|\leqslant|f|^2+\frac{1}{4}|Au|^2$。由此可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A^{\frac{1}{2}}u|^2+\lambda_1|A^{\frac{1}{2}}u|^2\leqslant\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A^{\frac{1}{2}}u|^2+|Au|^2\leqslant$$

$$C_6|u|^2|A^{\frac{1}{2}}u|^4+C_7|A^{\frac{1}{2}}u|^2+2|f|^2 \tag{2.1.19}$$

式(2.1.1)与 A^2u 作内积，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|Au|^2+|A^{\frac{3}{2}}u|^2\leqslant$$

$$|B(u,u)+(Cu,A^2u)|+|(f,A^2u)|\leqslant$$

$$|(A^{\frac{1}{2}}(B(u,u)+Cu),A^{\frac{3}{2}}u)|-(A^{\frac{1}{2}}f,A^{\frac{3}{2}}u)|\leqslant$$

$$C_3|Au|^2|A^{\frac{3}{2}}u|+C_4|Au||A^{\frac{3}{2}}u|+|A^{\frac{1}{2}}f||A^{\frac{3}{2}}u|\leqslant$$

$$\frac{1}{2}C_8|Au|^4+\frac{1}{2}C_9|Au|^2+\frac{3}{2}|A^{\frac{1}{2}}f|^2+\frac{1}{2}|A^{\frac{3}{2}}u|^2$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|Au|^2+\lambda_1|Au|^2\leqslant\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|Au|^2+|A^{\frac{3}{2}}u|^2\leqslant$$

$$C_8|Au|^4+C_9|Au|^2+3|A^{\frac{1}{2}}f|^2 \tag{2.1.20}$$

将式(2.1.15)应用于式(2.1.18)，可得 $u(t)=S(t)u_0$，

$$|u(t)|^2\leqslant|u(0)|^2\exp(-\alpha\lambda_1t)+\rho_0^2(1-\exp(-\alpha\lambda_1t)) \tag{2.1.21}$$

其中 $\rho_0=\frac{1}{2\lambda_1}|f|$。因此 $|u(t)|$ 对 t 一致有界，有

$$\limsup_{t\to\infty}|u(t)|^2\leqslant\rho_0^2 \tag{2.1.22}$$

再从式(2.1.18)，有 $\int_t^{t+1}|A^{\frac{1}{2}}u|^2\mathrm{d}s$ 是一致有界的。由式(2.1.19)，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A^{\frac{1}{2}}u|^2\leqslant C_{10}|A^{\frac{1}{2}}u|^4+(C_7-\lambda_1)|A^{\frac{1}{2}}u|^2+2|f|^2,$$

其中 $C_{10}=C_6b_0^2$，$|u(t)|^2\leqslant b_0^2,t\geqslant0$。则由引理 2.1.1，令

$$g=C_{10}|A^{\frac{1}{2}}u|^2,y=|A^{\frac{1}{2}}u|^2,$$

$$h = (C_7 - \lambda_1)|A^{\frac{1}{2}}u|^2 + 2|f|^2$$

可得 $|A^{\frac{1}{2}}u|^2$ 在 H 上一致有界。由式(2.1.19)可知 $\int_t^{t+1}|Au(s)|^2\mathrm{d}s$ 一致有界，再从式(2.1.20)可得 $|Au(t)|^2$ 和 $\int_t^{t+1}|A^{\frac{3}{2}}u(s)|^2\mathrm{d}s$ 对 t 一致有界，因而

$$\limsup_{t\to+\infty}|A^{\frac{1}{2}}u(t)|^2 \leqslant \rho_1^2 \tag{2.1.23}$$

$$\limsup_{t\to+\infty}|Au(t)|^2 \leqslant \rho_2^2 \tag{2.1.24}$$

从式(2.1.22)、(2.1.23)、(2.1.24)可知：式(2.1.1)的任何解在某个时间之后($t\geqslant t_0>0$)分别进入球

$$B_0 = \{x \in H, |x| \leqslant 2\rho_0\}$$

$$B_1 = \{x \in D(A^{\frac{1}{2}}), |A^{\frac{1}{2}}x| \leqslant 2\rho_1\}$$

$$B_2 = \{x \in D(A), |Ax| \leqslant 2\rho_2\}$$

中，且 B_2 的 ω 极限集 $\mathscr{A}$，

$$\mathscr{A} = \omega(B_2) = \bigcap_{s\geqslant 0}\mathrm{Cl}(\bigcap_{t\geqslant s}S(t)B_2)$$

是式(2.1.1)的整体吸引子，闭包 Cl 取在 H 上，且有

$$\mathscr{A} \subseteq B_2 \cap B_1 \cap B_0$$

我们考虑式(2.1.1)的截断方程的惯性流形。设 $\theta(s)$ 为 $\mathbf{R}_+$ 到 $[0,1]$ 的光滑函数：$\theta(s)=1, 0\leqslant s\leqslant 1$；$\theta(s)=0, s\geqslant 2$，$|\theta'(s)|\leqslant 2, s\geqslant 0$。固定 $\rho=2\rho_2$，定义

$$\theta_\rho(s) = \theta(\frac{s}{\rho}), s \geqslant 0$$

则式(2.1.1)的截断方程为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au + \theta_\rho(|Au|)R(u) = 0 \tag{2.1.25}$$

式(2.1.25)具初值 $u(0)=u_0\in H$ 的解的存在性、唯一性的证明是直接的。显然，当 $|Au|\leqslant\rho$ 时，$\theta_s(|Au|)=1$。式(2.1.24)和式(2.1.1)是相合的。当 $|Au|\geqslant 2\rho$ 时，$\theta_\rho(|Au|)=0$。作式(2.1.24)

与 A^2u 的内积，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|Au|^2+\lambda_1|Au|^2\leqslant\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|Au|^2+|A^{\frac{3}{2}}u|^2\leqslant 0$$

因而轨线 $u(t)$ 将在 $D(A)$ 中以指数收敛于半径 $\rho_3\geqslant 2\rho$ 的球中。另外，$R(u)$ 对 u 是局部 Lip 连续的。而 $F(u)=\theta_\rho(|u|)R(u)$ 是整体 Lip. 连续。即存在 K，使

$$|F(u)-F(v)|\leqslant K|u-v|,\forall u,v\in H \qquad (2.1.26)$$

定义 2.1.1 半群算子 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的惯性流形，是一个有限维的光滑流形 $\mu\in H$（起码是 Lip.），它满足

(i) μ 是不变的。即有

$$S(t)\mu\subset\mu \qquad (2.1.27)$$

(ii) μ 指数地吸引(2.1.25)方程的所有解。即存在常数 $k_1>0$，$k_2>0$，对于 $u_0\in H$，有

$$\mathrm{dist}(S(t)u_0,\mu)\leqslant k_1\mathrm{e}^{-k_2t},\forall t\geqslant 0 \qquad (2.1.28)$$

(iii) 吸引子 $\mathscr{A}$ 在 μ 上。

现在要构造出惯性流形，从而证明惯性流形的存在性。设 P_N 是在 H 中 N 维的正交投影，$Q_N=I-P_N$。并记 $P=P_N$，$Q=Q_N$。设 $u(t)$ 是式(2.1.25)的解。令 $p(t)=Pu$，$q(t)=Qu$，则 $p(t)$，$q(t)$ 在 PH 和 QH 上满足：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+Ap+PF(u)=0 \qquad (2.1.29)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+Aq+QF(u)=0 \qquad (2.1.30)$$

其中 $F(u)=\theta_\rho(|Au|)R(u)$。且 $u=p+q$。我们寻求惯性流形 μ，它是由 Lip. 函数 $\Phi:PD(A)\to QD(A)$ 的图构造得到的。即 $\mu=\mathrm{Graph}\Phi$。函数 Φ 作为一个算子，由函数类 $\mathscr{F}_{b,l}$ 上的不动点得到。其中 $\mathscr{F}_{b,l}$ 是一类函数 $\Phi:PD(A)\to QD(A)$，它满足

$$|A\Phi(p)|\leqslant b,\forall p\in PD(A) \qquad (2.1.31)$$

$$|A\Phi(p_1)-A\Phi(p_2)|\leqslant l|Ap_1-Ap_2|,\forall p_1,p_2\in PD(A) \qquad (2.1.32)$$

$$\operatorname{supp}\Phi\subset\{p\in PD(A)\mid |Ap|\leqslant 4\rho\}$$

其中 $b>0, l>0$。当 $p=p(t), q=\Phi(p(t))$ 满足式(2.1.29)、(2.1.30)时，$u=p(t)+\Phi(p(t))$ 为(2.1.25)的解。设 Φ 在 $\mathscr{F}_{b,l}$ 中给定，$p_0\in PD(A)$，则

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+Ap+PF(p+\Phi(p))=0, p(0)=p_0 \qquad (2.1.33)$$

的解 $p=p(t;p_0,\Phi)$ 是唯一存在的。这是由于 $\sigma\to\theta_\rho R(\sigma+\Phi(\sigma))$ 是 Lip 连续的。因 $p=p(t;p_0,\Phi), \forall t\in\mathbf{R}$。类似于式(2.1.30)，

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+Aq-QF(p+\Phi(p))=0, p(0)=p_0 \qquad (2.1.34)$$

由于 $QF(p+\Phi(p))$ 是有界的：$R\to H$，因此式(2.1.34)存在唯一的当 $t\to\infty$ 时是有界的解 $q(t)$。由此可得

$$q(0)=-\int_{\infty}^{0}e^{\tau AQ}QF(p+\Phi(p))\mathrm{d}\tau \qquad (2.1.35)$$

其中 $p=p(\tau)=p(\tau,\Phi,p_0)$。$q(0)$ 依赖于 $\Phi\in\mathscr{F}_{b,l}$ 和 $p\in PD(A)$。$q(0)=q(0,p_0,\Phi)$。函数

$$p_0\in PD(A)\to q(0;p_0,\Phi)\in QD(A)$$

把 $PD(A)$ 映射到 $QD(A)$，记为 $\mathscr{F}\Phi$。因此

$$\mathscr{F}\Phi(p_0)=-\int_{\infty}^{0}\mathrm{e}^{\tau AQ}QF(u)\mathrm{d}\tau \qquad (2.1.36)$$

其中 $u=u(\tau)=p(\tau,\Phi,p_0)+\Phi(p(\tau;\Phi,p_0))$。因 $q(0)=\Phi(p_0)$，于是寻求关于 N,b,l 的条件，使

(i) $\mathscr{F}$ 映射 $\mathscr{F}_{b,l}$ 到自身；

(ii) $\mathscr{F}$ 在 $\mathscr{F}_{b,l}$ 上是压缩的。

现在考虑函数 $\Phi: PD(A)\to QD(A)$ $(P=P_N, Q=Q_N=I-P_N)$。$\Phi\in\mathscr{F}_{b,l}$，即满足式(2.1.31)～(2.1.33)。

引入距离

$$\|\Phi-\Psi\|=\sup_{p\in PD(A)}|A\Phi(p)-A\Psi(p)| \qquad (2.1.37)$$

则 $\mathscr{F}_{b,l}$ 是一个完备的度量空间。对于 $\Phi\in\mathscr{F}_{b,l}$，映射 $\mathscr{F}$ 在 $PD(A)$

上定义为

$$\mathscr{F}\Phi(p_0) = -\int_{-\infty}^{0} e^{\tau AQ} QF(u)\mathrm{d}\tau, p_0 \in PD(A) \quad (2.1.38)$$

其中 $u(\tau) = p(\tau;\Phi,p_0) + \Phi(p(\tau;\Phi,p_0))$，$p(\tau;\Phi,p_0)$是式(2.1.29)满足 $p(0;\Phi,p_0) = p_0$ 的解。以下我们对算子 $\mathscr{F}$ 的性质进行研究。

引理 2.1.2 设 $\alpha>0$ 和 $\tau<0$，算子$(AQ)^\alpha e^{\tau AQ}$在 QH 上是线性、连续的，它在 $\mathscr{L}(QH)$上的模(即$|(AQ)^\alpha e^{\tau AQ}|_{0p}$)是囿于

$$\begin{aligned}&K_3|\tau|^{-\alpha}, \text{当 } -\alpha\lambda_{N+1}^{-1} \leqslant \tau < 0 \text{ 时};\\ &\lambda_{N+1}^{\alpha} e^{\tau\lambda_{N+1}}, \text{当 } -\infty < \tau \leqslant -\alpha\lambda_{N+1}^{-1} \text{ 时}\end{aligned} \quad (2.1.39)$$

证明 设 $v = \sum_{j=N+1}^{\infty} b_j w_j$ 是 QH 上的一个元素，则

$$\begin{aligned}|(AQ)^\alpha e^{\tau AQ} v|^2 = \sum_{j=N+1}^{\infty} (\lambda_j^\alpha e^{\tau\lambda_j})^2 b_j^2 \leqslant \\ \sup_{\lambda\geqslant\lambda_{N+1}} (\lambda^\alpha e^{\tau\lambda})^2 \Sigma b_j^2 = \\ \sup_{\lambda\geqslant\lambda_{N+1}} (\lambda^\alpha e^{\tau\lambda})^2 |v|^2\end{aligned}$$

因此

$$|(AQ)^\alpha e^{\tau AQ}|_{0p} \leqslant \sup_{\lambda\geqslant\lambda_{N-1}} \lambda^\alpha e^{\tau\lambda}$$

初等计算表明

$$\sup_{\lambda\geqslant\lambda_{N+1}} (\lambda^\alpha e^{\tau A\lambda}) = \begin{cases} |\tau|^{-\alpha}(\alpha e^{-1})^\alpha, \text{当 } -\alpha\lambda_{N+1}^{-1} \leqslant \tau < 0 \text{ 时}, \\ \lambda_{N+1}^{\alpha} e^{\tau\lambda N+1}, \text{当 } \tau \leqslant -\alpha\lambda_{N+1}^{-1} \text{ 时。} \end{cases}$$

我们得到式(2.1.39)，其中 $K_3 = K_3(\alpha) = (\alpha e^{-1})^\alpha$。

作为式(2.1.39)的直接推论，有

$$\int_{-\infty}^{0} |(AQ)^\alpha e^{\tau AQ}|_{0p}\mathrm{d}\tau \leqslant (1-\alpha)^{-1} e^\alpha \lambda_{N+1}^{\alpha-1} \quad (0<\alpha<1)$$

(2.1.40)

从式(2.1.10)、(2.1.11)可得

$$|(AQ)^{\frac{1}{2}} R(u)| \leqslant |A^{\frac{1}{2}} B(u,u)| + |A^{\frac{1}{2}} Cu| + |A^{\frac{1}{2}} f| \leqslant$$

$$C_3|Au|^2 + C_4|Au| + |A^{\frac{1}{2}}f|$$

当$|Au|>2\rho$时，$\theta_\rho(|Au|)=0$，有

$$|(AQ)^{\frac{1}{2}}F(u)| \leqslant K_4 \tag{2.1.41}$$

其中$K_4=4C_3\rho^2+2C_4\rho+|A^{\frac{1}{2}}f|$，$F(u)$由式(2.1.30)所决定。

引理 2.1.3 设$p_0\in PD(A)$，$\mathscr{F}\Phi(p_0)\in QD(A)$，则

$$|A\mathscr{F}\Phi(p_0)| \leqslant K_5\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} \tag{2.1.42}$$

$$|A^{\frac{5}{4}}\mathscr{F}\Phi(p_0)| \leqslant K_6\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{4}} \tag{2.1.43}$$

其中K_5，K_6是适当的常数，它与p_0，Φ无关。

证明 因$Qe^{\tau AQ}=e^{\tau AQ}$，易见$\mathscr{F}\Phi(p_0)\in QD(A)$，

$$|A\mathscr{F}\Phi(p_0)| \leqslant \int_{-\infty}^{0}|AQe^{\tau AQ}F(u)|d\tau \leqslant$$

$$\int_{-\infty}^{0}|(AQ)^{\frac{1}{2}}e^{\tau AQ}|_{0p}|(AQ)^{\frac{1}{2}}F(u)|d\tau,$$

$$|A^{\frac{5}{4}}\mathscr{F}\Phi(p_0)| \leqslant \int_{-\infty}^{0}|(AQ)^{\frac{5}{4}}e^{\tau AQ}F(u)|d\tau \leqslant$$

$$\int_{-\infty}^{0}|(AQ)^{\frac{3}{4}}e^{\tau AQ}|_{0p}\ (AQ)^{\frac{1}{2}}F(u)|d\tau$$

不等式(2.1.43)、(2.1.42)可从式(2.1.40)、(2.1.41)得到。现取

$$b = K_5\lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}} \tag{2.1.44}$$

则对$\Phi\in\mathscr{F}_{b,l}$，类似于式(2.1.31)，$\mathscr{F}\Phi$满足

$$|A\mathscr{F}\Phi(p_0)| \leqslant b, \forall p_0 \in PD(A) \tag{2.1.45}$$

由于式(2.1.43)，$\mathscr{F}\Phi$是在$D(A^{\frac{5}{4}})$中的有界集。因$A^{-\frac{1}{4}}$是紧的，因此，$\mathscr{F}\Phi$的值域是$QD(A)$的一个紧子集。它不依赖于Φ

现考虑$\mathscr{F}\Phi$的支集性质、连续性质。

引理 2.1.4 对每个$\Phi\in\mathscr{F}_{b,l}$，$\mathscr{F}\Phi$的支集包含在$\{p\in PD(A);|Ap|\leqslant 4\rho\}$中。

证明 $u=p+\Phi(p)$。如$|Ap|>2\rho$，则

$$|Au|=(|Ap|^2+|A\Phi(p)|^2)^{\frac{1}{2}}\geqslant|Ap|>2\rho$$

因此 $\theta_\rho(|Au|)=0$。

现设 $|Ap_0|>4\rho$,则在 t 的某个区间上 $|Ap(t)|>2\rho$。于是,方程(2.1.28)为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+Ap=0$$

由此推出

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|Ap|^2+\lambda_1|Ap|^2\leqslant\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|Ap|^2}{\mathrm{d}t}+|A^{\frac{3}{2}}p|^2=0$$

因此,对 $\tau<0$,有

$$2\rho<|Ap(0)|\leqslant|Ap(\tau)|\exp(\lambda_1\tau)\leqslant|Ap(\tau)|$$

因而 $\theta_\rho(|Au(\tau)|)=0,\forall\tau<0$。由式(2.1.38),有

$$\mathscr{F}\Phi(p_0)=0\quad\forall\Phi\in\mathscr{F}_{b,l}$$

先证非线性 $F(u)$的 Lip 性质。

引理 2.1.5 设 $p_1,p_2\in PD(A),\Phi_1,\Phi_2\in\mathscr{F}_{b,l},u_i=p_i+\Phi_i(p_i)$,则

$$\begin{aligned}&|A^{\frac{1}{2}}F(u_1)-A^{\frac{1}{2}}F(u_2)|\leqslant\\&K_7[(1+l)|Ap_1-Ap_2|+\|\Phi_1-\Phi_2\|]\end{aligned}\quad(2.1.46)$$

其中常数 K_7 不依赖于 p_i 或 Φ_i(其中 $i=1,2$)

证明 首先,注意到从式(2.1.10)和式(2.1.11)推出

$$\begin{aligned}&|A^{\frac{1}{2}}R(u_1)-A^{\frac{1}{2}}R(u_2)|\leqslant|A^{\frac{1}{2}}[B(u_1,u_1)-B(u_1,u_2)+\\&B(u_1,u_2)-B(u_2,u_2)]|+|A^{\frac{1}{2}}C(u_1-u_2)|\leqslant\\&C_3(|Au_1|+|Au_2|)|Au_1-Au_2+C_4|Au_1-Au_2|\end{aligned}$$

和

$$A^{\frac{1}{2}}R(u_1)|\leqslant C_3|Au_1|^2+C_4|Au_1|^2+|A^{\frac{1}{2}}f|$$

定义 G 如下:

$$\begin{aligned}G&=A^{\frac{1}{2}}F(u_1)-A^{\frac{1}{2}}F(u_2)=\\&\theta_\rho(|Au_1|)A^{\frac{1}{2}}R(u_1)-\theta_\rho(|Au_2|)A^{\frac{1}{2}}R(u_2)\end{aligned}$$

分三种情况讨论：

(i) $2\rho\leqslant|Au_1|, 2\rho\leqslant|Au_2|$；

(ii) $|Au_1|<2\rho\leqslant|Au_2|$ 或 $|Au_2|<2\rho\leqslant|Au_1|$；

(iii) $|Au_1|\leqslant2\rho, |Au_2|\leqslant2\rho$。

利用当 $|Au|\geqslant2\rho$ 时 $\theta_\rho(|Au_1|)=0$ 和 $|\theta'|\leqslant2\rho^{-1}$，我们得到：

(i) $G=0$；

(ii) $$|G| = |\theta_\rho(|Au|)A^{\frac{1}{2}}R(u)| =$$

$$|\theta_\rho(|Au_1|)A^{\frac{1}{2}}R(u_1) - \theta_\rho(|Au_2|)A^{\frac{1}{2}}R(u_1)| \leqslant$$

$$|\theta_\rho(|Au_1|) - |\theta_\rho(|Au_2|)||A^{\frac{1}{2}}R(u_1)| \leqslant$$

$$2\rho^{-1}||Au_1| - |Au_2||(C_3|Au_1|^2 + C_4|Au_2|^2 + |A^{\frac{1}{2}}f|) +$$

$$[C_3(|Au_1| + |Au_2|) + C_4]|Au_1 - Au_2|$$

因此

$$|A^{\frac{1}{2}}F(u_1) - A^{\frac{1}{2}}F(u_2)| \leqslant K_7|Au_1 - Au_2| \quad (2.1.47)$$

其中 $K_7=2\rho^{-1}(C_34\rho^2+C_42\rho+|A^{\frac{1}{2}}f|)+C_34\rho+C_4$。因

$u_1-u_2=p_1-p_2+(\Phi_1(p_1)-\Phi_1(p_2))+(\Phi_1(p_2)-\Phi_2(p_2))$，有 $|Au_1-Au_2|\leqslant(1+l)|Ap_1-Ap_2|+\|\Phi_1-\Phi_2\|$。联合式(2.1.47)，即得式(2.1.46)。

现在来证明：在适当假设之下，$\mathscr{T}$ 是从 $\mathscr{F}_{b,l}$ 到 $\mathscr{F}_{b,l}$ 的 Lip 映射，且是严格压缩的。

首先，设 Φ 是固定的，$p_{01}, p_{02}\in PD(A)$，$p=p_1(t)$，$p=p_2(t)$ 是式(2.1.28)满足初始条件 $p_i(0)=p_{0i}$ 的解 $(i=1,2)$。

令 $\Delta=p_1-p_2$，则 Δ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}t} + A\Delta + PF(u_1) - PF(u_2) = 0 \qquad (2.1.48)$$

其中 $u_i=p_i+\Phi(p_i), i=1,2$。作式(2.1.48)与 $A^2\Delta$ 的内积，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A\Delta|^2 + |A^{\frac{3}{2}}\Delta|^2 = -(A^{\frac{1}{2}}P(F(u_1) - F(u_2)), A^{\frac{3}{2}}\Delta)$$

(2.1.49)

由式(2.1.46),得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A\Delta|^2+|A^{\frac{3}{2}}\Delta|^2\leqslant K_7(1+l)|A\Delta||A^{\frac{3}{2}}\Delta|$$

因此$|A\Delta|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A\Delta|\geqslant-|A^{\frac{3}{2}}\Delta|^2-K_7(1+l)|A\Delta||A^{\frac{3}{2}}\Delta|$。因 $\Delta\in PD(A)$,有

$$|A^{\frac{3}{2}}\Delta|\leqslant\lambda_N^{\frac{1}{2}}|A\Delta|$$

因此

$$|A\Delta|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A\Delta|\geqslant-\lambda_N|A\Delta|^2-K_7(1+l)\lambda_N^{\frac{1}{2}}|A\Delta|^2,$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A\Delta|+(\lambda_N+K_7(1+l)\lambda_N^{\frac{1}{2}})|A\Delta|\geqslant 0 \quad (2.1.50)$$

从式(2.1.50)可得

$$|A\Delta(\tau)|\leqslant|A\Delta(0)|\exp(-\tau(\lambda_N+K_7(1+l)\lambda_N^{\frac{1}{2}})),\tau\leqslant 0 \quad (2.1.51)$$

引理 2.1.6 设 $\gamma_N=\lambda_{N+1}-\lambda_N-K_7(1+l)\lambda_N^{\frac{1}{2}}>0$,则对 $\Phi\in\mathscr{F}_{b,l}$和 $p_{01},p_{02}\in PD(A)$,有

$$|A\mathscr{T}\Phi(p_{01})-A\mathscr{T}\Phi(p_{02})|\leqslant L|Ap_{01}-Ap_{02}| \quad (2.1.52)$$

其中

$$L=K_7(1+l)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}[1+(1-\gamma_N\alpha_N)^{-1}]\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\gamma_N\alpha_N}{2}\right),$$

$$\gamma_N=\frac{\lambda_N}{\lambda_{N+1}},\alpha_N=1+K_7(1+l)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}$$

推出 $\Phi\in\mathscr{F}_{b,l}$。

证明 由式(2.1.38)和式(2.1.46),有

$$|A\mathscr{T}\Phi(p_{01})-A\mathscr{T}\Phi(p_{02})|\leqslant$$

$$\int_{-\infty}^{0}|AQ\mathrm{e}^{\tau AQ}Q(F(u_1)-F(u_2))|\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$K_7(1+l)\int_{-\infty}^{0}|(AQ)^{\frac{1}{2}}e^{\tau AQ}|_{0p}|A\Delta(\tau)|d\tau$$

其中 $\Delta=p_1-p_2$。由引理 2.1.2 和式(2.1.51)，有

$$\int_{-\infty}^{0}|(AQ)^{\frac{1}{2}}e^{\tau AQ}|_{0p}|A\Delta(\tau)|d\tau\leqslant$$

$$\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}\lambda_{N+1}^{-1}}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}\exp[\tau(\lambda_{N+1}-\lambda_N-K_7(1+l)\lambda_N^{\frac{1}{2}})]d\tau+$$

$$\int_{\frac{1}{2}\lambda_{N+1}^{-1}}^{0}K_3(\frac{1}{2})|\tau|^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\exp[-\tau(\lambda_N+K_7(1+l)\lambda_N^{\frac{1}{2}})]d\tau)|Ap_{01}-Ap_{02}|$$

由初等计算可知，最后右端表达式囿于

$$\lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}}[1+(1-\gamma_N\alpha_N)^{-1}]\exp(\frac{\gamma_N\alpha_N}{2})|Ap_{01}-Ap_{02}|$$

这就证明了式(2.1.52)。由式(2.1.44)、(2.1.52)和引理 2.1.4 推得

$$\mathscr{F}\Phi\in\mathscr{F}_{b,l}$$

至此我们已证明了映射 $\mathscr{F}:\mathscr{F}_{b,l}\to\mathscr{F}_{b,l}$。现证 $\mathscr{F}$ 是 Lip 映射。为此，考虑两个函数 Φ_1 和 Φ_2，具有同一初始条件。令

$$p_i=p(t;\Phi_i,p_0),u_i=p_i+\Phi_i(p_i),\text{其中 }i=1,2。$$

我们估计 $|A\mathscr{F}\Phi_1(p_0)-A\mathscr{F}\Phi_2(p_0)|$。用相似的方法，可得

$$\frac{d}{dt}|A\Delta|+\lambda_N\alpha_N|A\Delta|\geqslant-K_7\lambda_N^{\frac{1}{2}}\|\Phi_1-\Phi_2\| \quad (2.1.53)$$

其中 $\Delta=p_1-p_2,\alpha_N=(1+K_7(1+l)\lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}})$。因 $\Delta(0)=0$，从式(2.1.53)可得：

$$|A\Delta(\tau)|\leqslant\frac{K_7\lambda_N^{\frac{1}{2}}\|\Phi_1-\Phi_2\|}{\alpha_N\lambda_N}(\exp(-\alpha_N\lambda_N\tau))-1\leqslant$$

$$K_7\lambda_N^{\frac{1}{2}}\|\Phi_1-\Phi_2\|\exp(-\alpha_N\lambda_N\tau),\tau\leqslant0 \quad (2.1.54)$$

如同引理 2.1.6，由式(2.1.38)、(2.1.46)和式(2.1.54)，可得

$$|A\mathscr{F}\Phi_1(p_0)-A\mathscr{F}\Phi_2(p_0)|\leqslant$$

$$\int_{-\infty}^{0} |AQe^{\tau AQ}(F(u_1) - F(u_2))| d\tau \leqslant$$

$$K_7 \int_{-\infty}^{0} |(AQ)^{\frac{1}{2}} e^{\tau AQ}|_{op} [(1+l)|A\Delta| + \|\Phi_1 - \Phi_2\|] d\tau \leqslant$$

$$K_7 \|\Phi_1 - \Phi_2\| \int_{-\infty}^{0} |(AQ)^{\frac{1}{2}} e^{\tau AQ}|_{op} \times$$

$$(1 + K_7 \lambda_N^{-\frac{1}{2}} (1+l) e^{-\lambda_N \alpha_N \tau}) d\tau \tag{2.1.55}$$

由引理 2.1.2,式(2.1.55)右端的积分囿于

$$2e^{-\frac{1}{2}} \lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}} + \int_{-\alpha}^{0} K_3(\frac{1}{2}) |\tau|^{-\frac{1}{2}} \exp(-\lambda_N \alpha_N \tau) d\tau +$$

$$K_7 (1+l) \lambda_N^{-\frac{1}{2}} (\int_{-\infty}^{-\alpha} \lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} \exp[\tau(\lambda_{N+1} - \lambda_N \alpha_N)] d\tau \leqslant$$

$$2e^{-\frac{1}{2}} \lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}} + K_7 (1+l) \lambda_N^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$[\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} (1 + (1 - \gamma_N \alpha_N)^{-1}) \exp(\frac{\gamma_N \alpha_N}{2})] \leqslant$$

$$2e^{-\frac{1}{2}} \lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} + \lambda_N^{-\frac{1}{2}} L$$

于是,有

$$|A\mathscr{F}\Phi_1(p_0) - A\mathscr{F}\Phi_2(p_0)| \leqslant L' \|\Phi_1 - \Phi_2\|, \forall\, p_0 \in PD(A) \tag{2.1.56}$$

其中 $L' = K_7(2e^{-\frac{1}{2}} \lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}} + \lambda_N^{-\frac{1}{2}} L)$。

如上所述,我们寻求条件保证 $\mathscr{F}$ 映射 $\mathscr{F}_{b,l}$ 到自身,并在 $\mathscr{F}_{b,l}$ 中是严格压缩的。这就要求寻找充分条件(对 λ_N 和 λ_{N+1}),使之保证

$$L \leqslant l; L' < 1$$

首先,注意到 $\gamma_N = \lambda_{N+1} - \lambda_N - k_l(1+l)\lambda_N^{\frac{1}{2}} > 0$ 等价于

$$1 - \gamma_N \alpha_N > 0 \tag{2.1.57}$$

或

$$1 > \gamma_N \alpha_N > 0 \tag{2.1.57'}$$

则从式(2.1.57)推出

$$L \leqslant K_7(1+l)\lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}}[1+(1-\gamma_N\alpha_N)^{-1}]$$

为使 $L\leqslant l$,充分地选取 N,使得以下两个不等式成立:

$$K_7(1+l)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} \leqslant \frac{l}{2} \tag{2.1.58}$$

$$K_7(1+l)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}(1-\gamma_N\alpha_N)^{-1} \leqslant \frac{l}{2} \tag{2.1.59}$$

式(2.1.58)可写为

$$K_{10} \leqslant \lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}} \tag{2.1.60}$$

其中 $K_{10}=2K_7(1+l)L^{-1}$。现设选取 N,使式(2.1.60)成立。不等式(2.1.59)可写成

$$K_{10}\lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}} \leqslant 1-\gamma_N\alpha_N \tag{2.1.61}$$

它等价于

$$K_{10}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}-1+\gamma_N+K_7(1+l)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}\gamma_N^{\frac{1}{2}} \leqslant 0 \tag{2.1.62}$$

其中 $\gamma_N=\dfrac{\lambda_N}{\lambda_{N+1}}$。设

$$\gamma_N^{\frac{1}{2}}+K_{10}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}=(\lambda_N\lambda_{N+1}^{-1})^{\frac{1}{2}}+K_{10}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} \leqslant 1 \tag{2.1.63}$$

应用式(2.1.63)两次,得

$$K_{10}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}-1+\gamma_N+K_{10}\lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}}\gamma_N^{\frac{1}{2}} \leqslant K_{10}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}-1+\gamma_N^{\frac{1}{2}} \leqslant 0 \tag{2.1.64}$$

因 $l\leqslant\dfrac{1}{8}$,有 $K_7(1+l)\leqslant K_{10}$。由式(2.1.63)推出式(2.1.62)。再推出式(2.1.61)。

因此,为使 $\mathscr{F}$ 映射 $\mathscr{F}_{b,l}$ 为 $\mathscr{G}_{b,l}$,我们需设 $\gamma_N>0$ 或 $1-\gamma_N\alpha_N>0$。这个假设由式(2.1.61)所保证。$\mathscr{F}$ 映射 $\mathscr{G}_{b,l}$ 为自身的充分条件是式(2.1.58)、(2.1.61),它由式(2.1.60)(2.1.63)保证。容易看到,这两个不等式是

$$K_{10} \leqslant \lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}}-\lambda_N^{\frac{1}{2}} \tag{2.1.65}$$

的推论。

为使 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{F}_{b,l}$ 上的压缩映射，必须 $L'<1$。设 $L'\leqslant\frac{1}{2}$，从而推出

$$K_{11}\leqslant\lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}} \tag{2.1.66}$$

其中 $K_{11}=2K_7(2e^{-\frac{1}{2}}+L)$。因此，在条件(2.1.65)、(2.1.66)下，$\mathscr{F}$ 映射 $\mathscr{F}_{b,l}$ 为自身，且是压缩的。因此，$\mathscr{F}$ 存在不动点。

现在证明 $M=\text{Graph}(\Phi)$ 在 $S(t)$ 作用下是不变的。即有

$$S(t)M\subset M,\forall\ t\geqslant 0 \tag{2.1.67}$$

并证明它吸引着所有轨线指数地逼近 M。

先证明 M 的不变性。事实上，从表达式

$$\Phi(p_0)=-\int_{-\infty}^{0}e^{\tau AQ}QF(u(\tau,p_0))d\tau \tag{2.1.68}$$

其中 $u(\tau,p_0)=p(\tau,\Phi,p_0)+\Phi(p(\tau);\Phi,p_0)$，现置 p_0 为 $p(t)=p(t;\Phi,p_0)$ 于式(2.1.68)中，且注意到

$$p(\tau,\Phi,p(t;\Phi,p_0))=p(\tau+t;\Phi,p_0)$$

可推出

$$\begin{aligned}\Phi(p(t))&=-\int_{-\infty}^{0}e^{\tau AQ}QF(u(\tau),p(t))d\tau\\&=-\int_{-\infty}^{t}e^{(t-\tau)AQ}QF(u(\tau),p_0)d\tau,\forall t\in\mathbf{R}\end{aligned} \tag{2.1.69}$$

上式对 t 微商，容易看到，$(p(t),q(t))$ 是问题(2.1.29)、(2.1.30)的解，$u(t)=p(t)+q(t)$ 为式(2.1.25)的解，其中 $q(t)=\Phi(p(t))$。这就表明 $S(t)M\subseteq M,\forall\ t\geqslant 0$。

为了证明 M 指数地吸引式(2.1.25)的所有解，我们先叙述方程(2.1.20)的挤压性质：

挤压性质　对每一个 $T>0,\gamma>0,r>0$，存在常数 K_2,K_3（它依赖于 T,γ,r 和常数 $C_1=C_4$，但不依赖于 $S(t)$ 和 N），使得对每一个 $N\geqslant 1$，如下之一不等式成立：

$$|Q_N(S(t)u_0 - S(t)v_0)| \leqslant \gamma |P_N(S(t)u_0 - S(t)v_0)| \tag{2.1.70}$$

或

$$|S(t)u_0 - S(t)v_0| \leqslant K_2 \exp(-K_3 \alpha \lambda_{N+1} t) |u_0 - v_0| \tag{2.1.71}$$

将这个结果用于满足 $t_0 \leqslant t \leqslant 2t_0$ 的一切 t，其中 $t_0 = (\frac{1}{2K_1})\lg 2$，$K_1$ 为常数。当 $|Au_0| \leqslant r$，$|Au_0| \leqslant r$ 时，有

$$|S(t)u_0 - S(t)v_0| \leqslant \exp(K_1 t) |u_0 - v_0|, \forall\ t \geqslant t_0$$

$\gamma = \frac{1}{8}$，$N \geqslant N_0$，其中 N_0 满足

$$\lambda_{N_0+1} \geqslant (2K_3 \alpha t_0)^{-1} \lg(2K_2) \tag{2.1.72}$$

此时式(2.1.70)、(2.1.71)变为

$$|Q_N(S(t)u_0 - S(t)v_0)| \leqslant \frac{1}{8} |P_N(S(t)u_0 - S(t)v_0)| \tag{2.1.73}$$

$$|S(t)u_0 - S(t)v_0| \leqslant \frac{1}{2}\ u_0 - v_0| \tag{2.1.74}$$

其中 $u_0, v_0 \in D(A)$，$|Au_0| \leqslant r$，$|Av_0| \leqslant r$，$t_0 \leqslant t \leqslant 2t_0$

固定 $r = 4\rho + b$，依式(2.1.24)、(2.1.25)的轨线终将在 $D(A)$ 中进入以 0 为原点以 $4\rho = 8\rho_2$ 为半径的球内。设

$$|Au_0| \leqslant 4\rho, |AS(t)u_0| \leqslant 4\rho, \forall\ t \geqslant 0$$

我们首先证明：对于任何 t_1，$t_0 \leqslant t_1 \leqslant 2t_0$，有

$$\operatorname{dist}(S(t_1)u_0, \mu) \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{dist}(u_0, M)$$

其中 $\operatorname{dist}(\phi, M) = \inf\{|\phi - v| : v \in M\}$。为此，选取 v_0，使 $|u_0 - v_0| = \operatorname{dist}(u_0, M)$。则 $v_0 = Pv_0 + \Phi(Pv_0)$。我们要求 $|APv_0| \leqslant 4\rho$。否则，如 $|APv_0| > 4\rho \geqslant |APu_0|$，则 $\Phi(Pv_0) = 0$，$v_0 = Pv_0$。另外，存在 β，$0 < \beta \leqslant 1$，使 $|APv_\beta| = 4\rho$，其中 $v_\beta = \beta Pu_0 + (1-\beta)v_0 \in PD(A)$。则有 $\Phi(v_\beta) = 0$。因此 $v_\beta \in \mu$，且

$$|v_\beta - u_0|^2 = |v_\beta - Pu_0|^2 + |Qu_0|^2 =$$
$$|(1-\beta)(v_0 - Pu_0)|^2 + |Qu_0|^2 <$$
$$|v_0 - Pu_0|^2 + |Qu_0|^2 = |v_0 - u_0|^2$$

这和$|v_0 - u_0| = \text{dist}(u_0, M)$矛盾。因$|A\Phi(Pv_0)| \leqslant b$,有

$$|Av_0| \leqslant |APv_0| + |A\Phi(Pv_0)| \leqslant 4\rho + b = r$$

其次,对$S(t)u_0$和$S(t)v_0$应用挤压性质式(2.1.73)、(2.1.74)。如式(2.1.74)成立,则

$$\text{dist}(S(t_1)u_0, \mu) \leqslant |S(t_1)u_0 - S(t_1)v_0| \leqslant$$
$$\frac{1}{2}|u_0 - v_0| \leqslant \frac{1}{2}\text{dist}(u_0, \mu)$$

如式(2.1.73)成立,则

$$\text{dist}(S(t_1)u_0, \mu) \leqslant |S(t_1)u_0 - (P(S(t_1)u_0) + \Phi(PS(t_1)u_0))| \leqslant$$
$$|QS(t_1)u_0 - QS(t_1)v_0| +$$
$$|\Phi(PS(t_1)v_0) - \Phi(PS(t_1)u_0)| \leqslant$$
$$\left(\frac{1}{8} + l\frac{\lambda_N}{\lambda_{N+1}}\right)|PS(t_1)v_0 - PS(t_1)u_0|$$

从式(2.1.73)、(2.1.32)和

$$|q| \leqslant \lambda_{N+1}^{-1}|Aq|, q \in QD(A)$$
$$|Ap| \leqslant \lambda_N|p|, p \in PD(A)$$

有

$$\text{dist}(S(t_1)u_0, M) \leqslant \frac{1}{4}|S(t_1)v_0 - S(t_1)u_0| \leqslant$$
$$\frac{1}{2}|v_0 - u_0| = \frac{1}{2}\text{dist}(u_0, M)$$

于是,对任意$t \geqslant t_0, t = nt_1, t_0 \leqslant t_1 \leqslant 2t_0$,有

$$\text{dist}(S(t)u_0, \mu) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{dist}(u_0, M) =$$
$$\exp\left(-\frac{t}{t_1}\ln 2\right)\text{dist}(u_0, M) \leqslant$$

$$\exp(-\frac{t}{2t_0}\ln 2)\operatorname{dist}(u_0,M) \tag{2.1.75}$$

它指出指数衰减收敛率为$\frac{1}{2t_0}\ln 2$。

我们再证明整体吸引子 $\mathscr{A}\subset M$。事实上，如 $u\in\mathscr{A}$，则解 $S(t)u$对一切 t 定义。根据式(2.1.23)、(2.1.24)，有

$$\operatorname{dist}(S(t)u,M)\leqslant 2\rho_2,\forall\ t\in R$$

令 $v=S(-t)u$，其中 $t\geqslant t_0$，则从式(2.1.75)，有

$$\operatorname{dist}(u,M)=\operatorname{dist}(S(t)v,M)\leqslant\exp(-\frac{t}{t_0}\ln 2)\cdot 2\rho_2$$

这就推出 $\operatorname*{dist}_{u\in\mathscr{A}}(u,M)=0$。因此 $\mathscr{A}\subset M$。

综合以上结果，可得如下定理。

定理 2.1.1 设满足式(2.1.1)～(2.1.11)，并设 $0<l<\frac{1}{8}$，N_0 为式(2.1.72)所确定，则存在常数 K_{10}、K_{11}(依赖于 l 和初值)，使

$$N\geqslant N_0,\lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}}\geqslant K_{11},\lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}}-\lambda_N^{\frac{1}{2}}\geqslant K_{10} \tag{2.1.76}$$

则存在 $b>0$，使

(i)$\mathscr{F}$ 映射 $\mathscr{F}_{b,l}$为 $\mathscr{F}_{b,l}$；

(ii)$\mathscr{F}$ 在 $\mathscr{F}_{b,l}$中具有一个不动点；

(iii)$M=\mathrm{Graph}(\Phi)$是式(2.1.25)的惯性流形；

(iv)M 含有式(2.1.1)的整体吸引子。

定理 2.1.2 设方程(2.1.1)、(2.1.25)给定在 H 上，其中非线性项 $F(u)=\theta_\rho(|Au|)R(u)$满足式(2.1.26)。设 l 给定，$0<l<\frac{1}{8}$。设存在 ρ_0，使式(2.1.1)的每个解式(2.1.21)成立。则存在常数 N_0，K_{12}，K_{13}(它们依赖于 l 和问题的初值)，使

$$N\geqslant N_0,\lambda_{N+1}\geqslant K_{12},\lambda_{N+1}-\lambda_N\geqslant K_{13} \tag{2.1.77}$$

则定理 2.1.1 的结论成立。

证明 非线性项 $F(u)=\theta_\rho(u)R(u)$满足整体 Lip 条件

$$|F(u)-F(v)| \leqslant K|u-v|, \forall\, u,v \in H$$

选取参数 $\rho=2\rho_0$。空间 $\mathscr{F}_{b,l}$ 由 $\Phi: PH \to QH$ 组成，满足：

$$|\Phi(p)| \leqslant b, \forall\, p \in PD(A)$$

$$|\Phi(p_1)-\Phi(p_2)| \leqslant l|p_1-p_2|, \forall\, p_1,p_2 \in D(A)$$

$$\sup p\Phi \subseteq \{p \in PD(A) \| p| \leqslant 4\rho\}$$

算子 $\mathscr{F}$ 定义为

$$\mathscr{F}\Phi(p_0) = -\int_{-\infty}^{0} e^{\tau AQ} QF(u)\,d\tau$$

其中 $u=u(\tau)=p(\tau;\Phi,p_0)+\Phi(p(\tau;\Phi,p_0))$。不等式(2.1.41)换为

$$|F(u)| \leqslant K'_4$$

其中 K'_4 依赖于 $R(u)$，θ 和 ρ。引理 2.1.2 当 $\alpha=0$ 时成立，不等式(2.1.40)当 $\alpha=0$ 时成立，式(2.1.42)换为

$$|\mathscr{F}\Phi(p_0)| \leqslant K'_5 \lambda_{N+1}^{-1}$$

其中 $K'_5=K'$。因此，可取 $b=K'_5\lambda_{N+1}^{-1}$。引理 2.1.4 将模 $|Av|$ 换为 $|v|$ 模，不等式(2.1.46)变为

$$|F(u_1)-F(u_2)| \leqslant K'_7[(1+l)|p_1-p_2| + \|\Phi_1-\Phi_2\|] \tag{2.1.78}$$

其中 $\|\Phi\| = \sup\{\Phi(p)|; p\in PD(A)\}|$。

令 $\Delta=p_1-p_2$，则式(2.1.48)是相同的。作式(2.1.48)和 Δ 的内积，可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Delta|^2 + |A^{\frac{1}{2}}\Delta|^2 = -(P(F(u_1)-F(u_2)),\Delta)$$

从式(2.1.78)可得：

$$\left|\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Delta|^2 + |A^{\frac{1}{2}}\Delta|^2\right| \leqslant K'_7(1+l)|\Delta|^2$$

由此推出

$$|\Delta| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\Delta| \geqslant -|A^{\frac{1}{2}}\Delta|^2 - K'_7(1+l)|\Delta|^2$$

$$\geqslant -\lambda_N|\Delta|^2 - K'_7(1+l)|\Delta|^2$$

于是,有

$$|\Delta(\tau)| \leqslant |\Delta(0)|\exp(-\tau(\lambda_N + K_7(1+l))), \tau < 0$$

代替不等式(2.1.51)。在引理 2.1.6 中对 γ_N 的假设能换为

$$|\mathscr{F}\Phi(p_{01}) - \mathscr{F}\Phi(p_{02})| \leqslant L|p_{01} - p_{02}|$$

其中 $L = K'_7(1+l)\lambda_N^{-1}$。事实上

$$|\mathscr{F}\Phi(p_{01}) - \mathscr{F}\Phi(p_{02})| \leqslant$$

$$\int_{-\infty}^0 |e^{\tau AQ}|_{10p}|F(u_1) - F(u_2)|\mathrm{d}\tau \leqslant$$

$$K'_7(1+l)|p_{01} - p_{02}| \cdot$$

$$\int_{-\infty}^0 \exp(\tau(\lambda_{N+1} - \lambda_N - K'_7(1+l)))\mathrm{d}\tau \leqslant$$

$$K'_7(1+l)(\lambda_{N+1} - \lambda_N - K'_7(1+l))^{-1}|p_{01} - p_{02}|$$

类似地,有

$$|\mathscr{F}\Phi_1(p_0) - \mathscr{F}\Phi_2(p_0)| \leqslant L' \|\Phi_1 - \Phi_2\|$$

其中 $\qquad L' = K'_7\lambda_{N+1}^{-1} + K_7(\lambda_N + K'_7(1+l)]^{-1}L$。

令 $L \leqslant l, L' \leqslant \frac{1}{2}$,则当 $l < \frac{1}{8}$ 时,且

$$K_{12} \leqslant \lambda_{N+1}, K_{13} \leqslant \lambda_{N+1} - \lambda_N, \tag{2.1.79}$$

$\mathscr{F}$ 映射 $\mathscr{F}_{b,l}$ 为 $\mathscr{F}_{b,l}$,且具有不动点。定理证毕。

现考虑方程(2.1.25)的 Galerkin 近似方程

$$\frac{\mathrm{d}uM}{\mathrm{d}t} + Au_M + P_MF(u_M) = 0 \tag{2.1.80}$$

其中 $F(u) = \theta_\rho(|Au|)R(u)$,$u_M$ 取值在 $P_MD(A)$ 上。

关于 Galerkin 近似方程(2.1.80),有如下定理:

定理 2.1.3 设定理 2.1.1 的假设成立,$l>0$ 和 N 满足定理

2.1.1 的条件，则对每个 $M>N$，方程(2.1.80)具有一个惯性流形 $\mathcal{M}_M$。它由 Lip 函数 Φ_M 的图构成，

$$\Phi_M : P_M D(A) \to QP_M D(A) \subset QD(A)$$

Φ_M 的 Lip 常数 L 和定理 2.1.1 中 $\Phi : PD(A) \to QD(A)$ 的 Lip 常数相同。最后，

$$\| \Phi_M - \Phi \| \leqslant 2K_6 \lambda_{N+1}^{-\frac{1}{4}} \lambda_{M+1}^{\frac{1}{4}}.$$

其中 $$\| \Phi_M - \Phi \| = \sup_{p \in PD(A)} |A\Phi_M(p) - A\Phi(p)|$$

2.2 惯性流形与法向双曲性

考虑具有如下形式的在 Banach 空间 $\mathscr{E}$ 上的抽象发展方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = f(u), u(0) = u_0 \qquad (2.2.1)$$

其中 f 为整体 Lipschitz 连续的：Banach 空间 $E \to$ 另一个 Banach 空间 F，且设 $E \subset F \subset \mathscr{E}$；且单射是连续的，$E$ 在 F 和 F 在 $\mathscr{E}$ 中均是稠密的。

设存在 $M_1 > 0$ 为 f 的 Lipschitz 常数，有

$$|f(u) - f(v)|_F \leqslant M_1 |u - v|_E, \forall u, v \in E \qquad (2.2.2)$$

设 $-A$ 在 $\mathscr{E}$ 上生成强连续半群 $\{e^{-tA}\}_{t \geqslant 0}$，且 $e^{-tA} \subset E, \forall t > 0$，且存在两个数列 $\{\lambda_n\}_{n \in \mathcal{N}}, \{\Lambda_n\}_{n \in \mathcal{N}}, 0 < \lambda_n < \Lambda_n, \forall n \in \mathcal{N}$。设存在有限维投影序列 $\{P_n\}_{n \in \mathcal{N}}$，使得如 $Q_n = I - P_n$，如下的指数二分法成立：

$P_n \mathscr{E}$ 在 e^{-tA} 下是不变的，$\forall t \geqslant 0, \{e^{-tA}\}_{t \geqslant 0}$，在 $P_n \mathscr{E}$ 上能扩展为一个强连续半群 $\{e^{-tA} P_n\}_{t \in \mathbf{R}}$ 使得

$$\begin{cases} \| e^{-tA} P_n \|_{\mathscr{L}(E)} \leqslant K_1 e^{-\lambda_n t}, & \forall t \leqslant 0 \\ \| e^{-tA} P_n \|_{\mathscr{L}(F,E)} \leqslant K_1 \lambda_n^{\alpha} e^{-\lambda_n t}, & \forall t \leqslant 0 \end{cases} \qquad (2.2.3)$$

且 $Q_n \mathscr{E}$ 在 e^{-tA} 下是正不变的，$\forall t \geqslant 0$。有

$$\begin{cases} \| e^{-tA}Q_n \|_{\mathscr{L}(E)} \leqslant K_2 e^{-\Lambda_n t}, & \forall t \geqslant 0 \\ \| e^{-tA}Q_n \|_{\mathscr{L}(F,E)} \leqslant K_2(t^{-\alpha} + \Lambda_n^{\alpha}) e^{-\Lambda_n t}, & \forall t > 0 \end{cases} \tag{2.2.4}$$

其中，$K_1, K_2 \geqslant 1, 0 \leqslant \alpha < 1$。

设方程(2.2.1)在 E 上确定连续半流 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$，$S(t)u_0 = u(t)$，其中 $u(t)$ 为方程(2.2.1)的如下积分方程的解

$$u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(u(s)) \mathrm{d}s, \quad \forall t > 0$$

设 $(t, u_0) \to S(t)u_0$ 是连续的：$[0,\infty) \times E \to E$。

置

$$\gamma\alpha = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-r} r^{-\alpha} \mathrm{d}r, & 0 < \alpha < 1 \\ 0, & \alpha = 0 \end{cases}$$

可得如下结果：

定理 2.2.1 在上述假设下，如对某个 $n \in \mathscr{N}$，如下谱间隙条件满足：

$$\Lambda_n - \lambda_n > 3M_1K_1K_3\lambda_n^{\alpha} + 3M_1K_1K_2(1 + \gamma_\alpha)\Lambda_n^{\alpha} \tag{2.2.5}$$

则由方程(2.2.1)生成的半流 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$，具有惯性流形 $M = \mathrm{graph}\Phi : P_nE \to Q_nE$，其中 $\Phi: P_nE \to Q_nE$ 为 Lipschitz 连续的，其 Lipschitz 常数<1，M 具有正的和负的不变性，更进一步，M 具有渐近完全性：即对任意 $u_0 \in E$，存在 $v_0 \in E$，使得

$$|S(t)u_0 - S(t)v_0|_E \leqslant K_\eta(|u_0|_E) e^{-\eta t}, \forall t \geqslant 0$$

其中 η 为满足如下不等式的任意数：

$$0 < \eta < \Lambda_n - 2M_1K_2(1 + \gamma_\alpha)\Lambda_n^{\alpha}$$

这里 K_η 依赖于 η 和 $|u_0|_E$。

附注： 定理 2.2.1 只包含了主要结果，其实在定理 2.2.1 的相同假设下，我们还能得到更多的信息，例如可得到惯性流形的特征为所有完全轨道的并集，这些轨道囿于 $e^{-\sigma t}, t \to -\infty$，对于某个 $\sigma > 0$。也能得到空间 E 的连续叶片的存在性 $E = \bigcup_{v_0 \in M} N_{v_0}$，其中每个叶片为一个 Lipschitz 函数从 Q_nE 到 P_nE 的图，N_{v_0} 可表示为

$$N_{v_0}=\{u_0\in E;|S(t)u_0-S(t)v_0|_E=O(\mathrm{e}^{-\eta t}),t\to+\infty\},$$

$$\eta>0$$

我们也可得到一个连续压缩映照 $\pi:E\to M$，有 $\pi^{-1}\pi u_0=N_{v_0}$ 使得 $S(t)\pi u_0$ 为 M 上的唯一轨线，具有 $|S(t)u_0-S(t)\pi u_0|_E=\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\eta t})$，$t\to\infty$，$\eta>0$。这就给出了 M 的渐近完全性。

通常，在式(2.2.1)中的非线性项 f 仅在有界集上是 Lipschitz 的。设

$$|f(u)-f(v)|_F\leqslant d_1(r)|u-v|_E,|f(u)|_F\leqslant d_0(r)$$

$\forall\ u,v\in B_E(r)=\{u\in E;|u|_E\leqslant r\}$。此时可设在 E 中对于 $\{S(t)\}_{t\geqslant0}$ 存在吸收集 $\mathscr{B}$，即 $\mathscr{B}\subset E$ 是有界的，且对任何有界集 $\mathscr{B}\subset E$，存在 $t_0(B)>0$，使得 $S(t)B\subset\mathscr{B}$，$\forall\ t\geqslant t_0$。

取数值函数 $\theta\in C^1([0,+\infty))$，$\theta(s)=1$，$s\in[0,1]$，$\theta(s)=0$，$s\in[2,+\infty)$，$|\theta'(s)|\leqslant2$，$\forall\ s\geqslant0$。用截断函数 $f_\theta(u)$ 代替 f：

$$f_\theta(u)=\theta\left(\frac{|u|_E^2}{\rho^2}\right)f(u),\forall\ u\in E$$

其中 $\rho>0$，使得 $\overline{\mathscr{B}}\subset B_E(\rho)$，$\overline{\mathscr{B}}$ 表示 B 在 E 中的闭包。考虑截断方程为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au=f_\theta(u),u(0)=u_0$$

设它在 E 中确定连续半流 $\{S_\theta(t)\}_{t\geqslant0}$，它具有如同方程(2.2.1)相同的初值。

定理 2.2.2 在上述假设下，如对某个 $n\in\mathscr{N}$，如下谱间隙条件满足：

$$\Lambda_n-\lambda_n>3M_1K_1K_2\lambda_n^\alpha+3M_1K_1K_2(1+\gamma_\alpha)\Lambda_n^\alpha$$

其中 $M_1=d_1(\sqrt{2}\rho)+4\sqrt{2}\dfrac{d_0(\sqrt{2}\rho)}{\rho}$，则方程(2.2.1)具有惯性流形 M，它是 Lipschitz 函数 $\Phi:O\subset P_nE\to Q_nE$ 的图，其中 O 为 P_nE 的一个开子集。更进一步，M 具有渐近完全性，即对任何 $u_0\in E$，存在 $v_0\in M$，使得

$$|S(t+t_0)u_0+S(t)v_0|_E\leqslant\mathrm{e}^{-\eta t},\forall t\geqslant0,$$

其中 η 为任何满足如下不等式的数

$$0<\eta<\Lambda_n-2M_1K_2(1+\gamma_\alpha)\Lambda_n^\alpha$$

t_0 依赖于 η 和 $|u_0|_E$。

定理 2.2.1 的证明 为简单计，固定 $n\in\mathcal{N}$，设式(2.2.5)成立，且记 $P=P_n, Q=Q_n, \lambda=\lambda_n, \Lambda=\Lambda_n, 0<\alpha<1$。当 $\alpha=0$ 时，证明几乎相同。取 $\gamma_\alpha=0$。引入空间

$$\mathscr{F}_\sigma=\{\varphi\in C((-\infty,0],E):\|\varphi\|_{\mathscr{F}_\sigma}=\sup_{t\leqslant 0}(e^{\sigma t}|\varphi(t)|_E)<+\infty\}$$

它是一个 Banach 空间，具模 $\|\cdot\|_{\mathscr{F}_\sigma}$。对于 $\varphi\in\mathscr{F}_\sigma, y\in PE$，考虑形式上的映照

$$\mathscr{J}(\varphi,y)(t)=e^{-tA}Py-\int_t^0 e^{-(t-s)A}Pf(\varphi(s))ds+$$

$$\int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A}Qf(\varphi(s))ds, t\leqslant 0 \qquad (2.2.6)$$

不变流形的构造是基于这样的事实，对于适当的 σ，函数 $\varphi\in\mathscr{F}_\sigma$ 为方程(2.2.1)的解当且仅当 φ 为 $\mathscr{J}$ 的不动点，这就需要证明对于适当的 σ，由式(2.2.6)定义的映照 $\mathscr{J}:\mathscr{F}_\sigma\times PE\to\mathscr{F}_\sigma$，而且在 $\mathscr{F}_\sigma$ 上是严格压缩的，且对 PE 是一致的。因此存在一个映照 φ: $PE\to\mathscr{F}_\sigma$，使得 $\mathscr{J}(\varphi(y_0),y_0)=\varphi(y_0)$，$\forall y_0\in PE$，$\varphi(y_0)$ 为式(2.2.1)的任意一个解。我们定义映照 $\Phi:PE\to QE$

$$\Phi(y_0)=Q\varphi(y_0)(0)=\int_{-\infty}^0 e^{sA}Qf(\varphi(y_0)(s))ds$$

因此

$$\varphi(y_0)(0)=y_0+\Phi(y_0)$$

令 $M=\text{graph }\Phi$，并证明 M 是 Lipschitz 的，不变的和具有渐近完全性质的，因而 M 就是我们要求的惯性流形。

引理 2.2.1 当 $\lambda<\sigma<\Lambda$，我们有 $\mathscr{J}:\mathscr{F}_\sigma\times PE\to\mathscr{F}_\sigma$。

证明 取 $\varphi\in\mathscr{F}_\sigma, y\in PE$。因 f 是整体 Lipschitz 的，因此存在常数 $M_0>0$，使得

$$|f(u)|_F\leqslant M_0+M_1|u|_E, \quad \forall u\in E \qquad (2.2.7)$$

于是

$$|Q\mathscr{J}(\varphi,y)|_E \leqslant \int_{-\infty}^{t} |e^{-(t-s)A}Qf(\varphi(s))|_E ds \leqslant$$

$$K_2\int_{-\infty}^{t} e^{-\Lambda(t-s)}((t-s)^{-\alpha}+\Lambda^{\alpha})(M_0+M_1)|\varphi(s)|_E)ds$$

因此，对 $\lambda<\sigma<\Lambda$，有

$$e^{\sigma t}|Q\mathscr{J}(\varphi,y)(t)|_E \leqslant M_0K_2\Lambda^{\alpha}e^{(\sigma-\Lambda)t}\int_{-\infty}^{t} e^{\Lambda s}ds +$$

$$M_1K_2e^{\sigma t}\int_{-\infty}^{t} e^{-\Lambda(t-s)}(t-s)^{-\alpha}ds +$$

$$M_1K_2\Lambda^{\alpha}\|\varphi\|_{\mathscr{Y}_\sigma}\int_{-\infty}^{t} e^{(\sigma-\Lambda)(t-s)}ds +$$

$$M_1K_2\|\varphi\|_{\mathscr{Y}_\sigma}\int_{-\infty}^{t} e^{(\sigma-\Lambda)(t-s)}(t-s)^{-\alpha}ds \leqslant$$

$$\frac{M_0K_2}{\Lambda^{1-\alpha}}e^{\sigma t}+\frac{\gamma_\alpha M_0K_2}{\Lambda^{1-\alpha}}e^{\sigma t}+\frac{M_1K_2\Lambda^{\alpha}}{\Lambda-\sigma}\|\varphi\|_{\mathscr{Y}_\sigma}+$$

$$\frac{M_1K_2\gamma_\alpha}{(\Lambda-\sigma)^{1-\alpha}}\|\varphi\|_{\mathscr{Y}_\sigma}$$

其中用到了：

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{t} e^{-r(t-s)}(t-s)^{-\alpha}ds=\frac{\gamma_\alpha}{\gamma^{1-\alpha}}\\&\int_{-\infty}^{t} e^{-r(t-s)}ds=\frac{1}{r},\quad \forall r>0\end{aligned}\tag{2.2.8}$$

因此，$Q\mathscr{J}(\varphi,y)(t)\in QE$，$\forall\ t\leqslant 0$，且

$$\sup_{t\leqslant 0}(e^{\sigma t}|Q\mathscr{J}(\varphi,y)(t)|_E)\leqslant$$

$$M_0K_2(1+\gamma_\alpha)+\frac{M_1K_2(1+\gamma_\alpha)\Lambda^{\alpha}}{\Lambda-\sigma}\|\varphi\|_{\mathscr{Y}_\sigma}\tag{2.2.9}$$

类似地，

$$|P\mathscr{J}(\varphi,y)(t)|_E\leqslant$$

$$\mathrm{e}^{-tA}Py|_E + \int_t^0 |\mathrm{e}^{-\Lambda(t-s)}Pf(\varphi(s))|_E \mathrm{d}s \leqslant$$

$$K_1\mathrm{e}^{-\lambda t}|y|_E + K_1\lambda^\alpha\int_t^0 \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}(M_0 + M_1|\varphi(s)|_E)\mathrm{d}s$$

因此

$$\mathrm{e}^{\sigma t}|P\mathscr{J}(\varphi,y)(t)|_E \leqslant$$

$$K_1\mathrm{e}^{(\sigma-\lambda)t}|y|_E + M_0K_1\lambda^\alpha\mathrm{e}^{(\sigma-\lambda)t}\int_t^0 \mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{d}s +$$

$$M_1K_1\lambda^\alpha \|\varphi\|_{\mathscr{F}\sigma}\int_t^0 \mathrm{e}^{(\sigma-\lambda)(t-s)}\mathrm{d}s \leqslant$$

$$K_1\mathrm{e}^{(\sigma-\lambda)t}|y|_E + \frac{M_0K_1}{\lambda^{1-\alpha}}\mathrm{e}^{(\sigma-\lambda)t} + \frac{M_1K_1\lambda^\alpha}{\sigma-\lambda}\|\varphi\|_{\mathscr{F}\sigma}$$

因此，$P\mathscr{J}(\varphi,y)(t)\in PE$，$\forall\ t\leqslant 0$，且

$$\sup_{t\leqslant 0}(\mathrm{e}^{\sigma t}\ P\mathscr{J}(\varphi,y)(t)|_E) \leqslant K_1|y|_E + \frac{M_0K_1}{\lambda^{1-\alpha}} + \frac{M_1K_1\lambda^\alpha}{\sigma-\lambda}\|\varphi\|_{\mathscr{F}\sigma} \tag{2.2.10}$$

于是，$\mathscr{J}(\varphi,y)(t)\in E$，$\forall\ t\leqslant 0$。$t\to\mathscr{J}(\varphi,\varphi)$从$(-\infty,0]$到$E$的连续性能被同样证明，从式(2.2.9)、(2.2.10)可知$\mathscr{J}(\varphi,y)\in\mathscr{J}_\sigma$，且

$$\|\mathscr{J}(\varphi,y)\|_{\mathscr{F}_\sigma} \leqslant K_1|y|_E + \frac{M_0K_1}{\lambda^{1-\alpha}} + (1+\gamma_\alpha)\frac{M_0K_2}{\Lambda^{1-\alpha}} +$$

$$\left\{\frac{M_1K_1\lambda^\alpha}{\sigma-\lambda} + \frac{M_1K_2(1+\gamma_\alpha)\Lambda^\alpha}{\Lambda-\alpha}\right\}\|\varphi\|_{\mathscr{F}_\sigma}$$

这就证明了$\mathscr{J}$是确定的映照：$\mathscr{F}_\sigma\times PE\to\mathscr{F}_\sigma$。

引理 2.2.2 对任何σ，使得$\lambda<\sigma<\Lambda$，有

$$\|\mathscr{J}(\varphi_1,y)-\mathscr{J}(\varphi_2,y)\|_{\mathscr{F}_\sigma} \leqslant \theta_\sigma\|\varphi_1-\varphi_2\|_{\mathscr{F}_\sigma},$$

$$\forall\ \varphi_1,\varphi_2\in\mathscr{F}_\sigma, y\in PE$$

其中

$$\theta_\sigma = \frac{M_1K_1\lambda^\sigma}{\sigma-\lambda} + \frac{M_1K_2(1+\lambda_\alpha)\Lambda^\sigma}{\Lambda-\sigma}$$

证明 取$\varphi_1,\varphi_2\in\mathscr{F}_\sigma$，$y\in PE$，对$t\leqslant 0$有

$$|Q\mathscr{J}(\varphi_1,y)(t) - Q\mathscr{J}(\varphi_2,y)(t)|_E \leqslant$$

$$\int_{-\infty}^{t} |e^{-(t-s)A}Q[f(\varphi_1(s)) - f(\varphi_2(s))]|_E ds \leqslant$$

$$K_2\int_{-\infty}^{t} ((t-s)^{-\alpha} + \Lambda^{\alpha})e^{-\Lambda(t-s)} \times$$

$$|f(\varphi_1(s)) - f(\varphi_2(s))|_F ds \leqslant$$

$$M_1K_2\int_{-\infty}^{t} ((t-s)^{-\alpha} + \Lambda^{\alpha})e^{-\Lambda(t-s)}|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|_E ds \leqslant$$

$$M_1K_2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathscr{F}_\sigma}\int_{-\infty}^{t} ((t-s)^{-\alpha} + \Lambda^{\alpha})e^{-\Lambda(t-s)}e^{-\sigma s}ds$$

因此，利用式(2.2.7)和式(2.2.8)得

$$e^{\sigma t}|Q\mathscr{J}(\varphi_1,y)(t) - Q\mathscr{J}(\varphi_2,y)(t)|_E \leqslant$$

$$M_1K_2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathscr{F}_\sigma}\int_{-\infty}^{t} e^{(\sigma-\Lambda)(t-s)}(t-s)^{-\alpha}ds +$$

$$M_1K_2\Lambda^{\alpha} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathscr{F}_\sigma}\int_{-\infty}^{t} e^{(\sigma-\Lambda)(t-s)}ds \leqslant$$

$$\frac{M_1K_2\gamma_\alpha}{(\Lambda-\sigma)^{1-\alpha}}2\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathscr{F}_\sigma} + \frac{M_1K_2\Lambda^{\alpha}}{\Lambda-\sigma}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathscr{F}_\sigma} \leqslant$$

$$\frac{M_1K_2(1+\gamma_\alpha)}{\Lambda-\sigma}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathscr{F}_\sigma} \qquad (2.2.11)$$

类似地有

$$|P\mathscr{J}(\varphi_1,y)(t) - P\mathscr{J}(\varphi_2,y)(t)|_E \leqslant$$

$$\int_{t}^{0} |e^{-(t-s)A}P[f(\varphi_1(s)) - f(\varphi_2(s))]|_E ds \leqslant$$

$$M_1K_1\lambda^{\alpha}\int_{t}^{0} e^{-\lambda(t-s)}|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|_E ds$$

因此

$$e^{\sigma t}|P\mathscr{J}(\varphi_1,y)(t) - P\mathscr{J}(\varphi_2,y)(t)|_E \leqslant$$

$$M_1K_1\lambda^{\alpha}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathscr{F}_\sigma}\int_{t}^{0} e^{(\sigma-\Lambda)(t-s)}ds \leqslant$$

$$\frac{M_1K_1\lambda^{\alpha}}{\sigma-\lambda}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathscr{F}_\sigma} \qquad (2.2.12)$$

于是,由式(2.2.11)和式(2.2.12)可得

$$\| \mathscr{J}(\varphi_1, y) - \mathscr{J}(\varphi_2, y) \|_{\mathscr{F}_\sigma} \leqslant \theta_\sigma \| \varphi_1 - \varphi_2 \|_{\mathscr{F}_\sigma}$$

其中

$$\theta_\sigma = \frac{M_1 K_1 \lambda^\alpha}{\sigma - \lambda} + \frac{M_1 K_2 (1 + \gamma_\alpha) \Lambda^\alpha}{\Lambda - \sigma}$$

现由谱间隙条件(2.2.5)有

$$\begin{aligned} \lambda + 2M_1 K_1 \lambda^\alpha < \lambda + 3M_1 K_1 K_2 \lambda^\alpha < \\ \Lambda - 3M_1 K_1 K_2 (1 + \gamma_\alpha) \Lambda^\alpha < \\ \Lambda - 2M_1 K_2 (1 + \gamma_\alpha) \Lambda^\alpha \end{aligned}$$

因此,能选取 σ 满足

$$\lambda + 2M_1 K_1 \lambda^\alpha < \sigma < \Lambda - 2M_1 K_2 (1 + \gamma_\alpha) \Lambda^\alpha, \quad (2.2.13)$$

使得

$$\frac{M_1 K_1 \lambda^\alpha}{\sigma - \lambda} < \frac{1}{2}, \frac{M_1 K_2 (1 + \gamma_\alpha) \Lambda^\alpha}{\Lambda - \sigma} < \frac{1}{2}$$

因此,$\theta_\sigma < 1$。即 $\mathscr{J}$ 在 $\mathscr{F}_\sigma$ 上是严格压缩的,对 PE 是一致的,其中 σ 满足式(2.2.13),这就使我们可定义如下一个映照 $\Phi: PE \to QE$。

引理 2.2.3 对任何 σ 满足式(2.2.13),$\theta_\sigma < 1$,$\mathscr{J}$ 在 $\mathscr{F}_\sigma$ 中是严格压缩的,对 PE 一致的。因此,存在一个映照 $\varphi: PE \to \mathscr{F}_\sigma$,使得 $\mathscr{J}(\varphi(y_0), y_0) = \varphi(y_0)$, $\forall y_0 \in PE$。因此可定义映照 $\Phi: PE \to QE$

$$\Phi(y_0) = Q\varphi(y_0)(0) = \int_{-\infty}^{0} e^{sA} Q f(\varphi(y_0)(s)) \mathrm{d}s \quad (2.2.14)$$

命题 2.2.1 考虑流形 $M = \text{graph}\,\Phi$,其中 Φ 由式(2.2.14)所定义,则 M 在式(2.2.1)下是不变的,(即 $S(t)M = M, \forall t \geqslant 0$),有限维的,Lipschitz 连续的,且具有小于 1 的 Lip 常数,M 可特征表为

$$M = \left\{ \begin{array}{l} u_0 \in E, u_0 \text{ 属于完全轨线} \{u(t; u_0)\}_{t \in R}, \\ \text{式(2.2.1) 的解 } |u(t; u_0)|_E = O(e^{-\sigma t}), t \to -\infty \end{array} \right\} \quad (2.2.15)$$

其中 σ 为满足式(2.2.13)的任意数，进一步，对于任何 $y_0\in PE$，Φ 满足

$$\Phi(y_0)=\int_{-\infty}^{0}e^{sA}Qf(y(s)+\Phi(y(s)))ds \qquad (2.2.16)$$

其中 $y=y(t),t\leqslant 0$，为

$$\frac{dy}{dt}+Ay=Pf(y+\Phi(y)),y(0)=y_0, \qquad (2.2.17)$$

的解，同时 $\Phi(y_0)=z(0)$，其中 $z=z(t)\in QE$ 为

$$\frac{dz}{dt}+Az=Qf(y+\Phi(y)),t\leqslant 0 \qquad (2.2.18)$$

的解，$|z(t)|_E=O(e^{-\sigma t}),t\to-\infty$，其中 σ 满足式(2.2.13)，$y=y(t)\in PE,t\leqslant 0$ 为式(2.2.17)的解。

证明 为看到 M 具有特征式(2.2.15)，我们固定 σ 满足式(2.2.13)，且以 M_σ 表示式(2.2.15)的右端。由定义，$u_0\in M_\sigma$ 当且仅当存在连续函数 $(-\infty,0]\ni t\to u(t;u_0)\in E,u(0;u_0)=u_0,u(\cdot,u_0)\in\mathscr{F}_\sigma$，且为式(2.2.1)的解

$$u(t;u_0)=e^{-(t-\tau)A}u(\tau;u_0)+\int_{\tau}^{t}e^{-(t-s)A}f(u(s;u_0))ds$$

(2.2.19)

$\forall\,\tau\leqslant t\leqslant 0$。此时有

$$|e^{-(t-\tau)A}Qu(\tau;u_0)|_E\leqslant K_2e^{-\Lambda(t-T)}u(\tau;u_0)|_E\leqslant$$
$$K_2e^{-\Lambda t}\|u(\cdot,u_0)\|_{\mathscr{F}_\sigma}e^{(\Lambda-\sigma)\tau}\to 0,\tau\to-\infty$$

(2.2.20)

以 Q 作用于积分方程(2.2.19)，令 $\tau\to-\infty$ 可得

$$Qu(t;u_0)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-s)A}Qf(u(s;u_0))ds,\quad \forall t\leqslant 0$$

(2.2.21)

另一方面，P 作用式(2.2.19)，置 $t=0$ 得

$$Pu_0=e^{\tau A}Pu(\tau;u_0)+\int_{\tau}^{0}e^{sA}Pf(u(s;u_0))ds \quad (2.2.22)$$

因$\{e^{tA}P\}_{t\in\mathbb{R}}$形成一个群，乘式(2.2.22)以$e^{-\tau A}P$得

$$Pu(\tau;u_0)=e^{-\tau A}Pu_0-\int_\tau^0 e^{-(\tau-s)A}Pf(u(s;u_0))\mathrm{d}s,\tau\leqslant 0 \tag{2.2.23}$$

因此，基于式(2.2.21)和式(2.2.23)，由式(2.2.19)推出

$$u(t;u_0)=e^{-tA}Pu_0-\int_t^0 e^{-(t-s)A}Pf(u(s;u_0)\mathrm{d}s+\int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A}Qf(u(s;u_0))\mathrm{d}s,\quad \forall t\leqslant 0 \tag{2.2.24}$$

这意味着$u(0;u_0)\in\mathscr{F}_\sigma$为$\mathscr{J}(\cdot,Pu_0)$的不动点。由引理2.2.3

$$u(\cdot;u_0)=\varphi(Pu_0)$$

因此

$$u_0=\varphi(Pu_0)(0)=Pu_0+\Phi(Pu_0)\in\mathrm{graph}\ \Phi=M$$

这就证明了$M_\sigma\subset M$。反之，如$u_0\in M=\mathrm{graph}\ \Phi$，则有$u_0=Pu_0+\Phi(Pu_0)=\varphi(Pu_0)(0)$。由于$\varphi(Pu_0)$是$\mathscr{J}(\cdot,Pu_0)$的不动点，可得

$$\begin{aligned}
&\varphi(Pu_0)(t)-e^{-(t-\tau)A}\varphi(Pu_0)(\tau)=\\
&e^{-tA}Pu_0-e^{-(t-s)A}e^{-\tau A}Pu_0-\\
&\int_t^0 e^{-(t-s)A}Pf(\varphi(Pu_0)(s))\mathrm{d}s+\\
&e^{-(t-\tau)A}\int_\tau^0 e^{-(\tau-s)A}Pf(\varphi(Pu_0)(s))\mathrm{d}s+\\
&\int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A}Qf(\varphi(Pu_0)(s))\mathrm{d}s-\\
&e^{-(t-\tau)A}\int_{-\infty}^\tau e^{-(\tau-s)A}Qf(\varphi(Pu_0)(s))\mathrm{d}s=\\
&\int_\tau^t e^{-(t-s)A}Pf(\varphi(Pu_0)(s))\mathrm{d}s\\
&+\int_\tau^t e^{-(t-s)A}Qf(\varphi(Pu_0)(s))\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

$$\tau\leqslant t\leqslant 0$$

因此

$$\varphi(Pu_0)(t) = e^{-(t-\tau)A}\varphi(Pu_0)(\tau) +$$
$$\int_\tau^t e^{-(t-s)A} f(\varphi(Pu_0)(s))\mathrm{d}s$$

这就表明 $\varphi(Pu_0)$ 为式(2.2.1)的解,$\varphi(Pu_0)\in\mathscr{F}_\sigma$ 为 $\mathscr{J}(\cdot, Pu_0)$ 的一个不动点。因此,$u_0\in M_\sigma$,$M\subset M_\sigma$,于是 $M=M_\sigma$。

从特征式(2.2.15)可看到 M 是不变的。因此式(2.2.16)、(2.2.17)、(2.2.18)成立。对于 Φ 的 Lipschitz 连续性,取 $y_1, y_2\in PE$,且注意 σ 满足式(2.2.13)得

$$\begin{aligned}
&|\Phi(y_1) - \Phi(y_2)|_E \leqslant \\
&\int_{-\infty}^0 |e^{sA}Q[f(\varphi(y_1)(s)) - f(\varphi(y_2)(s))]|_E \mathrm{d}s \leqslant \\
&M_1K_2\int_{-\infty}^0 e^{\Lambda s}(|s|^{-\alpha} + \Lambda^\alpha)|\varphi(y_1)(s) - \varphi(y_2)(s)|_E \mathrm{d}s \leqslant \\
&M_1K_2 \|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)\|_{\mathscr{F}_\sigma}\int_{-\infty}^0 (|s|^{-\alpha} + \Lambda^\alpha)e^{(\Lambda-\sigma)s}\mathrm{d}s \leqslant \\
&\frac{M_1K_2(1+\gamma_\alpha)\Lambda^\alpha}{\Lambda-\sigma}\|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)\|_{\mathscr{F}_\sigma}
\end{aligned} \tag{2.2.25}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)\|_{\mathscr{F}_\sigma} = \\
&\|\mathscr{J}(\varphi(y_1), y_1) - \mathscr{J}(\varphi(y_2), y_2)\|_{\mathscr{F}_\sigma} \leqslant \\
&\|\mathscr{J}(\varphi(y_1), y_1) - \mathscr{J}(\varphi(y_2), y_1)\|_{\mathscr{F}_\sigma} + \\
&\|\mathscr{J}(\varphi(y_2), y_1) - \mathscr{J}(\varphi(y_2), y_2)\|_{\mathscr{F}_\sigma} \leqslant \\
&\theta_\sigma\|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)\|_{\mathscr{F}_\sigma} + \|e^{-tA}P(y_1 - y_2)\|_{\mathscr{F}_\sigma} \leqslant \\
&\theta_\sigma\|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)\|_{\mathscr{F}_\sigma} + K_1|y_1 - y_2|_E
\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

其中 $\theta_\sigma<1$。因此由式(2.2.26)给出

$$\|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)\|_{\mathscr{F}_\sigma} \leqslant \frac{K_1}{1-\theta_\sigma}|y_1 - y_2|_E \tag{2.2.27}$$

将式(2.2.27)代入式(2.2.25)得

$$|\Phi(y_1)-\Phi(y_2)|_E \leqslant \frac{M_1K_1K_2(1+\gamma_\alpha)\Lambda^\alpha}{(1-\theta_\sigma)(\Lambda-\sigma)}|y_1-y_2|_E \tag{2.2.28}$$

由谱间隙条件(2.2.25),能选取

$$\sigma=\Lambda-3M_1K_1K_2(1+\gamma_\alpha)\Lambda^\alpha$$

这里的 σ 满足式(2.2.13)。对此 σ 有

$$\theta_\sigma=\frac{M_1K_1\lambda^\alpha}{\sigma-\lambda}+\frac{M_1K_2(1+\gamma_\alpha)}{\Lambda-\sigma}=$$

$$\frac{M_1K_1\lambda^\alpha}{\Lambda-\lambda-3M_1K_1K_2(1+\gamma_\alpha)\Lambda^\alpha}+\frac{M_1K_2(1+\gamma_\alpha)\Lambda^\alpha}{3M_1K_1K_2(1+\gamma_\alpha)\Lambda^\alpha}$$

由于

$$\Lambda-\lambda-3M_1K_1K_2(1+\gamma_\alpha)\Lambda^\alpha>3M_1K_1K_2\lambda^\alpha$$

因此

$$\theta_\sigma<\frac{1}{3K_2}+\frac{1}{3K_2}\leqslant\frac{2}{3}$$

即有

$$\frac{1}{1-\theta_\sigma}<3$$

由式(2.2.28)得

$$|\Phi(y_1)-\Phi(y_2)|_E\leqslant l|y_1-y_2|_E \tag{2.2.29}$$

其中

$$l\leqslant\frac{M_1K_1K_2(1+\gamma_\alpha)\Lambda^\alpha}{(1-\theta_\sigma)(\Lambda-\sigma)}<\frac{3M_1K_1K_2(1+\gamma_\alpha)\Lambda^\alpha}{3M_1K_1K_2(1+\gamma_\alpha)\Lambda^\alpha}=1$$

这就证明 Φ 是 Lipschitz 连续的,且具有 Lip 常数小于 1。我们清楚地知道 M 具有 PE 的维数,它是有限的,因 P 是一个有限维数的投影,这就完成了命题 2.2.1 的证明。

下面研究渐近完全性质。考虑式(2.2.1)不同轨线的比较。固定 $u_0\in E$,令 $v_0=y_0+z_0,y_0\in PE,z_0\in QE$。我们研究差

$$\psi(t) = S(t)v_0 - S(t)u_0, t \geqslant 0 \tag{2.2.30}$$

对于任何 $0 \leqslant t \leqslant \tau$，对于 $Q\psi$ 在 $[0,t]$ 上和 $P\psi$ 在 $[t,\tau]$ 上利用常数变易法公式可得

$$\begin{aligned}
&\psi(t) = e^{-tA}(z_0 - Qu_0) + \\
&\int_0^t e^{-(t-s)A}Q[f(S(s)v_0) - f(S(s)u_0)]ds + \\
&e^{-(t-\tau)A}P(S(\tau)v_0 - S(\tau)u_0) - \\
&\int_t^\tau e^{-(t-s)A}P[f(S(s)v_0) - f(S(s)u_0)]ds
\end{aligned} \tag{2.2.31}$$

设 $|\psi(t)|_E = O(e^{-\sigma t}), t \to +\infty$。对 $\sigma > \lambda$ 有

$$\begin{aligned}
&|e^{-(t-\tau)A}P[S(\tau)v_0 - S(\tau)u_0]|_E \leqslant \\
&K_1 e^{-\lambda(t-\tau)}|\psi(\tau)|_E = O(e^{(\lambda-\sigma)\tau}), \tau \to +\infty
\end{aligned}$$

因此，如在式(2.2.31)中令 $\tau \to +\infty$，利用式(2.2.30)可得

$$\begin{aligned}
&\psi(t) = e^{-tA}(z_0 - Qu_0) + \\
&\int_0^t e^{-(t-s)A}Q[f(S(s)u_0 + \psi(s)) - f(S(s)u_0)]ds - \\
&\int_t^{+\infty} e^{-(t-s)A}P[f(S(s)u_0 + \psi(s)) - f(S(s)u_0)]ds
\end{aligned} \tag{2.2.32}$$

反之，设函数 $\psi \in C([0,+\infty),E)$，使得 $\psi(t) = O(e^{-\sigma t}), t \to +\infty$。且对 $z_0 \in QE, u_0 \in E$ 满足式(2.2.32)。则 $y_0 = Pu_0 + P\psi(0), v_0 = y_0 + z_0$，置

$$v(t) = \psi(t) + S(t)u_0, t \geqslant 0 \tag{2.2.33}$$

首先注意到

$$\begin{aligned}
&v(0) = \psi(0) + u_0 = P\psi(0) + z_0 - Qu_0 + u_0 = \\
&y_0 - Pu_0 + z_0 - Qu_0 + u_0 = y_0 + z_0 = v_0
\end{aligned}$$

其次

$$\begin{aligned}
&y_0 = Pu_0 + P\psi(0) = \\
&Pu_0 - \int_0^{+\infty} e^{sA}P[f(S(s)u_0 + \psi(s)) - f(S(s)u_0)]ds
\end{aligned}$$

因此,改写式(2.2.32)为

$$\psi(t)=e^{-tA}(z_0-Qu_0)+e^{-tA}(y_0-Pu_0)+$$
$$\int_0^t e^{-(t-s)A}Q[f(S(s)u_0+\psi(s))-f(S(s)u_0)]ds+$$
$$\int_0^t e^{-(t-s)A}P[f(S(s)u_0+\psi(s))-f(S(s)u_0)]ds=$$
$$e^{-tA}(v_0-u_0)+$$
$$\int_0^t e^{-(t-s)A}[f(S(s)u_0+\psi(s))-f(S(s)u_0)]ds$$

于是

$$v(t)=\psi(t)+S(t)u_0=e^{-tA}v_0+\int_0^t e^{-(t-s)A}f(v(s))ds$$

$v(t)$为满足式(2.2.1)具 $v(0)=v_0=y_0+z_0$ 的解。$v(t)=S(t)v_0$。最后有

$$|S(t)v_0-S(t)u_0|_E=|\psi(t)|_E=O(e^{-\sigma t}),t\to+\infty$$

因此,我们得到如下引理:

引理 2.2.4 设 $\psi\in C([0,+\infty),E)$,$|\psi(t)|_E=O(e^{-\sigma t})$,$t\to+\infty$,其中 $\sigma>\lambda$。则 ψ 满足式(2.2.32),$u_0\in E$,$z_0\in QE$。当且仅当 ψ 具有形式:

$$\psi(t)=S(t)v_0-S(t)u_0,\forall t\geqslant 0,v_0\in E$$

更进一步,v_0,u_0,z_0 和 ψ 具有关系

$$v_0=Pu_0+P\psi(0)+z_0$$

以上引理启示我们作空间 $\mathscr{F}_\sigma$ 的类似定义。令空间

$$\mathscr{G}_\sigma=\{\psi\in C([0,\infty),E):\|\psi\|_{\mathscr{G}_\sigma}=\sup_{t\geqslant 0}(e^{\sigma t}|\psi(t)|_E)<+\infty\}$$

这是一个 Banach 空间,具模 $\|\cdot\|_{\mathscr{G}_\sigma}$。对 $u_0\in E$,$z_0\in QE$,$\psi\in\mathscr{G}_\sigma$,$t\geqslant 0$。我们定义一个形式的映照:

$$W(\psi,u_0,z_0)(t)=e^{-tA}(z_0-Qu_0)+$$
$$\int_0^t e^{-(t-s)A}Q[f(S(s)u_0+\psi(s))-f(S(s)u_0)]ds-$$

$$\int_t^{-\infty} e^{-(t-s)A} P[f(S(s)u_0 + \psi(s)) - f(S(s)u_0)] ds$$

(2.2.34)

注意到对 $u_0 \in E, z_0 \in QE, \psi$ 满足式(2.2.32)当且仅当 $\psi = W(\psi, u_0, z_0)$。

引理 2.2.5 设 σ 满足式(2.2.13)。表达式式(2.2.34)定义一个映照 $W: \mathscr{G}_\sigma \times E \times QE \to \mathscr{G}_\sigma$ 满足：

$$\| W(\psi, u_0, z_0) \|_{\mathscr{G}_\sigma} \leqslant K_2 |z_0 - Qu_0|_E + \theta_\sigma \| \psi \|_{\mathscr{G}_\sigma}$$

(2.2.35)

$$\| W(\psi_1, u_0, z_0) - W(\psi_2, u_0, z_0) \|_{\mathscr{G}_\sigma} \leqslant \theta_\sigma \| \psi_1 - \psi_2 \|_{\mathscr{G}_\sigma}$$

(2.2.36)

其中 $u_0 \in E, z_0 \in QE, \psi, \psi_1, \psi_2 \in \mathscr{G}_\sigma; \theta_\sigma$ 在引理 2.2.2 中定义，特别 $\theta_\sigma < 1$。

证明 固定 σ 满足式(2.2.13)，取 $u_0 \in E, z_0 \in QE, \psi \in \mathscr{G}_\sigma$。则有

$$|W(\varphi, u_0, z_0)(t)|_E \leqslant K_2 e^{-\Lambda t} |z_0 - Qu_0|_E +$$
$$M_1 K_2 \int_0^t ((t-s)^{-\alpha} + \Lambda^\alpha) e^{-\Lambda(t-s)} |\psi(s)|_E ds +$$
$$M_1 K_1 \lambda^\alpha \int_t^{+\infty} e^{-\lambda(t-s)} |\psi(s)|_E ds$$

因此，

$$e^{\sigma t} |W(\psi, u_0, z_0)(t)|_E \leqslant K_2 e^{(\sigma-\Lambda)t} |z_0 - Qu_0|_E +$$
$$M_1 K_2 \| \psi \|_{\mathscr{G}_\sigma} \int_0^t ((t-s)^{-\alpha} + \Lambda^\alpha) e^{-(\Lambda-\sigma)(t-s)}) ds +$$
$$M_1 K_1 \lambda^\alpha \| \psi \|_{\mathscr{G}_\sigma} \int_t^{+\infty} e^{(\sigma-\Lambda)(t-s)} ds \leqslant$$
$$K_2 |z_0 - Qu_0|_E + \left\{ \frac{M_1 K_2 (1 + \gamma_\alpha) \Lambda^\alpha}{\Lambda - \alpha} + \frac{M_1 K_1 \lambda^\alpha}{\sigma - \lambda} \right\} \| \psi \|_{\mathscr{G}_\sigma}$$

于是

$$\| W(\psi, u_0, z_0) \|_{\mathscr{G}_\sigma} \leqslant K_2 |z_0 - Qu_0|_E + \theta_\sigma \| \psi \|_{\mathscr{G}_\sigma}$$

这就证明了式(2.2.35)。现对 $\psi_1,\psi_2\in\mathscr{G}_\sigma$,

$$|W(\psi_1,u_0,z_0)(t)-W(\psi_2,u_0,z_0)(t)|_E\leqslant$$

$$\int_0^t K_2((t-s)^{-\alpha}+\Lambda^\alpha)e^{-\Lambda(t-s)}M_1|\psi_1(s)-\psi_2(s)|_E ds+$$

$$\int_t^{+\infty}K_1\lambda^\alpha e^{-\lambda(t-s)}M_1|\psi_1(s)-\psi_2(s)|_E ds$$

因此,

$$e^{\sigma t}|W(\psi_1,u_0,z_0)(t)-W(\psi_2,u_0,z_0)(t)|_E\leqslant$$

$$M_1K_2\|\psi_1-\psi_2\|_{\mathscr{G}_\sigma}\int_0^t((t-s)^{-\alpha}+\Lambda^\alpha)e^{(\sigma-\Lambda)(t-s)}ds+$$

$$M_1K_1\lambda^\alpha\|\psi_1-\psi_2\|_{\mathscr{G}_\sigma}\int_t^{+\infty}e^{(\sigma-\lambda)(t-s)}ds$$

于是

$$\|W(\psi_1,u_0,z_0)-W(\psi_2,u_0,z_0)\|_{\mathscr{G}_\sigma}\leqslant\theta_\sigma\|\psi_1-\psi_2\|_{\mathscr{G}_\sigma},$$

这就证明了式(2.2.36)。因 $\theta_\sigma<1$,这就完成了引理 2.2.5 的证明。

定义 2.2.1 由引理 2.2.5,定义了映照 $W:\mathscr{G}_\sigma\times E\times QE\to\mathscr{G}_\sigma$,它在 $\mathscr{F}_\sigma$ 上是严格压缩的,在 $E\times QE$ 上是一致的,因此存在一个映照 $\psi:E\times QE\to\mathscr{G}_\sigma$,使得

$$W(\psi(u_0,z_0),u_0,z_0)=\psi(u_0,z_0),\forall u_0\in E,\forall z_0\in QE$$

我们能定义一个映照 $\Psi_{u_0}:QE\to PE$,对每个 $u_0\in E$,

$$\Psi_{u_0}(z_0)=Pu_0+P\psi(u_0,z_0)(0),\forall z_0\in QE\quad(2.2.37)$$

定义 $N_{u_0}=\text{graph }\Psi_{u_0},\forall u_0\in E$,我们有

命题 2.2.2 对任何 $u_0\in E$,有

$$|\Psi_{u_0}(z_1)-\Psi_{u_0}(z_2)|_E\leqslant l'|z_1-z_2|_E,\forall z_1,z_2\in QE,\quad(2.2.38)$$

其中 $0<l'<1$。更进一步,Ψ_{u_0}满足

$$\Psi_{u_0}(z_0)=Pu_0-$$

$$\int_0^{+\infty}e^{sA}P[f(S(s)(\Psi_{u_0}(z_0)+z_0))-f(S(s)(u_0)]ds\quad(2.2.39)$$

而 N_{u_0} 具有特征

$$N_{u_0} = \{v_0 \in E;\ |S(t)v_0 - S(t)u_0|_E = O(e^{-\sigma t}), t \to +\infty\} \tag{2.2.40}$$

其中 σ 为满足式(2.2.13)的任意数。

证明 固定 $u_0 \in E$、考虑 $z_1, z_2 \in QE$, $\psi_i = \psi(u_0, z_i)$, $i=1,2$。由定义

$$\begin{aligned}
&\Psi_{u_0}(z_1) - \Psi_{u_0}(z_2) = \\
&Pu_0 + P\psi(u_0, z_1)(0) - Pu_0 - P\psi(u_0, z_0)(0) + \\
&PW(\psi_1, u_0, z_1)(0) - PW(\psi_2, u_0, z_2)(0) = - \\
&\int_0^{+\infty} e^{sA} P[f(S(s)u_0 + \psi_1(s) - f(S(s)u_0 + \psi_2(s))]ds
\end{aligned}$$

因 σ 满足式(2.2.13)有

$$\begin{aligned}
&|\Psi_{u_0}(z_1) - \Psi_{u_0}(z_2)|_E \leqslant \\
&M_1 K_1 \lambda^\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} |\psi_1(s) - \psi_2(s)|_E ds \leqslant \\
&M_1 K_1 \lambda^\alpha \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathscr{C}_\sigma} \int_0^{+\infty} e^{(\sigma-\lambda)s} ds = \\
&\frac{M_1 K_1 \lambda^\alpha}{\sigma - \lambda} \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathscr{C}_\sigma}
\end{aligned}$$

因 ψ_i 为 $W(\cdot, u_0, z_i)(i=1,2)$ 的不动点，于是有

$$\begin{aligned}
\|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathscr{C}_\sigma} = &\|W(\psi_1, u_0, z_1) - W(\psi_2, u_0, z_2)\|_{\mathscr{C}_\sigma} \leqslant \\
&\|W(\psi_1, u_0, z_1) - W(\psi_2, u_0, z_1)\|_{\mathscr{C}_\sigma} + \\
&\|W(\psi_2, u_0, z_1) - W(\psi_2, u_0, z_2)\|_{\mathscr{C}_\sigma} \leqslant \\
&\theta_\sigma \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathscr{C}_\sigma} + \|e^{-tA} Q(z_1 - z_2)\|_{\mathscr{C}_\sigma} \leqslant \\
&\theta_\sigma \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathscr{C}_\sigma} + K_2 |z_1 - z_2|_E
\end{aligned}$$

因 $0 < \theta_\sigma < 1$，σ 满足式(2.2.13)，可得

$$\|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathscr{C}_\sigma} \leqslant \frac{K_2}{1 - \theta_\sigma} |z_1 - z_2|_E$$

因此

$$|\Psi_{u_0}(z_1) - \Psi_{u_0}(z_2)|_E \leqslant l' |z_1 - z_2|_E$$

其中

$$l' \leqslant \frac{M_1K_1K_2\lambda^a}{(1-\theta_\sigma)(\sigma-\lambda)}$$

由谱间隙条件(2.2.5),能取 $\sigma=\lambda+3M_1K_1K_2\lambda^a$ 满足式(2.2.13)。则由命题 2.2.1,$\theta_\sigma<\frac{2}{3}$,

$$\frac{1}{1-\theta_\sigma}<3$$

因此

$$l'<\frac{3M_1K_1K_2\lambda^a}{3M_1K_1K_2\lambda^a}=1$$

这就证明了式(2.2.38),现固定 $u_0\in E$,令 N_σ 表示式(2.2.40)的右端,注意到引理 2.2.4,我们有 $v_0\in N_\sigma$ 当且仅当

$$v_0=Pu_0+P\psi(u_0,Qu_0)+Qv_0=$$

$$\Psi_{u_0}(Qv_0)+Qv_0\in \text{graph}\ \Psi_{u_0}=N_{u_0}$$

因此,$N_{u_0}=N_\sigma$,式(2.2.40)得证。为了证明式(2.2.39),由 Ψ_{u_0}定义可知

$$\Psi_{u_0}(z_0)=Pu_0-$$

$$\int_0^{+\infty}e^{sA}P[f(S(s)u_0+\psi(u_0,z_0)(s))-f(S(s)u_0)]ds$$

由引理 2.2.4 得

$$S(s)u_0+\psi(u_0,z_0)(s)=S(s)(\Psi_{u_0}(z_0)+z_0),$$

$$s\geqslant 0,u_0\in E,z_0\in QE$$

引理 2.2.5 证毕。

引理 2.2.6 给定任何 $u_0\in E$,存在唯一 $v_0\in M\cap N_{u_0}$,这就定义了一个映照 $\pi:E\to M$,$\pi u_0=v_0$。更进一步,π 将 E 的有界子集变为 M 的有界子集。

证明 固定 $u_0\in E$;我们证明存在仅有一个 $v_0\in M\cap N_{u_0}$。为此,注意到 $v_0\in M\cap N_{u_0}$,当且仅当

$$v_0=Pv_0+\Phi(Pv_0)\in \text{graph}\ \Phi$$

和 $$v_0 = \Psi_{u_0}(Qv_0) + Qv_0 \in \text{graph } \Psi_{u_0}$$

它等价于

$$Pv_0 = \Psi_{u_0}(Qv_0), Qv_0 = \Phi(Pv_0) \tag{2.2.41}$$

但式(2.2.41)也等价于

$$Pv_0 = \Psi_{u_0}(\Phi(Pv_0)), Qv_0 = \Phi(Pv_0) \tag{2.2.42}$$

因 Φ, Ψ_{u_0}均为 Lip 连续，且其 Lip 常数严格小于 1，式(2.2.42)的关系式是严格压缩的。

$$PE \ni y_0 \to \Psi_{u_0}(\Phi(y_0)) \in PE$$

因此式(2.2.42)具有唯一解 $v_0 \in E$，v_0 为 $M \cap N_{u_0}$中唯一的元素。令 $\pi u_0 = v_0$。对于 π 的有界性，固定$\tilde{v}_0 \in M$，$u_0 \in E$ 为任意的。因 $\pi u_0 = P\pi u_0 + \Phi(P\pi u_0) \in \text{graph } \Phi$，$\tilde{v}_0 = P\tilde{v}_0 + \Phi(P\tilde{v}_0)$。我们有

$$|Q\pi u_0 - Q\tilde{v}_0|_E \leqslant |\Phi(P\pi u_0) - \Phi(P\tilde{v}_0)|_E \leqslant$$

$$l|P\pi u_0 - P\tilde{v}_0|_E \tag{2.2.43}$$

其中 $l<1$ 为 Φ 的 Lip 常数。由式(2.2.43)和

$$u_0 = \Psi_{u_0}(Qu_0) + Qu_0 \in \text{graph } \Psi_{u_0}$$

$$\pi u_0 = \Psi_{u_0}(Q\pi u_0) + Q\pi u_0 \in \text{graph } \Psi_{u_0}$$

于是有

$$|P\pi u_0 - P\tilde{v}_0|_E \leqslant$$

$$|P\pi u_0 - Pu_0|_E + |Pu_0 - P\tilde{v}_0|_E =$$

$$|\Psi_{u_0}(Q\pi u_0) - \Psi_{u_0}(Qu_0)|_E + |Pu_0 - P\tilde{v}_0|_E \leqslant$$

$$l'|Q\pi u_0 - Qu_0|_E + |Pu_0 - P\tilde{v}_0|_E \leqslant$$

$$l'|Q\pi u_0 - Q\tilde{v}_0|_E + l'|Q\tilde{v}_0 - Qu_0|_E + |Pu_0 - P\tilde{v}_0|_E \leqslant$$

$$ll'|P\pi u_0 - P\tilde{v}_0|_E + l'|Q\tilde{v}_0 - Qu_0|_E + |Pu_0 - P\tilde{v}_0|_E$$

其中 $l'<1$。因此

$$|P\pi u_0 - P\tilde{v}_0|_E \leqslant$$

$$\frac{1}{1-ll'}\{l'|Q\tilde{v}_0 - Qu_0|_E + |Pu_0 - P\tilde{v}_0|_E\} \leqslant$$

$$\frac{K_1 + l'K_2}{1-ll'}|u_0 - \tilde{v}_0|_E \tag{2.2.44}$$

由式(2.2.43)、(2.2.44)得

$$|\pi u_0|_E \leqslant |\pi u_0 - \tilde{v}_0|_E + |\tilde{v}_0|_E \leqslant$$

$$|\tilde{v}_0|_E + |P\pi u_0 - P\tilde{v}_0|_E + |Q\pi u_0 - Q\tilde{v}_0|_E \leqslant$$

$$|\tilde{v}_0|_E + \frac{(1+l)(K_1 + l'K_2)}{1-ll'}|u_0 - \tilde{v}_0|_E \tag{2.2.45}$$

因此，

$$|\pi u_0|_E \leqslant m_0 + m_1|u_0|_E,$$

其中

$$m_1 = \frac{(1+l)(K_1 + l'K_2)}{1-ll'},$$

$$m_0 = (1+m_1)|\tilde{v}_0|_E$$

因 $\tilde{v}_0$ 为固定的，依据式(2.2.45)推出 π 将 E 的有界子集变为 M 的有界子集，这就完成了引理 2.2.6 的证明。

命题 2.2.3 渐近完全性：对任何 $u_0\in E$，

$$|S(t)u_0 - S(t)\pi u_0|_E \leqslant K_\eta(|u_0|_E)e^{-\eta t}, \forall\, t\geqslant 0$$

其中 $\eta<\Lambda-2M_1K_2(1+\gamma_\alpha)\Lambda^\alpha$，$K_\eta$ 依赖于 η 和 $|u_0|_E$。

证明 设 $u_0\in E$，由定义，$\pi u_0\in N_{u_0}$，由引理 2.2.4

$$S(t)u_0 - S(t)\pi u_0 = \psi(u_0, Q\pi u_0)(t), t\geqslant 0$$

由式(2.2.35),对 σ 满足式(2.2.13)有

$$\begin{aligned}&\|\psi(u_0,Q\pi u_0)\|_{\mathscr{C}_\sigma}=\\&\|W(\psi(u_0,Q\pi u_0),u_0,Q\pi u_0)\|_{\mathscr{C}_\sigma}\leqslant\\&K_2|Qu_0-Q\pi u_0|_E+\theta_\sigma\|\psi(u_0,Q\pi u_0)\|_{\mathscr{C}_\sigma}\end{aligned}$$

因此

$$\|\psi(u_0,Q\pi u_0)\|_{\mathscr{C}_\sigma}\leqslant\frac{K_2}{1-\theta_\sigma}|Qu_0-Q\pi u_0|_E$$

对 $t\geqslant0$,

$$\begin{aligned}|S(t)u_0-S(t)\pi u_0|_E\leqslant|\psi(u_0,Q\pi u_0)(t)|_E\leqslant\\\|\psi(u_0,Q\pi u_0)\|_{\mathscr{C}_\sigma}e^{-\sigma t}\leqslant\\\frac{K_2}{1-\theta_\sigma}|Qu_0-Q\pi u_0|_E e^{-\sigma t}\end{aligned}$$

由引理2.2.6,当 u_0 在有界子集中,πu_0 在 E_0 中是一致有界的,因此有

$$|S(t)u_0-S(t)\pi u_0|_E\leqslant K_\sigma(|u_0|_E)e^{-\sigma t},\forall\ t\geqslant0$$

其中 $K_\sigma=K_\sigma(|u_0|_E)$ 依赖于 σ 和 $|u_0|_E$ 的界,显然在上述关系中,将 σ 置换为 $\eta<\Lambda-2M_1K_2(1+\gamma_a)\Lambda^a$,($K_\eta=K_{\sigma0},\eta\leqslant\sigma_0=\lambda+2M_1K_1\lambda^a$)也是成立的,这就完成了证明。

我们想要得到映照 π 和流形 N_{u_0},更进一步的性质:

命题 2.2.4 $\pi:E\to M$ 是连续收缩的,即 $\pi:E\to M$ 是连续的,π 限制在 $M\subset E$ 上是和 M 等同的。

证明 $\pi|M$ 等同于 M 直接从 πu_0 的定义和 $u_0\in N_{u_0}$ 直接推得。对于 π 的连续性,固定 $u_0\in E$,取任何序列 $\{u_j\}_{j\in\mathscr{N}},u_j\to u_0,j\to+\infty$。如 πu_j 不收敛于 πu_0,则有

$$|\pi u_{jk}-\pi u_0|>\varepsilon\qquad(2.2.46)$$

其中 $\varepsilon>0$,$\{u_{jk}\}_{k\in\mathscr{N}}$ 为子序列,由引理2.2.6,$\{\pi u_{jk}\}$ 在 M 中有界。因 M 是局部紧的(它是有限维的),$\{\pi u_{jk}\}$ 的子序列仍记为 πu_{jk} 收敛于 $v_0\in M,k\to\infty$:

$$\pi u_{jk} \to v_0, k \to +\infty$$

由命题 2.2.3，

$$|S(t)u_{jk} - S(t)\pi u_{jk}|_E \leqslant Ce^{-\sigma t}, \forall t \geqslant 0, \forall k \in \mathcal{N} \tag{2.2.47}$$

其中 σ 满足式(2.2.13)，C 与 k,t 无关。对每个固定 $t \geqslant 0$，在式(2.2.47)中令 $k \to +\infty$ 得

$$|S(t)u_0 - S(t)v_0|_E \leqslant Ce^{-\sigma t}, \forall t \geqslant 0$$

因此，由 N_{u_0} 的特征，$v_0 \in N_{u_0}$。但 $v_0 \in M$，由 π 的定义，$\pi u_0 = u_0$。这和式(2.2.46)矛盾，因此推出 $\pi u_j \to \pi u_0$，π 是连续的。

引理 2.2.7 我们有

$$(u_0, z_0) \to \Psi_{u_0}(z_0) \tag{2.2.48}$$

是一个连续映照：$E \times QE \to PE$，且

$$(u_0, z_0, t) \to \psi(u_0, z_0)(t) \tag{2.2.49}$$

是一个连续映照：$E \times QE \times [0, \infty) \to E$。

证明 固定 $u_0 \in E$，$z_0 \in QE$。取任何序列 $\{u_j\}_{j \in \mathcal{N}}$ 和 $\{z_j\}_{j \in \mathcal{N}}$ 使得

$$u_j \to u_0, z_j \to z_0, j \to +\infty$$

从式(2.2.35)和 $\psi(u_j, z_j)$ 为 $W(\cdot, u_j, z_j)$ 的不动点可知

$$\| \psi(u_j, z_j) \|_{\mathscr{C}_\sigma} \leqslant \frac{K_2}{1 - \theta_\sigma} |z_j - Qu_j|_E$$

因此

$$\begin{aligned}
|\psi_{u_j}(z_j)|_E = |Pu_j + P\psi(u_j, z_j)(0)|_E \leqslant \\
K_1 |u_j|_E + K_1 \| \psi(u_j, z_j) \|_{\mathscr{C}_\sigma} \leqslant \\
K_1 |u_j|_E + \frac{K_1 K_2}{1 - \theta_\sigma} |z_j - Qu_j|_E
\end{aligned}$$

这表明 $\{\Psi_{u_j}(z_j)\}_j$ 在 PE 中是有界的。因 PE 是有限维的。如果 $\{\Psi_{u_j}(z_j)\}_j$ 不收敛于 $\Psi_{u_0}(z_0)$，则如前所证，可选取子序列 $\{u_{jk}\}_{k \in \mathcal{N}}$ 和 $\{z_{jk}\}_{k \in \mathcal{N}}$ 使得

$$|\Psi_{u_{jk}}(z_{jk}) - \Psi_{u_0}(z_0)|_E \geqslant \varepsilon, \varepsilon > 0 \qquad (2.2.50)$$

$$\Psi_{u_{jk}}(z_{jk}) \to \tilde{y}_0, k \to +\infty, \tilde{y}_0 \in PE$$

注意到$z_j + \Psi_{u_j}(z_j) \in N_{u_j}$，且为有界的。由命题2.12和命题2.2.3有

$$|S(t)(z_{jk} + \Psi_{u_{jk}}(z_{jk})) - S(t)\pi u_{jk}|_E \leqslant Ce^{-\sigma t}, \forall t \geqslant 0$$

其中σ满足式(2.2.13)，C与k，t无关。令$k \to \infty$得

$$|S(t)(z_0 + \tilde{y}_0) - S(t)\pi u_0|_E \leqslant Ce^{-\sigma t}, \forall t \geqslant 0$$

因此$z_0 + \tilde{y}_0 \in N_{u_0} = \text{graph } \Psi_{u_0}$。于是有$\tilde{y}_0 = \Psi_{u_0}(z_0)$。因

$$\Psi u_{jk}(z_{jk}) \to \Psi_{u_0}(z_0), k \to +\infty$$

它和式(2.2.50)矛盾。因此$\Psi_{u_j}(z_j) \to \pi u_0(z_0)$，式(2.2.48)得证。

对于式(2.2.49)，由引理2.2.4有

$$\phi(u_0, z_0)(t) = S(t)(\Psi_{u_0}(z_0) + z_0) - S(t)u_0$$

因此，从式(2.2.48)和$(t, u_0) \to S(t)u_0$的连续性得到式(2.2.49)。

最后，我们有

命题 2.2.5 $E = \bigcup_{u_0 \in M} N_{u_0}$是$E$的连续叶状结构，进一步，叶片沿着半流具有“平移”性质：$S(t)N_{u_0} = N_{S(t)u_0}, t \geqslant 0, \forall u_0 \in E$。$S(t) \cdot \pi = \pi \cdot S(t), \forall t \geqslant 0$。

证明 首先注意到$E = \bigcup_{v_0 \in M} N_{v_0}$，由命题2.2.2和命题2.13，$u_0 \in N_{\pi u_0}, \forall u_0 \in E$。

令$h: PE \times QE \to E$，定义为

$$h(y, z) = \Psi_{y+\Phi(y)}(\Phi(y) + z) + \Phi(y) + z$$

从式(2.2.48)可知h是连续的。进一步，

$$h(y, QE) = \text{graph } \Psi_{y+\Phi(y)} = \text{通过 } y \text{ 的叶片} + \Phi(y) =$$
$$\text{通过 } \Psi_{y+\Phi(y)}(\Phi(y)) \text{ 的叶片} + \Phi(y) = \text{通过 } h(y,0) \text{ 的叶片}$$

其中我们用到了$y = \Phi_{y+\Phi(y)}(\Phi(y))$(引理2.2.6)，同理有

$$h(y, 0) = \Psi_{y+\Phi(y)}(\Phi(y)) + \Phi(y) = y + \Phi(y)$$

因此

$$h(PE,0) = \text{graph } \Phi = M$$

于是，$E = \bigcup_{u_0 \in M} N_{u_0}$ 为 E 的连续叶片结构。

从 N_{u_0} 的特征，易知 $S(t)N_{u_0} = N_{S(t)u_0}$，相同的特征和 π 的定义，给出 $S(t) \cdot \pi = \pi \cdot S(t)$。

定理 2.2.2 的证明 我们知道，

$$|f_\theta(u) - f_\theta(v)|_F \leqslant M_1 |u - v|_E, \forall\, u, v \in E \tag{2.2.51}$$

其中

$$M_1 = d_1(\sqrt{2}\rho) + \frac{4\sqrt{2}\, d_0(\sqrt{2}\rho)}{\rho}$$

基于式(2.2.51)和谱间隙条件，应用定理 2.2.1 对于截断方程，可知 $\{S_\theta(t)\}_{t\geqslant 0}$ 具有惯性流形 $M_\theta = \text{graph } \Phi_\theta$，其中 $\Phi_{\theta_z}: PE \to QE$ 具有小于 1 的 Lip 常数，我们现从 M_θ 出发，去得到方程(2.2.1)的惯性流形。

记 $B_0 = B_E(\rho)$，令 $\mathscr{B}, \widetilde{\mathscr{B}} \subset B_0$ 为原来方程的一个吸收集，因 $\mathscr{B}$ 为吸收的，则存在 $t_0 = t_0(B_0)$，使得

$$S(t)B_0 \subset \mathscr{B}, \forall\, t \geqslant t_0 \tag{2.2.52}$$

令

$$\mathscr{B}_1 = \bigcup_{t \geqslant t_0} S(t) B_0$$

则 $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}$，$\overline{\mathscr{B}_1} \subset B_0$，$S(t)\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}_1$，$\forall\, t \geqslant 0$。因此 $S(t)|_{\mathscr{B}_1} = S_\theta(t)|_{\mathscr{B}_1}$，且 $\mathscr{B}_1$ 为原来方程的吸收集，令 $M_1 = M_\theta \cap \mathscr{B}_1$。则

$$\begin{aligned} S(t)M_1 &= S_\theta(t)M_1 = S_\theta(t)M_\theta \cap S_\theta(t)\mathscr{B}_1 \\ &\subset M_\theta \cap \mathscr{B}_1 = M_1, \forall t \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.2.53}$$

因此，M_1 对于原来方程和截断方程都是正不变的。

因 $\overline{\mathscr{B}_1} \subset B_0$，能选取 ε，$0 < \varepsilon < 1$，使得 $\nu_\varepsilon(\mathscr{B}_1) \subset B_0$，其中

$$\nu_\varepsilon(\mathscr{B}_1) = \{v \in E, |v - u|_E < \varepsilon, u \in \mathscr{B}_1\}$$

置 $M_\varepsilon = M_\theta \cap \nu_\varepsilon(\mathscr{B}_1)$，$M_\varepsilon$ 为 M_1 在 M_θ 中的开邻域，现考虑在

M_θ 中的惯性形式$\{S_\theta(t)|_{M_\theta}\}_{t\geqslant 0}$。因 M_θ 为 Lip 连续的，有限维的，不变的，可得 $S_\theta(\cdot)$是连续的：$[0,t_0]\times M_\theta\to M_\theta$。因此 $S_\theta(t)|_{M_\theta}$为 M_θ 的一个同胚$(t\geqslant 0)$。因 $S_\theta(t)M_1\subset M_1, t\geqslant 0, M_\varepsilon$ 为 M_θ 中 M_1 的一个邻域，从 $S_\theta(\cdot)$的连续性：$[0,t_0]\times M_\theta\to M_\theta$ 推出存在 M_θ 中 M_1 的一个邻域 M_δ 使得

$$S_\theta(t)M_\delta\subset M_\varepsilon, \forall t\in[0,t_0] \qquad (2.2.54)$$

无损于一般性，我们能设 M_δ 具有形式 $M_\delta=M_\theta\cap\nu_\delta(\mathscr{B}_1)$，$0<\delta<\varepsilon$。

由式(2.2.52)和式(2.2.54)可得

$$S(t)M_\delta\subset M_\varepsilon, S(t)|_{M_\delta}=S_\theta(t)|_{M_\delta}, \forall t\geqslant 0$$

令

$$M=\bigcup_{t\geqslant 0}S(t)M_\delta$$

我们证明 M 即为要求的惯性流形。事实上，由定义有 $S(t)M\subset M$，$\forall t\geqslant 0$。现 $S_\theta(t)|_{M_\theta}$为 M_θ 的一个同胚，因此它使 M_θ 的一个开集变为 M_θ 的一个开集。$S(t)M_\delta(=S_\theta(t)M_\delta)$在 M_θ 中是开的$(t\geqslant 0)$，因而 M 本身在 M_θ 中也是开的。$I+\Phi_\theta: PE\to M_\theta$ 是连续的，集合

$$O=(I+\Phi_\theta)^{-1}(M)$$

在 PE 中是开的，$M=\text{graph }\Phi$，Φ 为一个 Lip 函数，由以下给定

$$\Phi=\Phi_\theta|_O: O\subset PE\to QE$$

且具有 Lip 常数小于 1。

从 M 的渐近完全性，令 $\mathscr{B}\subset E$ 是有界的，因 $\mathscr{B}_1$ 对于原来方程是吸收的，则存在 $t_1\geqslant 0, t_1=t_1(\mathscr{B})$，使得 $S(t)\mathscr{B}\subset\mathscr{B}_1, \forall\ t\geqslant t_1$。

给定 $u_0\in\mathscr{B}$，令$\tilde{u}_0=S(t)u_0, \tilde{u}_0\in\mathscr{B}_1$。由截断方程 M_θ 的渐近完全性，存在$\tilde{v}_0\subset M_\theta$，使得

$$|S_\theta(t)\tilde{u}_0-S_\theta(t)\tilde{v}_0|_E\leqslant K_\eta e^{-\eta t}, \forall t\geqslant 0 \qquad (2.2.55)$$

其中

$$0<\eta<\Lambda-2M_1K_2(1+\gamma_\alpha)\lambda^\alpha$$

K_η 仅依赖于 η，因 $\tilde{u}_0 \in \mathscr{B}_1$。

选取 $t_2 = t_2(\eta)$ 使得

$$K_\eta e^{-\eta t_2} < \delta \tag{2.2.56}$$

置 $v_0 = S_\theta(t_2)\tilde{v}_0$，则 $v_0 \in M$。进一步，从式(2.2.55)、(2.2.56)，可得

$$\begin{aligned}
&|S(t+t_1+t_2)u_0 - S(t)v_0|_E = \\
&|S(t+t_2)S(t_1)u_0 - S_\theta(t)v_0|_E = |S(t+t_2)\tilde{u}_0 \\
&S_\theta(t)S_\theta(t_2)\tilde{v}_0|_E = |S_\theta(t+t_2)\tilde{u}_0 \\
&S_\theta(t+t_2)\tilde{v}_0|_E \leqslant K_\eta e^{-\eta(t-t_2)} = \\
&K_\eta e^{-\eta t_2} e^{-\eta t} \leqslant \\
&\delta e^{-\eta t}
\end{aligned}$$

因此，置 $t_3 = t_1 + t_2$，$t_3 = t_3(\mathscr{B}, \eta)$，以及 $\delta < \varepsilon < 1$，可得

$$|S(t+t_2)u_0 - S(t)v_0|_E \leqslant e^{-\eta t}, \forall t \geqslant 0$$

这就证明了 M 的渐近完全性。最后，如果原来方程具有整体吸引子 $\mathscr{A}$。我们从 M 的渐近完全性和不变性 $S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}$，$t \geqslant 0$。得到

$$\operatorname{dist}_E(\mathscr{A}, M) = \operatorname{dist}_E(S(t)\mathscr{A}, M) = O(e^{-\eta t}), t \to +\infty, \eta > 0$$

因此 $\mathscr{A} \subset \overline{M}$。但因 $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}_1$，$M \supset M_\theta \cap \nu_\delta(\mathscr{B}_1)$。因此，$\mathscr{A} \subset M$。这就完成了证明。

下面考虑惯性流形的法向性和法向双曲性。

定理 2.2.3 如果 $f \in C^1(E, F)$，则定理 2.2.1 中所定义的惯性流形 $M = \text{graph } \Phi \in C^1$，其中 Φ 满足 Sack 方程

$$\begin{aligned}
&D\Phi(y)(-Ay + P_n f(y + \Phi(y)) + A\Phi(y)) = \\
&Q_n f(y + \Phi(y))
\end{aligned} \tag{2.2.57}$$

其中一切 y 在 Φ 的定义域中。如果考虑满足定理 2.2.2 的假设，$f_\theta \in C^1(E, F)$，则相同结论成立。

证明 因在定理 2.2.2 中的惯性流形被作为截断方程惯性流形的一个限制得到，充分证明这个结果成立当 f 满足整体 Lip 连续。设定理 2.2.1 的一切条件满足，且 $f \in C^1(E, F)$。

定理的证明分三步进行。为简单计，置 $\varphi(y)(t)=\varphi(y,t)$，$y\in PE$，$t\leqslant 0$，其中 $\varphi: PE\to\mathscr{F}_\sigma$ 为引理 2.2.3 所给定。

第一步： 微分的选取。

在引理 2.2.3 中，我们已经看到 $\Phi(y)=P\varphi(y,0)$ 和

$$\varphi(y,t)=e^{-tA}Py-\int_t^0 e^{-(t-s)A}Pf(\varphi(y,s))ds+\int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A}Qf(\varphi(y,s))ds \qquad (2.2.58)$$

我们考虑 Φ 的微分。首先寻求 φ 的微分。因有 $D\Phi(y)=Q\partial_y\varphi(y,0)$。由式(2.2.58)对 y 作形式上的微分，我们看到 $\partial_y\varphi(y)$ 为 $\mathscr{L}_1(\cdot,y)$的一个不动点，其中 $\mathscr{L}_1$ 给定为

$$\mathscr{L}_1(\Delta,y)(t)=e^{-tA}P-\int_t^0 e^{-(t-s)A}PDf(\varphi(y,s))\Delta(s)ds+\int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A}QDf(\varphi(y,s))\Delta(s)ds$$

如同对于映照 $\mathscr{L}$ 一样，我们必须验证映照 $\mathscr{L}_1$ 是完全确定的，在 Δ 中的某个适当的空间中是严格压缩的，关于 y 是一致的。

对 σ 满足式(2.2.13)，考虑如下空间

$$\mathscr{F}_{1,\sigma}=\{\Delta\in C((-\infty,0],\mathscr{L}(PE,E));$$

$$\|\Delta\|_{\mathscr{F}_{1,\sigma}}=\sup_{t\leqslant 0}(e^{\sigma t}\|\Delta(t)\|_{\mathscr{L}(PE,E)})<+\infty\},$$

它是一个 Banach 空间，具有模 $\|\cdot\|_{\mathscr{F}_{1,\sigma}}$。由于式(2.2.2)有

$$\|Df(u)\|_{\mathscr{L}(E,F)}\leqslant M_1,\forall u\in E \qquad (2.2.59)$$

从这一点，可清楚看到 $\mathscr{L}_1$ 作为一个函数：$\mathscr{F}_{1,\sigma}\times PE\to\mathscr{F}_{1,\sigma}$是完全确定的，在 Δ 中 Lip 连续的，且具有 Lip 常数 θ_σ。对 σ 满足式(2.2.13)，$\theta_\sigma<1$。由此推出存在一个函数 $\Delta: PE\to\mathscr{F}_{1,\sigma}$使得

$$\mathscr{L}_1(\Delta(y),y)=\Delta(y),\forall y\in PE$$

为简单计，置 $\Delta(y)(t)=\Delta(y,t)$；Δ 就是关于 φ 的微分的选取。

第二步： Δ 是连续的。

对固定 $y_0\in PE$，考虑 $y\in PE$ 逼近 y_0。如同式(2.2.26)可得

$$\|\Delta(y)-\Delta(y_0)\|_{\mathscr{F}_{1,\sigma}}\leqslant$$

$$\frac{1}{1-\theta_\sigma}\|\mathscr{L}_1(\Delta(y_0),y)-\mathscr{L}_1(\Delta(y_0),y_0)\|_{\mathscr{F}_{1,\sigma}}$$

因此，为证 Δ 的连续性，仅需证明

$$\|\mathscr{L}_1(\Delta(y_0),y)-\mathscr{L}_1(\Delta(y_0),y_0)\|_{\mathscr{F}_{1,\sigma}}\to 0,y\to y_0$$

取 $\mu<\sigma$，满足式(2.2.13)。则由第一步可知 $\Delta(y_0)\in\mathscr{F}_{1,\mu}$。因此

$$|\mathscr{L}_1(\Delta(y_0),y)(t)-\mathscr{L}_1(\Delta(y_0),y_0)(t)|_E\leqslant$$

$$\|\Delta(y_0)\|_{\mathscr{F}_{1,\mu}}K_2\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\Lambda(t-s)}((t-s)^{-\alpha}+\Lambda^\alpha)N(s,y)\mathrm{e}^{-\mu s}\mathrm{d}s+$$

$$\|\Delta(y_0)\|_{\mathscr{F}_{1,\mu}}K_1\lambda^\alpha\int_{t}^{0}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}N(s,y)\mathrm{e}^{-\mu s}\mathrm{d}s$$

其中

$$N(s,y)=\|Df(\varphi(y_0,s))-Df(\varphi(y,s))\|_{\mathscr{L}(E,F)}$$

于是

$$\|\mathscr{L}_1(\Delta(y_0),y)-\mathscr{L}_1(\Delta(y_0),y_0)\|_{\mathscr{F}_{1,\sigma}}\leqslant$$

$$\|\Delta(y_0)\|_{\mathscr{F}_{1,\mu}}(K_1\lambda^\alpha+K_2)\tilde{N}(y)$$

其中

$$\tilde{N}(y)=$$

$$\sup_{t\leqslant 0}\Big[\mathrm{e}^{(\sigma-\Lambda)t}\int_{-\infty}^{t}((t-s)^{-\alpha}+\Lambda^\alpha)\mathrm{e}^{(\Lambda-\mu)s}N(s,y)\mathrm{d}s+$$

$$\mathrm{e}^{(\sigma-\lambda)t}\int_{t}^{0}\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)s}N(s,y)\mathrm{d}s\Big]$$

为了证明当 $y\to y_0$ 时，$\tilde{N}(y)\to 0$，我们用反证法。设 $\tilde{N}(y_j)>\varepsilon$，其中 $\varepsilon>0$，序列 $\{y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 在 PE 上有 $|y_j-y_0|_E\to 0,j\to+\infty$。于是存在非正数的序列 $\{t_j\}_j$ 使得

$$\mathrm{e}^{(\sigma-\Lambda)t_j}\int_{-\infty}^{t_j}((t_j-s)^{-\alpha}-\Lambda^\alpha)\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)s}N(s,y_j)\mathrm{d}s+$$

$$\mathrm{e}^{(\sigma-\lambda)t_j}\int_{t_j}^{0}\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)s}N(s,y_j)\mathrm{d}s\geqslant\varepsilon,\forall j$$

(2.2.60)

但由式(2.2.59)，$N=N(s,y)$是一致有界于 $2M_1$ 的，因此

$$
\begin{aligned}
&|\text{式(2.2.60)的左端}|\leqslant\\
&2M_1 e^{(\sigma-\Lambda)t_j}\int_{-\infty}^{t_j}(t_j-s)^{-\alpha}+\Lambda^{\alpha})e^{(\Lambda-\mu)s}ds+\\
&2M_1 e^{(\sigma-\lambda)t_j}\int_{t_j}^{0}e^{(\lambda-\mu)s}ds\leqslant\\
&2M_1 e^{(\sigma-\mu)t_j}\left[\frac{(1+\gamma_\alpha)\Lambda^\alpha}{\Lambda-\mu}+\frac{1}{\mu-\lambda}\right]
\end{aligned}
$$

因此，基于式(2.2.60)。t_j 必须有下界，设$-\infty<T\leqslant t_j\leqslant 0,\forall j,T\leqslant 0$。则有

$$
\begin{aligned}
&|\text{式(2.2.60)的左端}|\leqslant\\
&e^{(\sigma-\Lambda)t_j}\int_{-\infty}^{t_j}(t_j-s)^{-\alpha}e^{(\Lambda-\mu)(t_j-s)}N(s,y_j)ds+\\
&\Lambda^\alpha e^{(\sigma-\Lambda)T}\int_{-\infty}^{0}e^{(\Lambda-\mu)s}N(s,y_j)ds+\\
&e^{(\sigma-\lambda)t_j}\int_{T}^{0}e^{(\lambda-\mu)s}N(s,y_j)ds
\end{aligned}
$$

于是，在右端第一个积分中施行变量变换可得

$$
\begin{aligned}
&|\text{式(2.2.60)的右端}|\leqslant\\
&\int_{0}^{+\infty}s^{-\alpha}e^{-(\Lambda-\mu)s}N(t_j-sy_j)ds+\\
&\Lambda^\alpha e^{(\sigma-\Lambda)T}\int_{-\infty}^{0}e^{(\Lambda-\mu)s}N(s,y_j)ds+\\
&\int_{T}^{0}e^{(\lambda-\mu)s}N(s,y_j)ds
\end{aligned}
\tag{2.2.61}
$$

但由式(2.2.27)，

$$
\begin{aligned}
&|\varphi(y_0,t_j-s)-\varphi(y,t_j-s)|_E\leqslant\\
&\|\varphi(y_0)-\varphi(y)\|_{\mathcal{F}_\sigma}e^{-\sigma(t_j-s)}\leqslant\\
&\frac{K_1}{1-\theta_\sigma}e^{-\sigma(T-s)}|y_j-y_0|_E\to 0,j\to\infty
\end{aligned}
$$

因此 $N(t_j-s,y_j)\to 0,j\to+\infty$。对点态 $s\geqslant 0,N(s,y_j)\to 0$。由

Lebesgue 控制收敛定理应用于式(2.2.61)右端,可知|式(2.2.60)左端|→0,$j\to+\infty$。它和式(2.2.60)矛盾。因此,当$|y-y_0|_E\to 0$,$\tilde{N}(y)\to 0$,于是 $\Delta=\Delta(y)$是从 PE 到 $\mathscr{F}_{1,\eta}$的连续函数。

第三步: $\partial_y\varphi(y)=\Delta(y)$。

考虑 $y,h\in PE$,我们有

$$\begin{aligned}&\varphi(y+h,t)-\varphi(y,t)-\Delta(y,t)h=\\&\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-(t-s)A}Q[f(\varphi(y+h,s))-\\&f(\varphi(y,s))-Df(\varphi(y,s))\Delta(y,s)h]\mathrm{d}s+\\&\int_{t}^{0}\mathrm{e}^{-(t-s)A}P[f(\varphi(y+h,s))-f(\varphi(y,s))+\\&Df(\varphi(y,s))\Delta(y,s)h]\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{2.2.62}$$

令

$$\rho(y,h,t)=\frac{|\varphi(y+h,t)-\varphi(y,t)-\Delta(y,t)h|_E}{|h|_E},$$

$$\forall y,h\in PE,\forall t\leqslant 0,$$

$$r(u,w)=\frac{|f(u+w)-f(u)-Df(u)w|_F}{|w|_E},\forall u,w\in E,$$

$$R(y,h,t)=r(\varphi(y,t),\varphi(y-h,t)-\varphi(y,t)),$$

$$\forall y,h\in PE,\forall t\leqslant 0$$

因此,在式(2.2.62)中的括号相加、相减 $Df(\varphi(y,s)(\varphi(y+h,s)-(\varphi(y,s)))$,能估计 $\rho=\rho(y,h,t)$

$$\begin{aligned}&\rho(y,h,t)\leqslant K_2\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\Lambda(t-s)}((t-s)^{-\alpha}+\Lambda^{\alpha})\times\\&R(y,h,s)\frac{|(\varphi(y+h,s)-\varphi(y,s)|_E}{|h|_E}\mathrm{d}s+\\&K_1\lambda^{\alpha}\int_{t}^{0}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}R(y,h,s)\frac{|\varphi(y+h,s)-\varphi(y,s)|_E}{|h|_E}\mathrm{d}s+\end{aligned}$$

$$M_1 K_2 \int_{-\infty}^{t} e^{-\Lambda(t-s)}((t-s)^{-\alpha}+\Lambda^{\alpha})\rho(y,h,s)ds +$$

$$M_1 K_1 \lambda^{\alpha} \int_{t}^{0} e^{-\lambda(t-s)} \rho(y,h,s)ds$$

令

$$\tilde{\rho}(y,h) = \sup_{t\leqslant 0}(e^{\sigma t}\rho(y,h,t)) =$$

$$\frac{\| \varphi(y+h,\cdot) - \varphi(y,\cdot) - \Delta(y,\cdot)h \|_{\mathscr{F}_\sigma}}{|h|_E}, \quad \forall y,h \in PE$$

因此,从以上不等式有

$$\tilde{\rho}(y,h) \leqslant$$

$$\tilde{R}(y,h) + \tilde{\rho}(y,h)\left\{\int_{-\infty}^{t} e^{(\sigma-\Lambda)(t-s)}((t-s)^{-\alpha}+\right.$$

$$\left.\Lambda^{\alpha})ds + M_1 K_1 \lambda^{\alpha} \int_{t}^{0} e^{(\sigma-\lambda)(t-s)} ds \right\} \leqslant$$

$$\tilde{R}(y,h) + \theta_\sigma \tilde{\rho}(y,h)$$

其中

$$\tilde{R}(y,h) =$$

$$\sup_{t\leqslant 0}\left\{K_2 e^{\sigma t}\int_{-\infty}^{t}((t-s)^{-\alpha}+\Lambda^{\alpha})e^{-\Lambda(t-s)} \times\right.$$

$$R(y,h,s)\frac{|\varphi(y+h,s)-\varphi(y,s)|_E}{|h|_E}ds +$$

$$\left.K_1 \lambda^{\alpha} e^{\sigma t}\int_{t}^{0} e^{-\lambda(t-s)} R(y,h,s)\frac{|\varphi(y+h,s)-\varphi(y,s)|_E}{|h|_E}ds\right\}$$

于是,因 $\theta_\sigma<1$ 可得

$$\tilde{\rho}(y,h) \leqslant \frac{1}{1-\theta_\sigma}\tilde{R}(y,h)$$

如同在第二步对 $\tilde{N}=\tilde{N}(y)$ 所做的一样,我们能证当 $|h|_E \to 0$ 时,$\tilde{R}(y,h) \to 0$。此时用到了如下不等式

$$\frac{|\varphi(y+h,s)-\varphi(y,s)|_E}{|h|_E} \leqslant \frac{K_1}{1-\theta_\mu}e^{-\mu s}$$

μ 满足式(2.2.13),$\mu < \sigma$

于是 $|h|_E \to 0$ 时，$\tilde{\rho}(y,h) \to 0$。这就证明了 $\partial_y \varphi(y) = \Delta(y)$。

第四步：$\Phi \in C^1(PE,QE)$。

直接从第二步和第三步中，$\varphi(y) = \partial\varphi(y,0)$，有

$$\frac{|\Phi(y+h) - \Phi(y) - D\Phi(y)|_E}{|h|_E} =$$

$$\frac{|Q\varphi(y-h,0) - Q\varphi(y,0) - Q\partial_y\varphi(y,0)h|_E}{|h|_E} =$$

$$\rho(y,h,0) \leqslant$$

$$\tilde{\rho}(y,h) \to 0, h \to 0, \forall y \in PE$$

其中 $\tilde{\rho}(y,h,t)$ 和 $\tilde{\rho}(y,h)$ 已在第三步中定义。

命题 2.2.6 如 $f \in C^1(E,F)$，则每个叶片 $N_{u_0} \in C^1$。更详细地说，对一切 $u_0 \in E$，我们有 $\Psi_{u_0}(z_0) \in C^1(QE,PE)$，$(u_0,z_0) \to D\Psi_{u_0}(z_0)$ 是连续的：$E \times QE \to \mathscr{L}(QE,PE)$。

证明 它类似于定理 2.2.3 有关 Φ 的正则性的证明（略）。

因 Φ 和 $\Psi_{u_0} \in C^1$，考虑切空间从

$$T_{u_0}M = \{\eta + D\Phi(Pu_0)\eta; \eta \in PE\},$$

$$T_{u_0}N_{u_0} = \{\xi + D\Psi_{u_0}(Qu_0)\xi; \xi \in QE\}, \forall u_0 \in M$$

下一个引理说，$E = T_{u_0}M \ominus T_{u_0}N_{u_0}$。因此 $T_{u_0}N_{u_0}$ 是 M 在 u_0 的法向。

引理 2.2.8 对于任何 $u_0 \in M$，具有分解 $E = T_{u_0}M \oplus T_{u_0}N_{u_0}$，而且这种分解在 u_0 处是连续的。

证明 固定 $u_0 \in M$，给定 $\mu \in E$，$\mu = \eta + \xi$ 唯一的，$\eta \in T_{u_0}M$，$\xi \in T_{r_0}N_{u_0}$。这等价于

$$\eta = \eta + D\Phi(Pu_0)\eta + D\Psi_{u_0}(Qu_0)\xi - \xi \quad (2.2.63)$$

其中 $\eta \in PE$，$\xi \in QE$。但式(2.2.63)又等价于

$$P\mu = \eta + D\Psi_{u_0}(Qu_0)\xi, Qu = \xi + D\Phi(Pu_0)\eta$$

即有

$$\begin{cases} \eta = P\mu - D\Psi_{u_0}(Qu_0)Q\mu + D\Psi_{u_0}(Qu_0)D\Phi(Pu_0)\eta \\ \xi = Q\mu - D\Phi(Pu_0)P\mu + D\Phi(Pu_0)D\Psi_{u_0}(Qu_0) \end{cases}$$

(2.2.64)

因 Φ 和 Ψ_{u_0} 具有小于 1 的 Lip 常数，微分 $D\Phi(Pu_0)$ 和 $D\Psi_{u_0}(Qu_0)$ 具有模小于 1，因此 $I-D\Psi_{u_0}(Qu_0)D\Phi(Pu_0)$ 和 $I-D\Phi(Pu_0)D\Psi_{u_0}(Qu_0)$ 分别为在 PE 和 QE 上的可逆算子。于是，式(2.2.64)等价于

$$\begin{cases}\eta = (I - D\Psi_{u_0}(Qu_0)D\Phi(Pu_0))^{-1}(P - D\Psi_{u_0}(Qu_0)Q)\mu \\ \xi = (I - D\Phi(Pu_0)D\Psi_{u_0}(Qu_0))^{-1}(Q - D\Phi(Pu_0)P)\mu\end{cases}$$

因此，可唯一写成

$$\mu = P(u_0)\mu + Q(u_0)\mu$$

其中 $P(u_0)$ 为 E 沿着 $T_{u_0}N_{u_0}$ 到 $T_{u_0}M$ 的投影，给定为

$$P(u_0) = (I + D\Phi(Pu_0))(I - D\Psi_{u_0}(Qu_0)D\Phi(Pu_0))^{-1} \times (P - D\Psi_{u_0}(Qu_0)Q)$$

而 $Q(u_0)$ 为 E 沿着 $T_{u_0}M$ 到 $T_{u_0}N_{u_0}$ 的投影，给定为

$$Q(u_0) = (I + D\Psi_{u_0}(u_0))(I - D\Phi(u_0)D\Psi_{u_0}(Qu_0))^{-1} \times (Q - D\Phi(Pu_0)P)$$

由 Φ 的正则性和命题 2.2.6 可知。$P(u_0)$ 和 $Q(u_0)$ 对于 u_0 是连续的，因而分解 $E=T_{u_0}M\oplus T_{u_0}N_{u_0}$ 是连续的。

现定义切丛和法丛

$$TM = \{(u,\mu) \in E \times E;\quad u \in M, \mu \in T_uM\},$$
$$NM = \{(u,\mu) \in E \times E;\quad u \in M, \mu \in N_uM\}$$

其中，$N_uM=T_uN_u$。

考虑方程(2.2.1)及其一次变分

$$\frac{du}{dt} + Au = f(u), \quad \frac{d\mu}{dt} + A\mu = Df(u)\mu \qquad (2.2.65)$$
$$u(0) = u_0, \quad \mu(0) = \mu_0$$

我们要证明 M 是法向双曲的，即是说切丛 TM 和法丛 NM 在式(2.2.65)下是不变的，而且具有对这些丛的对式(2.2.65)的指数两分法，更详细一点，有如下结果。

引理 2.2.9　切丛 TM 在式(2.2.65)下是不变的，且

$$|\mu(t)|_E \leqslant 2K_1^2 |\mu_0|_E e^{-(\lambda+2M_1K_1\lambda^{\alpha})t}, \forall t \leqslant 0, (u_0, \mu_0) \in TM$$

证明 TM 的不变性直接来自 M 的不变性。事实上,设$(u_0, \mu_0) \in TM$,则

$$u_0 = y_0 + \Phi(y_0), \mu_0 = \eta_0 + D\Phi(y_0)\eta_0, y_0, \eta_0 \in PE$$

令 $y=y(t, y_0), t \in \mathbf{R}$,为如下惯性形式的整体解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + Ay = Pf(y + \Phi(y)), y(0, y_0) = y_0 \quad (2.2.66)$$

再设 $\eta=\eta(t)$为式(2.2.66)第一变分的整体解,即

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} + A\eta = PDf(y + \Phi(y))(\eta + D\Phi(y)\eta), \eta(0) = \eta_0 \quad (2.2.67)$$

因 $M=\mathrm{graph}\ \Phi$ 在式(2.2.1)下是不变的,$\Phi \in C^1$。我们有 $\Phi(y)$满足

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}\Phi(y)}{\mathrm{d}t} + A\Phi(y) = Qf(y + \Phi(y)) \\ &\Phi(y(0, y_0)) = \Phi(y_0) \end{aligned} \quad (2.2.68)$$

式(2.2.68)对 y_0 作微分并作用于 η_0 得

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D\Phi(y)\eta + AD\Phi(y)\eta = \\ &QDf(y + \Phi(y))(\eta + D\Phi(y)\eta), \forall\, t \in \mathbf{R} \end{aligned} \quad (2.2.69)$$

式(2.2.69)+式(2.2.67)得

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\eta + D\Phi(y)\eta) + A(\eta + D\Phi(y)\eta) = \\ &Df(y + \Phi(y))(\eta + D\Phi(y)\eta) \end{aligned}$$

因此 $\mu(t)=\eta(t)+D\Phi(y(t;y_0))\eta(t)$为式(2.2.1)第一变分方程的解,$\forall\, t \in \mathbf{R}$。而且属于 Φ 在 $y(t;y_0) \in \Phi(y(t;y_0)) \in \mathrm{graph}\ \Phi = M$ 的切空间。因此,如置 $u(t)=y(t;y_0)+\Phi(y(t;y_0))$,我们发现$(u, \mu)$为式(2.2.65)具$(u(0), \mu(0))=(u_0, \mu_0)$的解。它属于 $TM, \forall\, t \in \mathbf{R}$。这就证明 TM 在式(2.2.65)下是不变的。

关于 $\mu(t)$的估计,从式(2.2.67)注意到

$$\eta(t)=\mathrm{e}^{-tA}\eta_0-\int_t^0\mathrm{e}^{-(t-s)A}PDf(y(s))+$$

$$\Phi(y(s))(\eta(s)+D\Phi(y(s))\eta(s))\mathrm{d}s$$

因此对 $t\leqslant 0$

$$|\eta(t)|_E\leqslant K_1\mathrm{e}^{-\lambda t}|\eta_0|_E+$$

$$M_1K_1(1+l)\lambda^\alpha\int_t^0\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}|\eta(s)|_E\mathrm{d}s$$

其中 $l<1$ 为 Φ 的 Lip 常数。于是

$$\mathrm{e}^{\lambda t}|\eta(t)|_E\leqslant K_1|\eta_0|_E+2M_1K_1\lambda^\alpha\int_t^0\mathrm{e}^{\lambda s}|\eta(s)|_E\mathrm{d}s$$

由 Gronwall 引理可得

$$|\eta(t)|_E\leqslant K_1|\eta_0|_E\mathrm{e}^{-(\lambda+2M_1K_1\lambda^\alpha)t},\forall t\leqslant 0$$

因此

$$|\mu(t)|_E=|\eta(t)+D\Phi(y(t))\eta(t)|_E\leqslant$$

$$(1+l)K_1|y_0|_E\mathrm{e}^{-(\lambda+2M_1K_1\lambda^\alpha)t}\leqslant$$

$$2K_1|P\mu_0|_E\mathrm{e}^{-(\lambda+2M_1K_1\lambda^\alpha)t}$$

因 $\|P\|_{\mathscr{L}(E)}\leqslant K_1$，最后可得

$$|\mu(t)|_E\leqslant 2K_1^2|\mu_0|_E\mathrm{e}^{-(\lambda+2M_1K_1\lambda^\alpha)t},\forall t\leqslant 0$$

引理 2.2.10 法丛 NM 在式(2.2.65)下是正不变的，且

$$|\mu(t)|_E\leqslant 2K_2^2\frac{1+l'}{1-l'}|\mu_0|_E\mathrm{e}^{-(\Lambda-2M_1K_2(1+\gamma_\alpha)\Lambda^\alpha)t},\forall t\geqslant 0$$

其中 $(u_0,\mu_0)\in NM$，$l'<1$。

证明 这种不变性来自叶片的平移不变性和 M 的不变性。事实上，令 $(u_0,\mu_0)\in NM$。对每一个 $v_0\in N_{u_0}=\text{graph }\Psi_{u_0}$，可写

$$v_0=\Psi_{u_0}(z_0)+z_0,z_0\in QE$$

注意到

$$S(t)N_{u_0}=N_{S(t)u_0}=\text{graph }\Psi_{S(t)u_0}$$

因此

$$S(t)u_0 = \Psi_{S(t)u_0}(z(t)) + z(t), z(t) \in QE, t \geqslant 0 \tag{2.2.70}$$

即有

$$z(t) = QS(t)v_0, \Psi_{S(t)u_0}(z(t)) = PS(t)v_0$$

因此,对 $t \geqslant 0$ 有

$$z(t) = \mathrm{e}^{-tA}z_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A}Qf(S(s)(\Psi_{u_0}(z_0) + z_0))\mathrm{d}s =$$

$$\mathrm{e}^{-tA}z_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A}Qf(\Psi_{S(t)u_0}(z(s)) + z(s))\mathrm{d}s \tag{2.2.71}$$

和

$$\Psi_{S(t)u_0}(z(t)) =$$

$$\mathrm{e}^{-tA}\Psi_{u_0}(z_0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A}Pf(\Psi_{S(t)u_0}(z(s)) + z(s))\mathrm{d}s \tag{2.2.72}$$

置 $\xi = \xi(t), t \geqslant 0$ 为式(2.2.71)第一变分方程的解,即有

$$\xi(t) = \mathrm{e}^{-tA}\xi_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A}QDf(\Psi_{S(t)u_0}(z(s)) + z(s)) \times$$
$$(D\Psi_{S(t)u_0}(z(s))\xi(s) + \xi(s))\mathrm{d}s \tag{2.2.73}$$

选取 $\xi_0 = Qu_0, \mu_0 = D\Psi_{u_0}(Pu_0)\xi_0 + \xi_0$

现将式(2.2.72)对 z_0 作微分,并作用 ξ_0 得

$$D\Psi_{S(t)u_0}(z(t))\xi(t) = \mathrm{e}^{-tA}D\Psi_{u_0}(z_0)\xi_0 +$$
$$\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A}PDf(\Phi_{S(t)u_0}(z(s)) + z(s)) \times$$
$$(D\Phi_{S(s)u_0}(z(s))\xi(s) + \xi(s))\mathrm{d}s \tag{2.2.74}$$

因此,从式(2.2.73)和式(2.2.74)有

$$\mu(t) = D\Psi_{S(t)u_0}(z(t))\xi(t) + \xi(t) \in T_{S(t)v_0}N_{S(t)u_0}$$

为式(2.2.1)第一变分方程的解:

$$\mu'(t) + A\mu = PDf(S(t)v_0)\mu, \mu(0) = D\Psi_{u_0}(z_0)\xi_0 + \xi_0$$

如置 $z_0 = Pu_0$，则有 $v_0 = u_0$，$\mu(0) = \mu_0$。因此

$$\mu(t) \in T_{S(t)u_0}N_{S(t)u_0} = N_{S(t)u_0}M, \forall t \geqslant 0$$

因此 $(u(t), \mu(t)) \in NM$，$\forall t \geqslant 0$，其中置 $u(t) = S(t)u_0$。这就表明 NM 在式(2.2.65)下是正不变的。

对于 $\xi(t)$ 的估计，从式(2.2.73)对 $t \geqslant 0$ 有

$$|\xi(t)|_E \leqslant K_2 e^{-\Lambda t}|\xi_0|_E +$$
$$M_1K_2(1 + l')\int_0^t ((t-s)^{-\alpha} + \Lambda^\alpha)e^{-\Lambda(t-s)}|S(s)|_E ds$$

其中 $l' < 1$ 为 $\Psi_{S(t)u_0}$ 的 Lip 常数的界，置 $b = 2M_1K_2(1+\gamma_\alpha)\Lambda^\alpha$。则

$$e^{(\Lambda-b)t}|\xi(t)|_E \leqslant K_2 e^{-bt}|\xi_0|_E +$$
$$M_1K_2(1 + l')\int_0^t ((t-s)^{-\alpha} + \Lambda^\alpha)e^{-b(t-s)}e^{(\Lambda-b)s}|\xi(s)|_E ds$$

置

$$G(t) = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} e^{(\Lambda-b)s}|\xi(s)|_E$$

因此对 $0 \leqslant t \leqslant T$，

$$e^{(\Lambda-b)t}|\xi(t)|_E \leqslant K_2|\xi_0|_E +$$
$$M_1K_2(1 + l')G(t)\int_0^t ((t-s)^{-\alpha} + \Lambda^\alpha)e^{-b(t-s)}ds \leqslant$$
$$K_2|\xi_0|_E + \frac{M_1K_2(1 + l')(1 + \gamma_\alpha)}{b}G(t)$$

上式取对 $t \in [0, T]$ 的最大值，并代入 b 的表达式可得

$$G(T) \leqslant K_2|\xi_0|_E + \frac{1 + l'}{2}G(T)$$

因此

$$G(t) \leqslant \frac{2K_2}{1 - l'}|\xi_0|_E, \forall t \geqslant 0$$

于是

$$|\xi(t)|_E \leqslant \frac{2K_2}{1 - l'}|\xi_0|_E e^{-(\Lambda - 2M_1K_2(1+\gamma_\alpha)\Lambda^\alpha)t}, \forall t \geqslant 0$$

$$|\mu(t)|_E = |D\Psi_{S(t)u_0}(z(t))\xi(t) + \xi(t)|_E \leqslant$$
$$(1+l')|\xi(t)|_E \leqslant$$
$$2K_2\frac{1+l'}{1-l'}|\xi_0|_E \mathrm{e}^{-(\Lambda-2M_1K_2(1+\gamma_a)\Lambda^a)t}, \forall t \geqslant 0$$

因

$$|\xi_0|_E = |Q\mu_0|_E \leqslant K_2|\mu_0|_E$$

最后得

$$|\mu(t)|_E \leqslant 2K_2^2\frac{1-l'}{1-l'}\mu_0|_E \mathrm{e}^{-(\Lambda-2M_1K_2(1+\gamma_a)\Lambda^a)t}, \forall t \geqslant 0$$

定理2.2.4 在定理2.2.1假设下，如果 $f\in C^1(E,F)$。则惯性流形是法向双曲的。

证明 从引理2.2.9，2.2.10和2.2.11，连同谱间隙条件有

$$\lambda + 2M_1K_1\lambda^a < \Lambda - 2M_1K_2(1+\gamma_a)\Lambda^a$$

因此沿 M 法线的压缩强于沿切向的压缩，定理得证。

现考虑惯性流形的高阶正则性。

定理2.2.5 设定理2.2.1的假设满足，且 $f\in C^{j,\nu}(E,F)$，$j=1,2,\cdots,k;0\leqslant\nu\leqslant1,k\in\mathcal{N}$。$D^jf$ 一致有界和具指数 ν 的整体 Hölder连续。进一步，如下的强谱间隙条件满足：

$$\Lambda_n - 2M_1K_2(1+\gamma_a)\Lambda_n^a \geqslant (k+\nu)(\lambda_n + 2M_1K_1\lambda_n^a) \tag{2.2.75}$$

则惯性流形 $M=\text{graph }\Phi$，使得 $\Phi\in C^{j,\nu}(P_nE,Q_nE)$，$j=1,2,\cdots,k$。

为证明定理2.2.5，引入如下空间：

$$\mathscr{F}_{k,\sigma} = \{\Delta \in C((-\infty,0],M_k^s(PE,E));$$
$$\|\Delta\|_{\mathscr{F}_{k,\sigma}} \equiv \sup_{t\leqslant0} \mathrm{e}^{k\sigma t}\|\Delta(t)|_{M_k^s(PE,E)} < +\infty\}$$

它是一个 Banach 空间，具模 $\|\cdot\|_{\mathscr{F}_{k,\sigma}}$。$M_k^s(PE,E)$表示所有连续对称 k-线性映照：$PE\to E$ 的空间，具有自然模 $\|\cdot\|_{(PE,E)}$。为简单计，置 $\lambda=\lambda_n,\Lambda=\Lambda_n,P=P_n,Q=Q_n$。且满足条件(2.2.75)。

引理2.2.11 在定理2.2.5条件下，则存在 $\partial_y^j\varphi$，$j=1,\cdots,k$，

且 $\partial_y^j\varphi\in\mathscr{F}_{j,\sigma}$，其中 $\varphi(y)$ 为引理2.2.2所给定，σ 满足

$$\Lambda - 2M_1K_2(1+\gamma_a)\Lambda^a > k\sigma > \sigma > \lambda + 2M_1K_1\lambda^a \quad (2.2.76)$$

证明 对 k 作归纳法证明，$k=1$，已在定理2.2.3中证明过。现设引理当 j 直到 $k-1$ 成立，$k\geqslant 2$，现证 $j=k$ 成立。证明分三步。

第一步：准备。

因 $\varphi(y)$ 为 $\mathscr{L}(\cdot,y)$ 的不动点，由方程 $\varphi(y)=\mathscr{L}(\varphi(y),y)$ 对 y 的形式微分可知，$\partial_y^k\varphi(y)$ 为形式映照 $\mathscr{L}_k(\cdot,y)$ 的不动点，

$$\mathscr{L}_k(\Delta,y)(t) =$$

$$-\int_t^0 e^{-(t-s)A}P[G(y,s)+Df(\varphi(y,s))\Delta(s)]ds +$$

$$\int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A}Q[G(y,s)+Df(\varphi(y,s))\Delta(s)]ds$$

其中 $\Delta\in\mathscr{F}_{k,\sigma}$，$G=G(y,s)$ 含有 φ 的一阶到 $k-1$ 阶导数项。由归纳法假设，它们是存在的。现设 $\partial_y^j\varphi\in\mathscr{F}_{j,\sigma}$，$j=1,\cdots,k$，且 f 的导数是有界的，我们有

$$\|G(y,t)\|_{M_k^s(PE,E)}\leqslant m_\sigma e^{-k\sigma t},\forall\ t\leqslant 0 \quad (2.2.77)$$

其中 σ 满足式(2.2.77)，$\mathscr{L}_k$ 为确定的映照：$\mathscr{F}_{k,\sigma}\times PE\to\mathscr{F}_{k,\sigma}$，且满足

$$\|\mathscr{L}_k(\Delta_1,y)-\mathscr{L}_k(\Delta_2,y)\|_{\mathscr{F}_{k,\sigma}}\leqslant\theta_{k\sigma}\|\Delta_1-\Delta_2\|_{\mathscr{F}_{k,\sigma}}$$

其中 $y\in PE$，$\Delta_1,\Delta_2\in\mathscr{F}_{k,\sigma}$，

$$\theta_{k\sigma}=\frac{M_1K_1\lambda^a}{k\sigma-\lambda}+\frac{M_1K_2(1+\lambda_a)\Lambda^a}{\Lambda-k\sigma}$$

σ 满足式(2.2.76)。于是 $\theta_{k\sigma}<1$。因此 $\mathscr{L}_k$ 是在 $\mathscr{F}_{k,\sigma}$ 中的一个严格压缩映照，且在 PE 上一致。于是存在一个函数 $\Delta:PE\to\mathscr{F}_{k,\sigma}$，满足 $\mathscr{L}_k(\Delta(y),y)=\Delta(y)$，$\forall\ y\in PE$。

第二步：Δ 的连续性。

固定 $y_0\in PE$，考虑 $y\in PE$。设 σ 满足式(2.2.76)，μ 也满足式(2.2.76)，$\mu<\sigma$。如式(2.2.26)可得

$$\|\Delta(y)-\Delta(y_0)\|_{\mathscr{F}_{k,\sigma}}\leqslant$$

$$\frac{1}{1-\theta_{k\sigma}}\|\mathscr{L}_k(\Delta(y_0),y)-\mathscr{L}_k(\Delta(y_0),y_0)\|_{\mathscr{F}_{k,\sigma}} \tag{2.2.78}$$

$\Delta\in\mathscr{F}_{k,\sigma}$可得

$$\begin{aligned}&\|\mathscr{L}_k(\Delta(y_0),y)-\mathscr{L}_k(\Delta(y_0),y_0)\|_{\mathscr{F}_{k,\sigma}}\leqslant\\&M(y)+\|\Delta(y_0)\|_{\mathscr{F}_{k,\sigma}}N(y)\end{aligned} \tag{2.2.79}$$

其中

$$\begin{aligned}&M(y)=\\&\sup_{t\leqslant 0}\{K_1\lambda^{\alpha}e^{k\sigma t}\int_t^0 e^{-\lambda(t-s)}\|G(y,s)-G(y_0,s)\|_{M_k^s(PE,F)}ds+\\&K_2e^{k\sigma t}\int_{-\infty}^t((t-s)^{-\alpha}+\Lambda^{\alpha})e^{-\Lambda(t-s)}\times\\&\|G(y,s)-G(y_0,s)\|_{M_k^s(PE,F)}ds\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&N(y)=\sup_{t\leqslant 0}\{K_1\lambda^{\alpha}e^{k\sigma t}\int_t^0 e^{-\lambda(t-s)}\times\\&\|Df(\varphi(y,s))-Df(\varphi(y_0,s))\|_{\mathscr{L}(E,F)}e^{-k\mu s}ds+\\&K_2e^{k\sigma t}\int_{-\infty}^t e^{-\Lambda(t-s)}\times\\&\|Df(\varphi(y,s))-Df(\varphi(y_0,s))\|_{\mathscr{L}(E,F)}e^{-k\mu s}ds\}\end{aligned}$$

如定理2.2.3所证，当 $y\to y_0$ 时，$M(y)$，$N(y)\to 0$。则从式(2.2.78)、(2.2.79)推得 $y\to y_0$时，$\|\Delta(y)-\Delta(y_0)\|_{\mathscr{F}_{k,\sigma}}\to 0$。这就证明了$\Delta$的连续性。

第三步：$\partial_y^k\varphi(y)=\Delta(y)$。对 $y,h\in PE$，令

$$\rho(y,h,t)=\frac{1}{|h|_E^k}[|\varphi(y+h,t)-\varphi(y,t)-\partial_y\varphi(y,t)h-\cdots$$

$$-\frac{1}{(k-1)!}\partial_y^{k-1}\varphi(y)\overbrace{(h,\cdots,h)}^{k-1\text{次}}-\frac{1}{k!}\Big[\Delta(y)\overbrace{(h,\cdots,h)}^{k\text{次}}\Big]_{|E}$$

由归纳法，能证对于 μ 和 σ 满足式(2.2.76)，$\mu<\sigma$，有

$$\begin{aligned}
& e^{k\sigma t}\rho(y,h,t) \leqslant \\
& K_1\lambda^{\alpha}e^{k\sigma t}\int_t^0 e^{-\lambda(t-s)}R(y,h,s)e^{-k\mu s}ds + \\
& K_2e^{k\sigma t}\int_{-\infty}^t ((t-s)^{-\alpha}+\Lambda^{\alpha})e^{-\Lambda(t-s)}R(y,h,s)e^{-k\mu\sigma}ds + \\
& \theta_{k\sigma}\sup_{s\leqslant 0}(e^{k\sigma s}\rho(y,h,s))
\end{aligned}$$

其中 $R(y,h,s)$ 是一致有界的，当 $|h|_E\to 0$ 时，$R(y,h,s)\to 0$。对每点 s，对 $t\leqslant 0$ 取上界得

$$\sup_{t\leqslant 0}(e^{k\sigma t}\rho(y,h,t)) \leqslant \frac{1}{1-\theta_{k\sigma}}\bar{R}(y,h)$$

这里由 Lebesgue 控制收敛定理，当 $|h|_E\to 0$ 时，$\bar{R}(y,h)\to 0$。这就给出了 $\partial_y^k\varphi(y)$ 的存在性，$\partial_y^k\varphi(y)=\Delta(y)\in\mathscr{F}_{k,\sigma}$。

定理2.2.5的证明　由谱间隙条件(2.2.75)，能选取 σ 满足式(2.2.76)，$\partial_y^j\varphi\in\mathscr{F}_{j,\sigma}$，$j=1,2,\cdots,k$。因 $\Phi(y)=Q\varphi(y,0)$，因此 $\Phi\in C^k(PE,QE)$。

$D\Phi$ 的 Hölder 连续性。取 $y_1,y_2\in PE$，则有

$$\begin{aligned}
& \|\partial_y\varphi(y_1,t)-\partial_y\varphi(y_2,t)\|_{\mathscr{L}(E,F)} \leqslant \\
& K_1\lambda^{\alpha}\int_t^0 e^{-\lambda(t-s)}\|Df(\varphi(y_1,s))-Df(\varphi(y_2,s))\|_{\mathscr{L}(E,F)} \times \\
& \|\partial_y\varphi(y_1,s)\|_{\mathscr{L}(E,F)}ds + \\
& K_1\lambda^{\alpha}\int_t^0 e^{-\lambda(t-s)}\|Df(\varphi(y_2,s))\|_{\mathscr{L}(E,F)} \times \\
& \|\partial_y\varphi(y_1,s)-\partial_y\varphi(y_2,s)\|_{\mathscr{L}(E,F)}ds + \\
& K_1\int_{-\infty}^t ((t-s)^{-\alpha}\Lambda\alpha)e^{-\Lambda(t-s)} \times \\
& \|Df(\varphi(y_1,s))-Df(\varphi(y_2,s))\|_{\mathscr{L}(E,F)}\|\partial_y\varphi(y_1,s)\|_{\mathscr{L}(E,F)}ds + \\
& K_2\int_{-\infty}^t ((t-s)^{-\alpha}\Lambda\alpha)e^{-\Lambda(t-s)} \times \\
& \|Df(\varphi(y_2,s)\|_{\mathscr{L}(E,F)}\|\partial_y\varphi(y_1,s)-\partial_y\varphi(y_2,s)\|_{\mathscr{L}(E,F)}ds \leqslant
\end{aligned}$$

$$K_1\lambda^{\sigma}\|\partial_y\varphi(y_1)\|_{\mathscr{L}_{1,\mu}} \times$$

$$\int_t^0 e^{-\lambda(t-s)}M_2|\varphi(y_1,s)-\varphi(y_2,s)|_E^{\nu}e^{-\mu s}ds +$$

$$K_2\|\partial_y\varphi(y_1)\|_{\mathscr{L}_{1,\mu}}\int_{-\infty}^t((t-s)^{-\alpha}\Lambda\alpha)e^{-\Lambda(t-s)} \times$$

$$M_2|\varphi(y_1,s)-\varphi(y_2,s)|_E^{\nu}e^{-\mu s}ds +$$

$$\theta_\sigma e^{-\sigma t}\|\partial_y\varphi(y_1)-\partial_y\varphi(y_2)\|_{\mathscr{L}_{1,\sigma}}$$

其中σ,μ满足式(2.2.13)，$(1+\nu)\mu<\sigma$，M_2为Df的Hölder常数，式(2.2.27)中以μ代替σ，可得

$$\|\partial_y\varphi(y_1)-\partial_y\varphi(y_2)\|_{\mathscr{L}_{1,\sigma}} \leqslant$$

$$\frac{M_2}{1-\theta_\sigma}\frac{K_1^{\nu}}{(1-\theta_\mu)^{\nu}}\|\partial_y\varphi(y_1)\|_{\mathscr{L}_{1,\mu}}$$

$$|y_1-y_2|_E^{\nu}\left\{\frac{K_1\lambda^{\sigma}}{\sigma-\lambda}+\frac{K_1(1+\lambda_\alpha)\Lambda^{\sigma}}{\Lambda-\sigma}\right\}$$

因$\partial_y\varphi(y_1)=\mathscr{L}_1(\partial_y\varphi(y_1),y_1)$有

$$\|\partial_y\varphi(y_1)\|_{\mathscr{L}_{1,\sigma}} \leqslant \frac{K_1}{1-\theta_\mu}$$

因此

$$\|\partial_y\varphi(y_1)-\partial_y\varphi(y_2)\|_{\mathscr{L}_{1,\sigma}} \leqslant C|y_1-y_2|_E^{\nu}$$

其中

$$C=\frac{M_2}{1-\theta_\sigma}\frac{K_1^{1+\nu}}{(1-\theta_\mu)^{1+\nu}}\left\{\frac{K_1\lambda^{\sigma}}{\sigma-\lambda}+\frac{K_2(1+\gamma_\alpha)\Lambda^{\sigma}}{\Lambda-\sigma}\right\}$$

因此$D\Phi(y)=Q\partial_y\varphi(y,0)$得

$$\|D\Phi(y_1)-D\Phi(y_2)\|_{\mathscr{L}(PE,QE)} \leqslant C|y_1-y_2|_E^{\nu}$$

这就证明了$D\Phi$的Hölder连续性。$D^j\Phi$，$j=1,\cdots,k$的Hölder连续性，可用归纳法证明。

于是，可得

定理2.2.6 设定理2.2.5的假设满足，特别具有谱间隙条件(2.2.75)，则叶片$N_{v_0}=\mathrm{graph}\Psi_{v_0}$，使得$\Psi_{v_0}\in C^{j\nu}(QE,PE)$，$j=$

$1,2,\cdots,k$。$\forall\ v_0\in E$。

证明 类似于定理 2.2.5 的证明。

2.3 一维广义 Ginzburg-Landau 方程的有限维惯性形式

在文献[22]中，我们考虑了如下方程：

$$
\begin{aligned}
\partial_t u + \nu u_x = & \chi u + (\gamma_r + \mathrm{i}\gamma_i) u_{xx} - (\beta_r + \mathrm{i}\beta_i)|u|^2 u - \\
& (\delta_r + \mathrm{i}\delta_i)|u|^4 u - (\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i)|u|^2 u_x - \\
& (\mu_r + \mathrm{i}\mu_i) u^2 \overline{u_x}, x \in \mathbf{R}\ t > 0 \qquad (2.3.1)
\end{aligned}
$$

此方程是由文献[18]提出来的。如文献[146]所证明的，当 $\gamma_r>0$，$\nu=0$，$\beta_i=1$，$\beta_r<0$，$\chi<0$，$\delta_r=\delta_i=\lambda_r=\lambda_i=\mu_r=\mu_i=0$ 时，且当 u 的初值比较大时，上述方程的空间周期解将会 blow-up，而相应于这种情形的物理问题所描述的物理运动，并没有发生 blow-up 现象[122]。因此文献[18]中提出的上述方程就使得对客观现实的描述更精确。进而对此方程的解的适定性，长时间行为的研究就显得非常必要。

在文献[22]中，我们得到了如下结论：

定理 2.3.1 当 $\chi>0$，$\delta_r>0$，$\gamma_r>0$，$4\delta_r\gamma_r>(\lambda_i-\mu_i)^2$ 时，方程(2.3.1)的空间周期解在 $H^1_{\mathrm{per}}[0,L]$ 中存在唯一，且由此确定的半群 $S(t)$ $(S(t)u(t)=S(t)u_0,t\geqslant 0,u_0$ 为初值)在 $H^1_{\mathrm{per}}[0,L]$ 中存在有限维吸引子。

下面来证明条件 $4\gamma_r\delta_r>(\lambda_i-\mu_i)^2$ 是不可改进的。如果 $4\gamma_r\delta_r\leqslant(\lambda_i-\mu_i)^2$，考虑空间周期解 $u=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$，代入式(2.3.1)取实部后解出 R^2 得

$$
\begin{aligned}
R^2 = & \frac{1}{2\delta_r}\Big(-(\beta_r-(\lambda_i-\mu_i)k)\pm \\
& \sqrt{(\beta_r-(\lambda_i-\mu_i)k)^2-4\delta_r\gamma_r k^2+4\delta_r\chi}\Big) =
\end{aligned}
$$

$$\frac{k}{2\delta_r}\left(-\left(\frac{\beta_r}{k}-(\lambda_i-\mu_i)\right)\pm\right.$$

$$\left.\sqrt{\left(\frac{\beta_r}{k}-(\lambda_i-\mu_i)\right)^2-4\delta_r\gamma_r+\frac{4\delta_r\chi}{k^2}}\right)$$

可见当 $k\to\pm\infty$ 时，$R^2\to+\infty$，这说明解 blow-up，所以 $4\gamma_r\delta_r>(\lambda_i-\mu_i)^2$ 是不可改进的。

因为式(2.3.1)的解半群 $S(t)$ 具有有限维吸引子，为了有效地考虑解的长时间行为，我们期望用一个有限维常微分方程组来描述吸引子。为此，必须考虑惯性流形，关于吸引子和惯性流形的定义见文献[80]。惯性流形存在的一个很重要的条件是谱间隙条件：$\lambda_{m+1}-\lambda_m>M_0^2\frac{1+l}{l}(\lambda_{m+1}^{\alpha}+\lambda_m^{\alpha})$，这里 $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是 $-\gamma_r\partial_{xx}$ 具有周期边界条件的一组特征值（$\lambda_m=\gamma_r\left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2$，$L$ 是空间周期长度），$l\leqslant\frac{1}{8}$ 给定，$M_0>0$ 是估计得到的一个常数。如谱间隙条件满足，即

$$\gamma_r\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2(2m+1)>M_0\frac{1+l}{l}\frac{2\pi}{L}\gamma_r^{\frac{1}{2}}(2m+1)$$

即

$$\frac{1+l}{l}\gamma_r^{-\frac{1}{2}}L<\frac{2\pi}{M_0}$$

从上式可以看出，当 L 适当小或 γ_r 充分大时，谱间隙条件才能满足。由文献[80]中的结论，此时，我们得到了式(2.3.1)的惯性流形的存在性，这里就不详细讨论了。

本文的目的是设法改进上述结果。考虑方程(2.3.1)的一种适当简化形式：

$$\begin{aligned}u_t=\chi u+\gamma u_{xx}-(\beta_r+\mathrm{i}\beta_i)|u|^2u-\\(\delta_r+\mathrm{i}\delta_i)|u|^4u-(\lambda_r+\mathrm{i}\lambda_i)(|u|^2u)_x\end{aligned}\qquad(2.3.2)$$

$x\in\mathbf{R}^1$，$t>0$，$\gamma,\delta_r>0$。显然式(2.3.2)是式(2.3.1)的一种特殊形式，形如式(2.3.2)的方程是文献[123]中讨论的如下 Ginzburg-Landau 方程：

$$u_t = u_{xx} + (1 - |u|^2)u$$

的一种推广形式，这里 u 是一复值函数。

这里采用一种非线性项线性化方法，使式(2.3.2)的长时间动力学行为可用一组有限维常微分方程组来描述。

首先，引入一些记号：

$$H = L^2_{\text{per}}[0,L] = \{u \in L^2[0,1], u(x) = u(x+L)\},$$

其内积和范数分别定义为：

$$(u,v) = \int_0^L u\bar{v}\,\mathrm{d}x, |u|_0^2 = (u,u), u,v \in H,$$

$$H^n_{\text{per}}[0,L] = \{u: u \in H, u_x \in H, \cdots, u_{\underbrace{x\cdots x}_{n}} \in H\}, n \geqslant 1$$

设 $A = -(\mu + \gamma\partial_{xx})$，对 $\gamma > 0$ 和适当的 μ，则具周期边界条件的特征问题：$-(\mu+\gamma\partial_{xx})g = \lambda g$ 没有零特征值，所以 A 是一线性自伴无界的正算子，故可以定义 A 的幂次 $A^\alpha, \alpha \in [0,1], V_{2\alpha} = D(A^\alpha)$（$A^\alpha$ 的定义域）。由文献[128]，$V_1 = D(A^{\frac{1}{2}}) = H^1_{\text{per}}[0,L], V_2 = D(A) = H^2_{\text{per}}[0,L], V_1, V_2$ 的范数分别记为 $|\cdot|_1, |\cdot|_2$。

由于式(2.3.2)是式(2.3.1)的特殊形式，故 $\gamma, \delta_r > 0$ 和 $4\delta_r\gamma > \lambda_i^2$ 时，式(2.3.2)的整体解在 V_1 中存在唯一，且在 V_1 中存在有限维的整体吸引子 $\mathscr{A}_{\text{GGL}}$。进而，有

命题 2.3.1 如 $u \in \mathscr{A}_{\text{GGL}}$，则存在常数 $\rho_0, \rho_1, \rho_2 > 0$，有

$$|u|_0 \leqslant \frac{\rho_0}{2}, |u|_1 \leqslant \frac{\rho_1}{2}, \| u|_2 \leqslant \frac{\rho_2}{2}$$

即有 $\mathscr{A}_{\text{GGL}} \subset H^2_{\text{per}}[0,L]$。

证明 由文献[22]可知，如 $u \in \mathscr{A}_{\text{GGL}}$，则 $|u|_0 \leqslant \frac{\rho_0}{2}, |u|_1 \leqslant \frac{\rho_1}{2}$ 是显然的。下面只要证 $|u|_2 \leqslant \frac{\rho_2}{2}$。

由文献[22]可知，当 $t > 0$ 时，$u(t)$ 是足够光滑的，则(2.3.2)式与 u_{xxxx} 作内积取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_{xx}|_0^2 + \gamma|u_{xxx}|_0^2 =$$

$$\chi|u_{xx}|_0^2 - \mathrm{Re}\left\{(\beta_r + \mathrm{i}\beta_i)\int_0^L |u|^2 u\,\overline{u}_{xxxx}\mathrm{d}x\right\} -$$

$$\mathrm{Re}\left\{(\delta_r + \mathrm{i}\delta_i)\int_0^L |u|^4 u\,\overline{u}_{xxxx}\mathrm{d}x\right\} - \tag{2.3.3}$$

$$\mathrm{Re}\left\{(\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i)\int_0^L (|u|^2 u)_x\,\overline{u}_{xxxx}\mathrm{d}x\right\}$$

由文献[22]知，存在 $T>0$，当 $t\geqslant T$ 时有

$$|u|_0 \leqslant \rho_0,\ |u|_1 \leqslant \rho_1$$

在下面的估计中，我们用到了嵌入 $|u|_{L^\infty} \leqslant C|u|_1$ 和 Gagliardo-Nirenberg 不等式，估计其中出现的常数 C 表示仅依赖于方程(2.3.2)中的系数，ρ_0，ρ_1 的正常数，这里就不一一区分了，对 $t\geqslant T$，有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_{xx}|_0^2 + \gamma|u_{xxx}|_0^2 \leqslant$$

$$|\chi|\,|u_{xx}|_0^2 + \sqrt{\beta_r^2+\beta_i^2}\left|\int_0^L (|u|^2 u)_x\,\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x\right| +$$

$$\sqrt{\delta_r^2+\delta_i^2}\left|\int_0^L (|u|^4 u)_x\,\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x\right| =$$

$$\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}\left|\int_0^L (|u|^2 u)_{xx}\,\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x\right| \tag{2.3.4}$$

显然，我们只要处理最后一项即可：

$$\left|\int_0^L (|u|^2 u)_{xx}\,\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x\right| \leqslant$$

$$\frac{\gamma}{4}|u_{xxx}|_0^2 + \frac{1}{\gamma}\int_0^L (6|u|\,|u_x|^2 + 3|u|^2|u_{xx}|)^2\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\frac{\gamma}{4}|u_{xxx}|_0^2 + C(\rho_0,\rho_1)\int_0^L |u_x|^4\mathrm{d}x + C(\rho_0,\rho_1)\,|u_{xx}|_0^2$$

对 $\int_0^L |u_x|^4\mathrm{d}x$ 利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式，式(2.3.4)变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_{xx}|_0^2 \leqslant C + C|u_{xx}|_0^2$$

由文献[22]中引理 2.4 有

$$\int_t^{t+1} |u_{xx}(\cdot,\tau)|_0^2 d\tau \leqslant C(\rho_0,\rho_1), t \geqslant T$$

利用一致 Gronwall 不等式得到

$|u_{xx}|_0^2 \leqslant \rho^2, t \geqslant T+1$，$\rho$ 仅与方程中的系数 ρ_0, ρ_1 有关。所以

$$|u|_2 \leqslant \frac{\rho_2}{2}, u \in \mathscr{A}_{GGL}$$

命题 2.3.1 得证。它推广了文献[22]的结果。

为了保持变换后的方程组的耗散性，需要适当改变方程(2.3.2)为

$$u_t = \gamma u_{xx} - (\lambda_r + i\lambda_i)(|u|^2 u)_x - \varphi_\rho \cdot g(u) - (1-\varphi_\rho)\left(\delta_r + 9\gamma + 9\frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{\gamma}\right) \times |u|^4 u \tag{2.3.5}$$

这里 $g(u) = (\beta_r + i\beta_i)|u|^2 u + (\delta_r + i\delta_i)|u|^4 u - \chi u$

$$\varphi_\rho = \varphi\left(\frac{|u|_0^2 + 2|u_x|_0^2 + |u|_{L^6}^6}{\rho^2}\right), \quad 0 < \rho \leqslant \infty$$

$\varphi: \mathbf{R}_+ \to [0,1]$为光滑单调函数，使得 $\varphi(s)=1, 0\leqslant s\leqslant 1, \varphi(s)=0, s\geqslant 2 |\varphi'(s)| \leqslant 2$，我们注意到 φ_ρ 与空间变量无关。如果 $\rho=\infty$，则 $\varphi_\rho=1$，式(2.3.5)就是式(2.3.2)。给定初值 $u_0 \in V_1$，类似文献[22]中的讨论，有

命题 2.3.2 给定初值 $u_0 \in V_1, \gamma, \delta_r > 0, 4\delta_r\gamma > \lambda_i^2$，则式(2.3.5)存在唯一解 $u \in C([0,\infty); V_1) \cap L^2(0,T;V_2) \cap C(0,+\infty; H_{per}^n[0,L])$ ($n \geqslant 2$ 任意)。进一步还有，存在常数 r_0, r_1, r_2（与 u_0 和 ρ 无关）有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} |u|_0 \leqslant r_0, \overline{\lim_{t\to\infty}} |u|_1 \leqslant r_1, \overline{\lim_{t\to\infty}} |u|_2 \leqslant r_2$$

由此可见，方程(2.3.5)存在整体吸引子 $\mathscr{A}_\rho$（有限维性质类似文献[22]得到），且当 $\rho^2 \geqslant 4r^2 = 4(r_0^2 + 2r_1^2 + r_3^2)$（这里 r_3 是 $|u|_{L^6}^3$ 的界）时，$\mathscr{A}_\rho = \mathscr{A}_{GGL}$。

命题 2.3.2 的证明类似于文献[22]中吸收集存在性的证明和命题 2.3.2 的证明，此处略。

由命题2.3.2,可以引进下列函数变换：

$$J(u)=(u,u_x,|u|^2u)=(u,v,w)$$

则 u,v,w 分别满足如下方程(只要用方程(2.3.5)直接计算即可)：

$$\left.\begin{aligned} u_t &= \gamma u_{xx}-(\lambda_r+\mathrm{i}\lambda_i)w_x+\eta_1 \\ v_t &= \gamma v_{xx}-(\lambda_r+\mathrm{i}\lambda_i)w_{xx}+\eta_2 \\ w_t &= \gamma w_{xx}+\eta_3 \end{aligned}\right\} \tag{2.3.6}$$

这里

$$\eta_1=-\varphi_\rho g(u)-(1-\varphi_\rho)\left(9\gamma+\delta_r+9\frac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{\gamma}\right)|u|^4u,$$

$$\eta_2=-\varphi_\rho h(u,v)-$$
$$(1-\varphi_\rho)\left(9\gamma+\delta_r+9\frac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{\gamma}\right)(3|u|^4v+2|u|^2u^2\bar{v}),$$

$$h(u,v)=(\beta_r+\mathrm{i}\beta_i)(2|u|^2v+u^2\bar{v})+$$
$$(\delta_r+\mathrm{i}\delta_i)(2|u|^4v+2|u|^2u^2\bar{v}),$$

$$\eta_3=-(4\gamma|v|^2u^2-2\gamma v^2\bar{u})+2|u|^2\eta_1+u^2\overline{\eta_1}-$$
$$2(\lambda_r+\mathrm{i}\lambda_i)(2|u|^4v+|u|^2u^2\bar{v})-$$
$$(\lambda-\mathrm{i}\lambda_i)(2|u|^2u^2\bar{v}+|u|^4v)$$

对方程组(2.3.6)加上一些附加项如下(也是为了保持耗散性的)：

$$\left.\begin{aligned} u_t &= \gamma u_{xx}-(\lambda_r+\mathrm{i}\lambda_i)w_x+\eta_1+\xi_1 \\ v_t &= \gamma v_{xx}-(\lambda_r+\mathrm{i}\lambda_i)w_{xx}+\eta_2-k_1(v-u_x)+\xi_2 \\ w_t &= \gamma w_{xx}-(4\gamma|v|^2u+2\gamma v^2\bar{u})- \\ &\quad 2|u|^2(\eta_1+\xi_1)+u^2(\overline{\eta_1}+\bar{\xi})- \\ &\quad (k_2-16(\lambda_r^2+\lambda_i^2))\left(1+\frac{1}{\gamma}|u|^4\right)(w-f(u)) \end{aligned}\right\} \tag{2.3.7}$$

这里 $f(u)=|u|^2u$；k_1,k_2 为待定常数；ξ_1,ξ_2 取为

$$\xi_1=-2\gamma|u|^2(w-f(u))+\gamma u^2\overline{(w-f(u))}$$

$$\xi_2 = 2\gamma \bar{u} v(w - f(u)) + 2\gamma uv \overline{(w - f(u))} + 2\gamma u \bar{v}(w - f(u))$$

注意到如果 $v = u_x$，$w = f(u)$，则附加项消失。设 $J(u) = (u, u_x, f(u))$，$u \in V_1$，这些附加项将导致式(2.3.7)的解指数收敛到 $J(u)$。

至此，我们已经看出，如 $u(t)$是式(2.3.5)具初值 $u_0 \in V_1$ 的解，则 $J(u(t))$是式(2.3.7)的解。由式(2.3.7)解的唯一性，反过来结论也对，式(2.3.7)的解的存在唯一性将在下面给出。因此，方程(2.3.5)的解和方程组(2.3.7)的解在集合 $J(V_1)$上具有相同的动力学，有

命题 2.3.3 如 $u(t)$是式(2.3.5)具初值 $u_0 \in V_1$ 的解，则 $J(u(t))$是式(2.3.7)的解。反之，如果(u, v, w)是式(2.3.7)具初值 $J(u_0)$，$u_0 \in V_1$ 的解，则 $u(t)$是式(2.3.5)的解。

下面来研究方程组(2.3.7)的解的存在唯一性。设 $U = (u, v, w)^t$(t 表示转置)，定义 $D(A) \times D(A) \times D(A)$上的算子 **A** 为

$$\mathbf{A}U = \begin{pmatrix} Au + (\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i) w_x \\ Av + k_1 u_x + (\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i) w_{xx} \\ Aw \end{pmatrix},$$

A 如前所定义的。同样定义

$$\tilde{F} = (F_1, F_2, F_3)'$$

这里，$F_1 = \eta_1 + \xi_1 + \mu u$，$F_2 = \eta_2 + \xi_2 - k_1 v + \mu v$，$F_3$ 为(2.3.7)式中第三个方程的右端加 μw，则式(2.3.7)可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U = -\mathbf{A}U + \bar{F}(U) \qquad (2.3.8)$$

算子 **A** 显然不是自伴的，但可以证明 **A** 是一扇形算子，即 $-\mathbf{A}$ 在 $\mathscr{H} = H \times H \times H$ 上生成一解析半群。

引理 2.3.1 算子 **A** 是 $\mathscr{H}$ 上的一扇形算子。

证明 首先注意到 A 是 H 上的扇形算子，所以存在 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 和 $M \geqslant 1$，使得

$$\rho(A) \supset \sum = \{\lambda \mid \theta < |\arg \lambda| \leqslant \pi, \lambda \neq 0\}$$

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{op} \leqslant \frac{M}{|\lambda|}, \lambda \in \Sigma \tag{2.3.9}$$

定义

$$(\mathbf{A} - \lambda)U = \overline{F}$$

这里 $\lambda \in \sum, \overline{F} = (f_1, f_2, f_3)^t \in \mathscr{H}$，则关于 w 的方程可写为

$$Aw - \lambda w = f_3 \tag{2.3.10}$$

由式(2.3.9)，有

$$|w|_0 \leqslant \frac{M}{|\lambda|} |f_3|_0 \tag{2.3.11}$$

式(2.3.10)与 w 作内积取实部，并利用式(2.3.11)得

$$\left|A^{\frac{1}{2}} w\right|_0^2 \leqslant |\lambda| |w|_0^2 + |f_3|_0 |w|_0 \leqslant \frac{M^2 + M}{|\lambda|} |f_3|_0^2 \tag{2.3.12}$$

由式(2.3.10)，有

$$|w_{xx}|_0 \leqslant (|\lambda| + |\mu|) |w|_0 + |f_3|_0 \tag{2.3.13}$$

关于 u 的方程为

$$Au + (\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i) w_x - \lambda_u = f_1$$

由式(2.3.9)、(2.3.12)可得

$$\begin{aligned} |u|_0 \leqslant & \frac{M}{|\lambda|} \left(|f_1|_0 + \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} |w_x|_0 \right) \leqslant \\ & \frac{M}{|\lambda|} \left(|f_1|_0 + \left(\frac{M^2 + M}{|\lambda|} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} |f_3|_0 \right) \leqslant \\ & \frac{M_1}{|\lambda|} (|f_1|_0 + |f_3|_0), M_1 \geqslant 1 \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

上面用到了 $|u_x|_0 \leqslant \left|A^{\frac{1}{2}} u\right|_0, u \in D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$。同样有

$$\left|A^{\frac{1}{2}} u\right|_0^2 \leqslant |\lambda| |u|_0^2 + \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} |w_x|_0 |u|_0 + |f_1|_0 |u|_0 \leqslant$$

$$(|\lambda|+1)|u|_0^2+\frac{1}{2}(\lambda_r^2+\lambda_i^2)|w_x|_0^2+\frac{1}{2}|f_1|_0^2$$

(2.3.15)

最后考虑关于 v 的方程。由式(2.3.9)得

$$|v|_0 \leqslant \frac{M}{|\lambda|}\left(k_1|u_x|_0+\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}|w_{xx}|_0+|f_2|_0\right)$$

由式(2.3.12)、(2.3.13) 和式(2.3.15) 得

$$|v|_0 \leqslant \frac{M_2}{|\lambda|}(|f_1|_0+|f_2|_0+|f_3|_0), M_2 \geqslant 1$$

(2.3.16)

由式(2.3.11)、(2.3.14)和式(2.3.16)得到对 $\lambda\in\sum$,$(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}$ 存在,且有

$$\|(-\lambda I+\mathbf{A})^{-1}\|_{op} \leqslant \frac{M_3}{|\lambda|}, M_3 \geqslant 1$$

这就证明了 $\mathbf{A}$ 是 $\mathscr{H}$ 上的一扇形算子。由文献[129,Th.5.2]得 $-\mathbf{A}$ 在 $\mathscr{H}$ 上生成一解析半群。

由于 $-\mathbf{A}$ 是一扇形算子,可以定义 $\mathbf{A}$ 的分数次幂,且容易看出 $\widetilde{F}:D(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}})=V_1\times V_1\times V_1\rightarrow\mathscr{H}$ 是局部 Lipschitz 连续。因此,如 $U(0)=U_0\in D(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}})$,则式(2.3.7)存在唯一的强解,使得

$$U\in C([0,T);D(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}})), 0<T\leqslant\infty$$

下面,我们证明方程组(2.3.7)具有整体吸引子 $\mathscr{A}$。事实上,$\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{A}_\rho$ 在嵌入 J 之下的象,即 $J(\mathscr{A}_\rho)=\mathscr{A}$。

如果 U 是式(2.3.7)的充分光滑解,则 u 的方程为

$$u_t=\gamma u_{xx}-(\lambda_r+\mathrm{i}\lambda_i)w_x+\eta_1+\xi_1 \qquad (2.3.17)$$

则式(2.3.17) 关于 x 求导得

$$(u_x)_t=\gamma u_{xxx}-(\lambda_r+\mathrm{i}\lambda_i)w_{xx}+\eta_{1x}+\xi_{1x}$$

则从式(2.3.7) 中的 v 的方程减去上述方程得

$$(v-u_x)_t=\gamma(v-u_{xx})_x+\eta_2-\eta_{1x}+\xi_2-\xi_{1x}-k_1(v-u_x)$$

(2.3.18)

设 $\widetilde{w}=f(|u|^2u)$，容易验证 $\widetilde{w}$ 满足

$$\widetilde{w}_t=\gamma\widetilde{w}_{xx}-(4\gamma|u_x|^2u+2\gamma u_x^2\overline{u})+$$
$$2|u|^2(\eta_1+\xi_1)+u^2(\overline{\eta_1}+\overline{\xi_1})-$$
$$2|u|^2(\lambda_r+\mathrm{i}\lambda_i)w_x-u^2(\lambda_r-\mathrm{i}\lambda_i)\overline{w}_x,$$

则有

$$(w-\widetilde{w})_t=\gamma(w-\widetilde{w})_{xx}-4\gamma u(|v|^2-|u_x|^2)-2\gamma\overline{u}(v^2-u^2)-$$
$$2(\lambda_r+\mathrm{i}\lambda_i)|u|^2(2|u|^2v+u^2v-w_x)-$$
$$(\lambda_r-\mathrm{i}\lambda_i)u^2(2|u|^2\overline{v}+\overline{u}^2v-\overline{w}_x)-$$
$$\left(k_2-16(\lambda_r^2+\lambda_i^2)\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)|u|^4\right)(w-\widetilde{w})$$
$$(2.3.19)$$

首先估计

$$|u|_0^2+|u_x|_0^2+|v-u_x|_0^2+|w-\widetilde{w}|_0^2$$

的一致界，然后通过 Minkowsky 不等式，得到 $|U|_{\mathscr{H}}$ 得一致界，即需要证明下面命题：

命题2.3.4 设 $k_1>0$，$k_2>\gamma+\frac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{2\alpha}$，$\gamma>2\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}$（$\alpha$ 是一常数）。U 为式(2.3.7)具初值 $U_0\in D(\mathrm{A}^{\frac{1}{2}})$ 的解，则存在 $\rho_4\geqslant\sqrt{2}\rho$ 时有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}|U|_{\mathscr{H}}^2\leqslant\rho_4^2$$

证明 设 $U=(u,v,w)^t$ 为式(2.3.7)的光滑解，则式(2.3.17)与 u 作内积取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|_0^2=-\gamma|u_x|_0^2-\mathrm{Re}\left((\lambda_r+\mathrm{i}\lambda_i)\int_0^L w_x\overline{u}\mathrm{d}x\right)+$$
$$\mathrm{Re}(\eta_1+\xi_1,u)$$

因

$$-\mathrm{Re}\left((\lambda_r+\mathrm{i}\lambda_i)\int_0^L w_x\overline{u}\mathrm{d}x\right)=$$

$$\mathrm{Re}\left((\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i)\int_0^L w\bar{u}_x \mathrm{d}x\right) =$$

$$\mathrm{Re}\left((\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i)\int_0^L (w - f(u))\bar{u}_x \mathrm{d}x\right) +$$

$$\mathrm{Re}\left((\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i)\int_0^L f(u)\bar{u}_x \mathrm{d}x\right) =$$

$$\mathrm{Re}((\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i)(w - \tilde{w}, u_x)) - \lambda_i \mathrm{Im}\int_0^L |u|^2 u\bar{u}_x \mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{Re}(\eta_1 + \xi_1, u) =$$

$$-\mathrm{Re}\left(\varphi_\rho \int_0^L ((\beta_r + \mathrm{i}\beta_i)|u|^4 + (\delta_r + \mathrm{i}\delta_i)|u|^6 - \chi|u|^2)\mathrm{d}x\right) -$$

$$\mathrm{Re}\left((1-\varphi_\rho)\left(\delta_r + 9\gamma + 9\frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{\gamma}\right)\int_0^L |u|^6 \mathrm{d}x\right) + \mathrm{Re}(\xi_1, u) \leqslant$$

$$-\delta_r \int_0^L |u|^6 \mathrm{d}x + |\beta_r|\int_0^L |u|^4 \mathrm{d}x + |\chi|\int_0^L |u|^2 \mathrm{d}x -$$

$$\mathrm{Re}\left((1-\varphi_\rho)9\gamma\int_0^L |u|^6 \mathrm{d}x\right) + \mathrm{Re}(\xi_1, u)$$

根据 ξ_1 的选取，有

$$\mathrm{Re}(\xi_1, u) \leqslant 3\gamma\int_0^L |u|^3 |w - \tilde{w}| \mathrm{d}x$$

所以

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|_0^2 \leqslant -\gamma|u_x|_0^2 - \mathrm{Re}((\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i)(w - \tilde{w}, u_x)) +$$

$$|\lambda_i|\int_0^L |u|^3 |u_x| \mathrm{d}x -$$

$$\delta_r \int_0^L |u|^6 \mathrm{d}x + |\beta_r|\int_0^L |u|^4 \mathrm{d}x + |\chi|\int_0^L |u|^2 \mathrm{d}x -$$

$$(1-\varphi_\rho)9\gamma\int_0^L |u|^6 \mathrm{d}x + 3\gamma\int_0^L |u|^3 |w - \tilde{w}| \mathrm{d}x$$

因

$$3\gamma\int_0^L |u|^3 |w - \tilde{w}| \mathrm{d}x \leqslant 9\gamma\int_0^L |u|^6 \mathrm{d}x + \frac{\gamma}{4}|w - \tilde{w}|_0^2$$

由假设 $4\delta_r\gamma > \lambda_i^2$，可选择

$$2\alpha = 2\gamma - b^2, \beta = 2\delta_r - a^2, |a \cdot b| = |\lambda_i|$$

余下的估计仿文献[22]，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|_0^2 \leqslant -2\alpha|u_x|_0^2 - |u|_0^2 + P + 18\varphi_\rho\gamma\int_0^L |u|^6\mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2}|w - \tilde{w}|_0^2 - 2\mathrm{Re}((\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i)(w - \tilde{w}, u_x)) \leqslant$$
$$-\alpha|u_x|_0^2 - |u|_0^2 + P + 18\varphi_\rho\gamma\int_0^L |u|^6\mathrm{d}x + \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{\alpha}\right)|w - \tilde{w}|_0^2,$$

(2.3.20)

这里，$P = \frac{1}{8}\left(\frac{(|\beta_r|+1)^2}{\beta} + 2|\chi| + 1\right)^2$。

式(2.3.17)与 u_{xx} 作内积取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_x|_0^2 = -\gamma|u_{xx}|_0^2 + \mathrm{Re}\left((\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i)\int_0^L w_x\bar{u}_{xx}\mathrm{d}x\right) - \mathrm{Re}(\eta_1 + \xi_1, u_{xx})$$

因

$$\mathrm{Re}\left((\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i)\int_0^L w_x\bar{u}_{xx}\mathrm{d}x\right) =$$
$$\mathrm{Re}\left((\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i)\int_0^L (w - \tilde{w})_x\bar{u}_{xx}\mathrm{d}x\right) +$$
$$\mathrm{Re}\left((\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i)\int_0^L (|u|^2u)_x\bar{u}_{xx}\mathrm{d}x\right) \leqslant$$
$$\frac{\gamma}{2}|u_{xx}|_0^2 + \frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{\gamma}|(w - \tilde{w})_x|_0^2 +$$
$$\frac{9}{\gamma}(\lambda_r^2 + \lambda_i^2)\int_0^L |u|^4|u_x|^2\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{Re}(\eta_1 + \xi_1, u_{xx}) =$$
$$-\varphi_\rho\mathrm{Re}(g(u), u_{xx}) + \mathrm{Re}(\xi_1, u_{xx}) -$$
$$(1 - \varphi_\rho)\left(9\gamma + \delta_r + 9\frac{\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i}{\gamma}\right)\mathrm{Re}(|u|^4u, u_{xx}),$$

$$\mathrm{Re}(|u|^4u,u_{xx})=3\int_0^L|u|^4|u_x|^2\mathrm{d}x+2\int_0^L|u|^2u^2\overline{u}_x\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\int_0^L|u|^4|u_x|^2\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{Re}(\xi_1,u_{xx})\leqslant 3\gamma\int_0^L|u|^2|w-\widetilde{w}|\mathrm{d}x\leqslant$$
$$9\gamma\int_0^L|u|^4|w-\widetilde{w}|^2\mathrm{d}x+\frac{\gamma}{4}|u_{xx}|_0^2$$

综合上面的计算得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_x|_0^2\leqslant$$
$$-\frac{\gamma}{2}|u_{xx}|_0^2+\varphi_\rho\cdot\frac{18}{\gamma}(\lambda_r^2+\lambda_i^2)\int_0^L|u|^4|u_x|^2\mathrm{d}x-$$
$$2\varphi_\rho\mathrm{Re}(g(u),u_{xx})+\frac{2(\lambda_r^2+\lambda_i^2)}{\gamma}|(w-\widetilde{w})_x|_0^2+$$
$$9\gamma\int_0^L|u|^4|w-\widetilde{w}|^2\mathrm{d}x\tag{2.3.21}$$

式(2.3.18)与 $v-u_x$ 作内积取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|v-u_x|_0^2=$$
$$-\gamma|(v-u_x)_x|_0^2+\mathrm{Re}(\eta_2-\eta_{1x},v-u_x)+$$
$$\mathrm{Re}(\xi_2-\xi_{1x},v-u_x)-k_1|v-u_x|_0^2$$

令

$$g_1(u)=(\beta_r+\mathrm{i}\beta_i)(2|u|^2u_x+u^2\overline{u}_x)+$$
$$(\delta_r+\mathrm{i}\delta_i)(3|u|^4u_x+2|u|^2u^2\overline{u}_x)-\chi u_x$$

所以

$$\mathrm{Re}(\eta_2-\eta_{1x},v-u_x)=$$
$$\varphi_\rho\mathrm{Re}((g_1(u)-h(u,v),v-u_x))-$$
$$(1-\varphi_\rho)\left(9\gamma+\delta_r+9\frac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{\gamma}\right)\times$$

$$\mathrm{Re}\int_0^L (3|u|^4|v-u_x|^2+2|u|^2u^2(\bar{v}-\bar{u}_x)^2\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\varphi_\rho \mathrm{Re}((g_1(u)-h(u,v),v-u_x))-$$

$$(1-\varphi_\rho)\left(9\gamma+\delta_r+9\frac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{\gamma}\right)\int_0^L |u|^4|v-u_x|^2\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{Re}(\xi_2-\xi_{1,x},v-u_x)=$$

$$\gamma\mathrm{Re}\Big[\int_0^L(2\bar{u}(v+u_x)(w-\tilde{w})(\bar{v}-\bar{u}_x)+$$

$$2u(\bar{v}+\bar{u}_x)(\overline{w-\tilde{w}})(\bar{v}-\bar{u}_x)+$$

$$2u(\bar{v}+\bar{u}_x)(w-\tilde{w})(\bar{v}-\bar{u}_x))\mathrm{d}x\Big]+$$

$$\gamma\mathrm{Re}\left[\int_0^L(2|u|^2(w-\tilde{w})_x+u^2(\overline{w-\tilde{w}})_x)(\bar{v}-\bar{u}_x)\mathrm{d}x\right],$$

$$\mathrm{Re}[2\bar{u}(v+u_x)(w-\tilde{w})(\bar{v}-\bar{u}_x)+$$

$$2u(v+u_x)(\overline{w-\tilde{w}})(\bar{v}-\bar{u}_x)]=$$

$$4\mathrm{Re}(\mathrm{Re}(\bar{u}(w-\tilde{w}))(|v|^2-|u_x|^2-v\bar{u}_x+\bar{v}u_x)=$$

$$4\mathrm{Re}(\bar{u}(w-\tilde{w}))(|v|^2-|u_x|^2)$$

所以

$$\mathrm{Re}(\xi_2-\xi_{1x},v-u_x)\leqslant$$

$$4\gamma\mathrm{Re}\int_0^L(\bar{u}(w-\tilde{w}))(|v|^2-|u_x|^2)\mathrm{d}x+$$

$$2\gamma\mathrm{Re}\int_0^L u(w-\tilde{w})(\bar{v}^2-\bar{u}_x^2)\mathrm{d}x+$$

$$3\gamma\int_0^L|u|^2(w-\tilde{w})_x||v-u_x|\mathrm{d}x\leqslant$$

$$I+\frac{\gamma}{2}|(w-\tilde{w})_x|_0^2+\frac{9}{2}\gamma\int_0^L|u|^4|v-u_x|^2\mathrm{d}x$$

这里

$$I=4\gamma\mathrm{Re}\int_0^L(\bar{u}(w-\tilde{w}))(|v|^2-|u_x|^2)\mathrm{d}x+$$

$$2\gamma\mathrm{Re}\int_0^L u(w-\tilde{w})(\bar{v}^2-\bar{u}_x^2)\,\mathrm{d}x$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|v-u_x|_0^2\leqslant$$

$$-2\gamma|(v-u_x)_x|_0^2-2k_1|v-u_x|_0^2+2I+\gamma|(w-\tilde{w})_x|_0^2+$$

$$\varphi_\mu\left(9\gamma\int_0^L|u|^4|v-u_x|^2\mathrm{d}x-(h(u,v)-g_1(u),v-u_x)\right)$$

(2. 3. 22)

式(2. 3. 19)与 $w-\tilde{w}$ 作内积取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w-\tilde{w}|_0^2=$$

$$-\gamma|(w-\tilde{w})_x|_0^2-k_2|w-\tilde{w}|_0^2-$$

$$\mathrm{Re}\left(\int_0^L(4\gamma u(|v|^2-|u_x|^2)-2\gamma\bar{u}(v^2-u_x^2))(\overline{w-\tilde{w}})\,\mathrm{d}x\right)-$$

$$\mathrm{Re}\left(\int_0^L 2|u|^2(\lambda_r+\mathrm{i}\lambda_i)(2|u|^2v+u^2v-w_x)(\overline{w-\tilde{w}})\,\mathrm{d}x\right)-$$

$$\mathrm{Re}\left(\int_0^L u^2(\lambda_r-\mathrm{i}\lambda_i)(2|u|^2\bar{v}+\bar{u}^2v-\bar{w}_x)(\overline{w-\tilde{w}})\,\mathrm{d}x\right)-$$

$$\left(9\gamma+16(\lambda_r^2+\lambda_i^2)\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\right)\int_0^L|u|^4|w-\tilde{w}|^2\mathrm{d}x$$

对 $2|u|^2v+u^2\bar{v}-w_x$ 和 $2|u|^2\bar{v}+\bar{u}^2v-\bar{w}_x$ 的处理是分别插入 $\tilde{w}_x$ 和 $\bar{\tilde{w}}_x$($\tilde{w}=f(u)=|u|^2u$),具体步骤从略,则

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w-\tilde{w}|_0^2\leqslant$$

$$-\gamma|(w-\tilde{w})_x|_0^2-k_2|w-\tilde{w}|_0^2-I+$$

$$12\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}\int_0^L|u|^4|v-u_x||w-\tilde{w}|\mathrm{d}x-$$

$$4\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}\int_0^L|u|^2|w-\tilde{w}||(w-\tilde{w})_x|\mathrm{d}x-$$

$$\left(9\gamma+16(\lambda_r^2+\lambda_i^2)\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\right)\int_0^L|u|^4|w-\tilde{w}|^2\mathrm{d}x\leqslant$$

$$-\frac{3}{4}\gamma|(w-\tilde{w})_x|_0^2-k_2|w-\tilde{w}|_0^2-I+$$

$$9\int_0^L|u|^4|v-u_x|^2\mathrm{d}x-9\gamma\int_0^L|u|^4|w-\tilde{w}|^2\mathrm{d}x$$

(2.3.23)

将式(2.3.20)、(2.3.23)相加得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|u|_0^2+|u_x|_0^2+|v-u_x|_0^2+|w-\tilde{w}|_0^2)\leqslant$$

$$-|u|_0^2+P-\alpha|u_x|_0^2+\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{\alpha}-2k_2\right)|w-\tilde{w}|_0^2+$$

$$18\varphi_\rho\gamma\int_0^L|u|^6\mathrm{d}x-\frac{\gamma}{2}|u_{xx}|_0^2+18\varphi_\rho\frac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{\gamma}\int_0^L|u|^4|u_x|^2\mathrm{d}x-$$

$$2\varphi_\rho\mathrm{Re}(g(u),u_{xx})+18\gamma\varphi_\rho\int_0^L|u|^4|v-u_x|^2dx+$$

$$\left(\frac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{\gamma}-\frac{\gamma}{2}\right)|(w-\tilde{w})_x|_0^2-$$

$$2k_1|v-u_x|_0^2-2\gamma|(v-u_x)_x|_0^2$$

(2.3.24)

对于给定的$\rho>0$,不失一般性,假设$|u|_0^2+|u_x|_0^2+|v|_0^2+|w|_0^2\geqslant2\rho^2$,否则命题2.3.4得证。此时,$\varphi_\rho=0$,这里$\varphi_\rho=\varphi\left(\frac{|u|_0^2+|u_x|_0^2+|v|_0^2+|w|_0^2}{\rho^2}\right)$。所以,当$k_1>0,k_2>\gamma+\frac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{2\alpha},\gamma>2\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}$时,由式(2.3.24)有$|u|_0^2+|u_x|_0^2+|v-u_x|_0^2+|w-\tilde{w}|_0^2$指数衰减,且一致有界。又

$$|u|_0^2+|u_x|_0^2+|v|_0^2+|w|_0^2\leqslant$$

$$|u|_0^2+2|u_x|_0^2+|v-u_x|_0^2+|w-\tilde{w}|_0^2+|\tilde{w}|_0^2,$$

$$|\tilde{w}|=\int_0^L|u|^6\mathrm{d}x$$

利用Sobolev嵌入定理,

$$\int_0^L|u|^6\mathrm{d}x\leqslant C(|u_x|_0^2+|u|_0^2)^3$$

存在$\rho_4\geqslant2\rho$有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\{|u|_0^2+|u_x|_0^2+|v|_0^2+|w|_0^2\}\leqslant\rho_4^2$$

所以命题2.3.4得证。

作为命题2.3.4的推论，得到式(2.3.7)的解以指数收敛到集合$J(V_1)$。

推论2.3.1 在命题2.3.4的假设之下，如果$U(t)$是式(2.3.7)的解，则存在$T_1, K_1>0$，使得$t\geqslant T_1$时有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|v-u_x|_0^2+|w-\tilde{w}|_0^2)\leqslant(K_1-2k_1)|v-u_x|_0^2-k_2|w-\tilde{w}|_0^2$$

证明 将式(2.3.22)和式(2.3.23)相加得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|v-u_x|_0^2+|w-\tilde{w}|_0^2)\leqslant -2\gamma|(v-u_x)_x|_0^2-2k_1|v-u_x|_0^2-\frac{3}{2}\gamma|(w-\tilde{w})_x|_0^2-2k_2|w-\tilde{w}|_0^2+18\gamma\varphi_p\int_0^L|u|^4|v-u_x|^2\mathrm{d}x$$

因为

$$\int_0^L|u|^4|v-u_x|^2\mathrm{d}x\leqslant|u|_{L^\infty}^4|v-u_x|_0^2$$

由命题2.3.4和$H_{\mathrm{per}}^1(I)\hookrightarrow L^\infty(I)$，知存在$T_1>0$，使得

$$|u|_{L^\infty}\leqslant C_1, t\geqslant T_1$$

因此$k_1=18\gamma C_1^4$，所以推论2.3.1得证。

下面证明式(2.3.7)解在$D(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}})$一致有界且在$D(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}})$中存在整体吸引子。

命题2.3.5 当$k_1>\frac{K_1}{2}, k_2>\gamma+\frac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{2\alpha}, \gamma>2\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}$时，式(2.3.7)的解在$D(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}})$中一致有界，并且在$D(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}})$中存在整体吸引子$\mathscr{A}$。

证明 用u, v, w分别与式(2.3.7)的三个方程作内积并取实

部，然后利用 Hölder 不等式及命题2.3.4得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|_0^2\leqslant-\gamma|u_x|_0^2+\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}|w_x|_0\cdot u|_0+C_1$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|v|_0^2\leqslant-\gamma|v_x|_0^2+\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}|w_x|_0|v|_0+C_2$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w|_0^2\leqslant-\gamma|w_x|_0^2+C_3(|v|_{L^4}^2+1)$$

这里 $C_i(i=1,2,3)$仅依赖于方程中的系数和命题2.3.4的一致界，由 Sobolev 嵌入定理和 Young 不等式有

$$|v|_{L^4}^2\leqslant C|v|_0|v|_1\leqslant C(|v|_0^2+|v|_0|v_x|_0)\leqslant C_4(1+|v_x|_0)\tag{2.3.25}$$

所以

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|u|_0^2+|v|_0^2+|w|_0^2)\leqslant$$
$$-\left(\gamma|u_x|_0^2+\frac{\gamma}{4}|v_x|_0^2+\left(\gamma-\frac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{\gamma}\right)|w_x|_0^2\right)+C_5\tag{2.3.26}$$

方程组(2.3.7)的三个方程分别与$-u_{xx}$，$-v_{xx}$，$-w_{xx}$作内积并取实部，然后利用 Hölder 不等式得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_x|_0^2\leqslant-\gamma|u_{xx}|_0^2+\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}|w_x|_0|u_{xx}|_0+C_6|u_{xx}|_0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|v_x|_0^2\leqslant-\gamma|v_{xx}|_0^2+\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}|w_{xx}|_0|v_{xx}|_0+C_7|v_{xx}|_0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w_x|_0^2\leqslant-\gamma|w_{xx}|_0^2+C_8(|v|_{L^4}^2+1)|w_{xx}|_0$$

利用 Young 不等式和(2.3.25)式得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|u_x|_0^2+|v_x|_0^2+|w_x|_0^2)\leqslant$$
$$-\frac{1}{2}\left(\gamma-\frac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{\gamma}\right)|w_{xx}|_0^2+\frac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{2\gamma}|w_x|_0^2+$$

$$C_9|v_x|_0^2 + C_{10} \tag{2.3.27}$$

由式(2.3.26)、(2.3.27)和假设 $\gamma > 2\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}$ 以及一致 Gronwall 不等式可以得到 U 在 $D(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}})$ 中一致有界。至于整体吸引子的存在性由文献[80,Th1.1]加上算子 $\mathbf{A}$ 是扇形算子(它生成的半群当 $t>0$时在 $D(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}})$ 中是紧的)可以得到。上面出现的 $C_i(i=4,\cdots,10)$与 C_1,C_2,C_3一样仅与方程中的系数和命题2.3.4的一致界有关。

利用推论2.3.1,可以证明如下引理:

引理2.3.2 设 $k_1>\dfrac{K_1}{2}$,$k_2>\gamma+\dfrac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{2\alpha}$,$\gamma>2\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}$时,则 $\mathscr{A}$ 包含在集合 $J(V_1)$中。

证明 首先注意到存在常数 ρ_5使得

$$|v-u_x|_0^2+|w-f(u)|_0^2 \leqslant \rho_5^2, \forall\ (u,v,w)\in\mathscr{A}$$

现设 $U(U_0,t)=(u(t),v(t),w(t))'$ 为式(2.3.7)具初值 $U_0\in\mathscr{A}$ 的解。由推论2.3.1得到

$$
\begin{aligned}
&|v(t)-u_x(t)|_0^2+|w(t)-\tilde{w}(t)|_0^2 \leqslant \\
&e^{-\bar{\mu}t}(|v(T_1)-u_x(T_1)|_0^2+|w(T_1)-\tilde{w}(T_1)|_0^2) \leqslant \\
&\rho_5^2 e^{-\bar{\mu}t}, (\text{根据 } \mathscr{A} \text{ 的不变性})。
\end{aligned} \tag{2.3.28}
$$

对 $t\geqslant T_1$,这里$\bar{\mu}=\min(2k_1-K_1,2k_2)$。进而,由 $\mathscr{A}$ 的不变性,对任意$U^*\in\mathscr{A}$ 和 $t\geqslant T_1$,则存在 U_0使得 $U(U_0,t)=U^*$。因此由式(2.3.28)得

$$\mathrm{dist}(U^*,J(V_1))\leqslant \rho_5^2 e^{-\bar{\mu}t}, t\geqslant T_1,$$

$$\mathrm{dist}(\mathscr{A},J(V_1))=\sup_{U\in\mathscr{A}}\mathrm{dist}(U,J(V_1))\leqslant \rho_5^2 e^{-\bar{\mu}t}, t\geqslant T_1,$$

$$\mathrm{dist}(\mathscr{A},J(V_1))=0$$

下面只要证 $J(V_1)$在 $\mathscr{H}$ 中是闭的就可以推出 $\mathscr{A}\subset J(V_1)$。事实上,如果$(u_n,(u_n)_x,f(u_n))\in\mathscr{H}$ 收敛到$(u,v,w)\in\mathscr{H}$,则 v 是 u 的弱导数,$v\in H$,

$$|v|_0 \leqslant |v-(u_n)_x|_0 + |(u_n)_x|_0 < \infty$$

现

$$|w-f(u)|_0 \leqslant |w-f(u_n)|_0 + |f(u_n)-f(u)|_0,$$

$$|f(u_n)-f(u)|_0 = \left(\int_0^L (|u_n|^6 - |u|^6)^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$(|u|_{L^\infty}^2 + |u_n|_{L^\infty}|u|_{L^\infty} + |u_n|_{L^\infty}^2) \times$$

$$(|u_n|_{L^\infty}^3 + |u|_{L^\infty}^3)|u_n - u_0|_0$$

因$|u_n|_{L^\infty}$是一致有界的，所以$|u|_{L^\infty}$也是一致有界的，故 $w=f(u)$，所以引理得证。

下面给出主要结果。

定理2.3.2 设 $k_1>\dfrac{K_1}{2}, k_2>\gamma+\dfrac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{2\alpha}, \gamma>2\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}$时，有 $\mathscr{A}=J(\mathscr{A}_\rho)$。

证明 显然 $J(\mathscr{A}_\rho)\subset\mathscr{A}$，又 $\mathscr{A}$ 是 $J(V_1)$中的有界不变集，但由于 $\mathscr{A}_\rho$ 是式(2.3.5)的整体吸引子，则 $J(\mathscr{A}_\rho)$是 $J(V_1)$中的极大不变集。因此 $\mathscr{A}\subset J(\mathscr{A}_\rho)$，所以 $\mathscr{A}=J(\mathscr{A}_\rho)$。

下面考虑惯性流形和惯性形式的存在性。

根据前面的讨论，我们知道方程组(2.3.7)保持着式(2.3.2)的长时间动力学行为。特别地，由命题2.3.4和命题2.3.5知，存在常数 $\rho_6>0$，使得

$$|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}U|_0 \leqslant \rho_6, \forall\, U \in \mathscr{A}$$

为了证明方程组(2.3.7)的惯性流形的存在性，对非线性项 $\tilde{F}$ 进行截断。即考虑

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \mathbf{A}U = F(U) \tag{2.3.29}$$

这里 $F(U)=\varphi\left(\dfrac{|A^{\frac{1}{2}}U|_0^2}{\rho_6}\right)\tilde{F}(U)$，可见式(2.3.29)与式(2.3.7)在整体吸引子 $\mathscr{A}$ 上具有相同的长时间行为。为了简略起见，这里只叙述结论。

命题2.3.6 在前面的假设之下，方程组(2.3.29)存在惯性流形 $\mu=\mathrm{graph}\ \Phi$，这里 $\Phi: P\mathscr{H}\to Q\mathscr{H}\cap D(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}})$ 是 Lipschitz 映射；P 为关于 $\mathbf{A}$ 的前 $N+1$ 个特征向量在 $\mathscr{H}$ 中的投影；$Q=I-P$；因为 $\mathbf{A}$ 是如下形式的微分算子

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} A & 0 & (\lambda_r-\mathrm{i}\lambda_i)\partial_x \\ -k_1\partial_x & A & -(\lambda_r+\mathrm{i}\lambda_i)\partial_{xx} \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$$

类似于引理2.3.1的讨论，$\mathbf{A}$ 具有离散谱，由经典的泛函分析理论可知 $P\mathscr{H}, Q\mathscr{H}$ 在 $\mathbf{A}$ 作用下是不变的。因为 $\mathbf{A}$ 不是自伴算子，用文献[101]中的结果来证命题2.3.6。此时 $\mathbf{A}$ 的谱为 $\left\{\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2\right\}_{n\geqslant 1}$，故所需的谱间隙条件满足。

推论2.3.2 式(2.3.2)的解半群的本质上的长时间动力学(the essential Long-time dynamics)由如下常微分方程所描述：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}PU=-\mathbf{A}PU+PF(PU+\Phi(PU)) \qquad (2.3.30)$$

由惯性流形的指数吸引性，有

推论2.3.3 如 $u(t)$ 为式(2.3.2)的解，则存在常微分方程(2.3.30)的解 $PU(t)$ 满足(C,α 为正常数)

$$|u(t)-(P_1(t)+\Phi_1(PU))|\leqslant C\mathrm{e}^{-\alpha t}, t>0$$

这里

$$PU(t)=(P_1(t),P_2(t),P_3(t)),\Phi=(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)$$

下面给出相应于 Kwak 的结论。定义

$$S=\mathscr{M}\cap J(V_1)$$

我们记 S^u 为 S 的第一个分量。

命题2.3.7 集合 S^u 在式(2.3.2)的解半群作用下是不变的且它吸引式(2.3.2)的所有轨道。

现在还不能证明 S^u 是一有限维流形，但可以证明 $\mathscr{M}^u$($\mathscr{M}$ 的第一分量)是一有限维流形且吸引 $D(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}})$ 中所有有界集，但它在

半群的作用下没有不变性。

最后，给出一个比式(2.3.30)更低维数的常微分方程来描述 S^n 中的动力学。

定理2.3.3 式(2.3.2)的解半群本质上的长时间动力学完全由如下的常微分方程组来描述：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}PU + \mathbf{A}PU = PF(J(u))$$

这里 $PU=(P_1,P_{1x},P_3)$，$u(t)=P_1(t)+\Phi_1(P_1(t),P_{1x}(t),P_3(t))$。

2.4 广义KS型方程惯性流形的存在性

考虑如下一类广泛的 Kuramoto-Sivashinshy 方程的周期初值问题(GKS)

$$u_t + \alpha u_{xx} + \gamma u_{xxxx} + f(u)_x + \varphi(u)_{xx} = g(u) + h(x),(x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \tag{2.4.1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), x \in \mathbf{R} \tag{2.4.2}$$

$$u(x+D,t) = u(x-D,t), \forall\ x \in R, t \in R^+, D > 0 \tag{2.4.3}$$

的惯性流形的存在性及其维数估计，其中 $\alpha \geqslant 0$，$\gamma > 0$。显然，当 $\alpha=0$，$f(u)=0$，式(2.4.1)为众知的广义 Gahn-Hilliard 方程($n=1$)，我们对问题(2.4.1)～(2.4.3)建立对时间 t 的一致先验估计，证明了 GKS 方程的不变锥性质(ICP)和强挤压性(SSP)，给出 Prepared GKS 方程(PGKS)惯性流形的存在性，最后证明 GKS 方程周期初值问题惯性流形的存在性。

引理2.4.1 若满足以下条件：

(1) $\varphi'(u) \leqslant \varphi_0$，$\varphi_0 > 0$；

(2) $g(0)=0$，$g'(u) \leqslant g_0$，$g_0 < -\frac{(\alpha+\varphi_0+1)}{2}$，$\gamma > \frac{1}{2}(\alpha+\varphi_0)$；

(3) $h(x) \in L_2(\Omega)$，$\Omega=(-D,D)$；

(4) $u_0(x)\in L_2(\Omega)$。

则对问题(2.4.1)～(2.4.3)的光滑解有如下估计

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant e^{2\left(g_0+\frac{\alpha+\varphi_0+1}{2}\right)t}\|u_0(x)\|^2_{L_2(\Omega)}+$$

$$\frac{\|h(x)\|^2_{L_2(\Omega)}}{|2g_0+\alpha+\varphi_0+1|}\left(1-e^{2\left(g_0+\frac{\alpha+\varphi_0+1}{2}t\right)}\right)$$

$$0\leqslant t<\infty$$

进一步有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|u(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)}+\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^1\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)}\mathrm{d}t\leqslant E_0 \tag{2.4.4}$$

其中常数 E_0依赖于$\|u_0(x)\|_{L_2(\Omega)}$和$\|h_0(x)\|_{L_2(\Omega)}$。

证明 方程(2.4.1)和 u 作内积得

$$(u,u_t+\alpha u_x+\gamma u_{xxxx}+f(u)_x+\varphi(u)_{xx}-g(u)-h(x))=0 \tag{2.4.5}$$

其中

$$(f(u)_x,u)=-(f(u),u_x)=0$$

$$(\varphi(u)_{xx},u)=-(\varphi'(u)u_x,u_x)\geqslant-\varphi_0\|u_x\|^2_{L_2}$$

$$(u,g(u))\leqslant g_0\|u\|^2_{L_2}$$

$$(u,h(x))\leqslant\frac{1}{2}\left(\|u\|^2_{L_2}+\|h\|^2_{L_2}\right)$$

对于周期函数 $u(\cdot,t)$ 有

$$\|u_x\|^2_{L_2}\leqslant\|u\|_{L_2}\|u_{xx}\|_{L_2}\leqslant\frac{1}{2}\left(\|u\|^2_{L_2}+\|u_{xx}\|^2_{L_2}\right)$$

于是由式(2.4.5)有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2_{L_2}+\left(\gamma-\frac{\alpha+\varphi_0}{2}\right)\|u_{xx}\|^2_{L_2}\leqslant$$

$$\left(g_0+\frac{\alpha+\varphi_0+1}{2}\right)\|u\|_{L_2}^2+\frac{1}{2}\|h(x)\|_{L_2}^2 \qquad (2.4.6)$$

由于$\gamma-\dfrac{\alpha+\varphi_0}{2}>0$,则由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(\cdot,t)\|_{L_2}^2\leqslant 2\left(g_0+\frac{\alpha+\varphi_0+1}{2}\right)\|u(\cdot,t)\|_{L_2}^2+\|h(x)\|_{L_2}^2$$

易得

$$\|u(\cdot,t)\|_{L_2}^2\leqslant \mathrm{e}^{(2g_0-\alpha+\varphi_0+1)t}\|u_0(x)\|_{L_2}^2+$$

$$\frac{\|h(x)\|_{L_2(\Omega)}^2}{|2g_0+\alpha+\varphi_0+1|}\left(1-\mathrm{e}^{(2g_0+\alpha+\varphi_0+1)t}\right)$$

由式(2.4.6)对t积分易得估计式

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L_2}^2\mathrm{d}t\leqslant E_0$$

引理2.4.2 设引理2.4.1条件满足,且设

(1) $|f(u)|\leqslant A|u|^p,1\leqslant p<7,A>0$

$|\varphi(u)|\leqslant B|u|^q,0\leqslant q<4,B>0$

(2) $u_0(x)\in H^1(\Omega),h(x)\in L_2(\Omega)$

则对问题(2.4.1)~(2.4.3)的光滑解有如下估计

$$\|u_x(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega)}^2\leqslant$$

$$\mathrm{e}^{g_0t}\|u_{0x}(x)\|_{L_2(\Omega)}^2+$$

$$\frac{2}{|g_0|}\max_{t\in[0,\infty)}\left|C_5\left(D,p,\|u(\cdot,t)\|_{L_2},\|h(x)\|_{L_2}\right)\right|,\ \forall\ t\geqslant 0$$

$$(2.4.7)$$

其中函数$C_5(\cdot,\cdot,\xi,\eta)$为变元$\xi,\eta$的连续正增函数。进一步有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|u_x(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega)}^2+\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t\|u_{xxx}(\cdot,t)\|_{L_2}^2\mathrm{d}t\leqslant E_1$$

$$(2.4.8)$$

其中常数E_1依赖于$\|u_0(x)\|_{H^1(\Omega)},\|h(x)\|_{L_2(\Omega)}$和$E_0$。

证明 方程(2.4.1)和u_{xx}作内积可积

$$(u_{xx}, u_t + au_{xx} + \gamma u_{xxxx} + f(u)_x + \varphi(u)_{xx} - g(u) - h(x)) = 0 \tag{2.4.9}$$

其中

$$|(f(u)_x, u_{xx})| = |(f(u), u_{xxx})| \leqslant \|f(u)\|_{L_2}\|u_{xxx}\|_{L_2} \leqslant \frac{\gamma}{6}\|u_{xxx}\|_{L_2}^2 + \frac{3}{2\gamma}\|f(u)\|_{L_2}^2 \tag{2.4.10}$$

利用引理假定和光滑周期函数的 Sobolev 估计[46],我们有

$$\|u(x)\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{D}}\|u\|_{L_2} + \sqrt{2}\|u\|_{L_2}^{\frac{5}{6}}\|u_{xx}\|_{L_2}^{\frac{1}{5}}$$

$$\|u_x(x)\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant (2D)^{\frac{1}{2}}\|u_{xx}\|_{L_2}$$

$$\|D_x^j u\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \|D_x^{j-1}u\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|D_x^{j+1}\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, j = 1,2,\cdots$$

再由广义 Young 不等式

$$ab \leqslant \varepsilon^p\frac{a^p}{p} + \varepsilon^{-q}\frac{b^q}{q}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p,q > 1\ \varepsilon, a, b > 0$$

可得

$$\frac{3}{2\gamma}\|f(u)\|_{L_2}^2 \leqslant \frac{3}{2\gamma}A^2\|u\|_{L_{2p}}^{2p} \leqslant \frac{3}{2\gamma}A_2\|u\|_{L_2}^{2p-2}\|u\|_{L_2}^2 \leqslant \frac{\gamma}{6}\|u_{xx}\|_{L_2}^2 + c_1\|u\|_{L_2}^{2p} + c_2\|u\|_{L_2}^{\frac{2(5p+1)}{7-p}} \tag{2.4.11}$$

其中

$$c_1 = \frac{3A^2(p-1)}{\gamma D^{p-1}}$$

$$c_2 = (7-p)\cdot 2^{\frac{7p-13}{7-p}}(p-1)^{\frac{5+p}{7-p}}\cdot 3^{\frac{p-1}{7-p}}\cdot A^{\frac{12}{7-p}}\cdot \gamma^{-\frac{5+p}{7-p}}$$

$$|(\varphi(u)_{xx}, u_{xx})| = |(\varphi'(u)u_x, u_{xxx})| \leqslant$$

$$\frac{\gamma}{6}\|u_{xxx}\|^2+\frac{3}{2\gamma}\|\varphi(u)u_x\|_{L_2}^2$$

$$\frac{3}{2\gamma}\|\varphi(u)u_x\|_{L_2}^2\leqslant\frac{3}{2\gamma}\|\varphi(u)\|_{L_\infty}^2\cdot\|u_x\|_{L_2}^2\leqslant$$

$$\frac{\gamma}{6}\|u_{xxx}\|_{L_2}^2+c_3\|u\|_{L_2}^{3p+2}+c_4\|u\|_{L_2}^{\frac{2(5p+4)}{4-q}}$$

(2.4.12)

其中

$$c_3=4\sqrt{3}\gamma^{-2}q^{\frac{3}{2}}B^3D^{-\frac{4}{3}q}$$

$$c_4=2^{\frac{7p+2}{4-q}}3^{\frac{6}{4-q}}\gamma^{-\frac{q+8}{4-p}}B^{\frac{12}{7-p}}q^{\frac{6}{4-q}}(q+2)^{\frac{2+q}{4-q}}$$

$$-(g(u),u_{xx})=(g'(u)u_x,u_x)\leqslant g_0\|u_x\|_{L_2}^2\quad(2.4.13)$$

$$|(h(x),u_{xx})|\leqslant\|h(x)\|_{L_2}\|u_{xx}\|_{L_2}\leqslant$$

$$\|h(x)\|_{L_2}\|u\|_{L_2}^{\frac{1}{3}}\|u_{xxx}\|_{L_2}^{\frac{2}{3}}\leqslant$$

$$\frac{\gamma}{6}\|u_{xxx}\|_{L_2}^2+\frac{2}{3}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{-\frac{q}{2}}\|u\|_{L_2}^{\frac{1}{2}}\|h(x)\|_{L_2}^{\frac{3}{2}}$$

(2.4.14)

利用 Young 不等式

$$\alpha\|u_{xx}\|_{L_2}^2\leqslant\alpha\|u\|_{L_2}^{\frac{2}{3}}\|u_{xxx}\|_{L_2}^{\frac{4}{3}}\leqslant$$

$$\frac{\gamma}{6}\|u_{xxx}\|_{L_2}^2+\frac{\alpha^3}{3}\left(\frac{\gamma}{4}\right)^{-2}\|u\|_{L_2}^2\quad(2.4.15)$$

于是由(2.4.9)～(2.4.15)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_x(\cdot,t)\|_{L_2}^2+\frac{\gamma}{6}\|u_{xxx}\|_{L_2}^2\leqslant$$

$$g_0\|u_x\|_{L_2}^2+2c_5(p,D,q,\|u\|_{L_2},\|h\|_{L_2})\quad(2.4.16)$$

其中

$$c_5(p,q,D,\|u\|_{L_2},\|h\|_{L_2})$$

$$c_1\|u\|_{L_2}^{2p}+c_2\|u\|_{L_2}^{\frac{2(5p+1)}{7-p}}+c_3\|u\|_{L_2}^{3q+2}+$$

$$c_4\|u\|_{L_2}^{\frac{2(5p+4)}{4-p}}+\frac{2}{3}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{-\frac{q}{2}}\|u\|_{L_2}^{\frac{1}{2}}\|h\|_{L_2}^{\frac{3}{2}}+$$

$$\frac{\alpha^3}{3}\left(\frac{\gamma}{4}\right)^{-2}\|u\|_{L_2}^2$$

由式(2.4.16)可得

$$\|u_x(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega)}^2\leqslant e^{2g_0t}\|u_{0x}(x)\|_{L_2(\Omega)}^2+$$

$$\frac{2}{|g_0|}\max_{t\in(0,\infty)}\left|c_5(p,D,q,\|u\|_{L_2},\|h\|_{L_2})\right|$$

由引理 2.4.1 和式(2.4.16)可得

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|u_x(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega)}^2+\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t\|u_{xxx}(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega)}^2\mathrm{d}t\leqslant E_1 \tag{2.4.17}$$

引理2.4.3 设引理2.4.2条件满足，且设 $u_0(x)\in H^2(\Omega)$，则对问题(2.4.1)～(2.4.3)的光滑解有如下估计

$$\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega)}^2\leqslant e^{2g_0t}\|u_{0xx}(x)\|_{L_2(\Omega)}^2+$$

$$\frac{1}{|g_0|}(1-e^{2g_0t})\left(\frac{3}{\gamma}\|h\|_{L_2(\Omega)}^2+C_6\right) \tag{2.4.18}$$

其中正单增连续函数 C_6 依赖于 $\|u(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}$。进一步有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega)}^2+\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t\|u_{xxxx}(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega)}^2\mathrm{d}t\leqslant E_2 \tag{2.4.19}$$

其中常数 E_2 依赖于 $\|u_{0xx}(x)\|_{L_2}$，$\|h(x)\|_{L_2}$ 和 E_1。

证明 类似引理2.4.1、引理2.4.2的证明。

引理2.4.4 设引理2.4.3条件满足，且设 $u_0(x)\in H^3(\Omega)$，$h(x)\in H^1(\Omega)$，则对问题(2.4.1)～(2.4.3)的光滑解有如下估计

$$\|u_{xxx}(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leqslant e^{2g_0 t}\|u_0(x)\|_{H^3(\Omega)} + \frac{1}{|g_0|}\max_{0\leqslant t<\infty}|C_7(\|u\|_{H^2(\Omega)},\|h\|_{H^1(\Omega)})| \tag{2.4.20}$$

进一步有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|u_{xxx}(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t\|u_{x5}(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega)}^2 dt \leqslant E_3 \tag{2.4.21}$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}(\|u(\cdot,t)\|_{L_\infty(\Omega)} + \|u_x(\cdot,t)\|_{L_\infty(\Omega)} + \|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L_\infty(\Omega)}) \leqslant E'_3 \tag{2.4.22}$$

其中常数 E_3和 E'依赖于$\|u_0(x)\|_{H^3(\Omega)}$和$\|h(x)\|_{H^1(\Omega)}$。

证明 不等式(2.4.20)、(2.4.21)可由类似于引理2.4.2,引理2.4.3的证明得到,不等式(2.4.22)则由引理2.4.1～引理2.4.3和(2.4.21),利用 Sobolev 不等式得到。

现考虑 GKS 方程(2.4.1)的不变锥性质(ICK)和强挤压性(SSP)

取特征函数 $W_k(x)=e^{i\frac{2\pi k}{D}x}$,它满足特征方程

$$W_{kxxxx} = \lambda_k W_k$$

其中 $\lambda_k=\left(\frac{2\pi k}{D}\right)^4$,令 P_N 表示 Hilbert 空间 H 在子空间$\{W_1,W_2,\cdots,W_N\}$上的正交投影,Q_N 为无限维投影,$Q_N=I-P_N$,设 $P_NH\oplus Q_NH$ 表示沿正交投影 P_N 和 $Q_N=I-P_N$ 的直交和。P_N 的秩为 $N<\infty$,$S(t)u$ 表示从 $t=0$时通过 $u_0(x)$的方程(2.4.2)的轨线。

定义2.4.1 不变锥性质:如果对某不变吸收集 B 和对数为 $N\in\{1,2,\cdots\}$,$\gamma\in(0,\infty)$,“锥”

$$C_N(\gamma) = \{(u,v)\in B\times B,\|Q_N(u-v)\|_H \leqslant \gamma\|P_N(u-v)\|_H\} \tag{2.4.23}$$

是严格不变的,即如果

$$\|Q_N(u-v)\|_H = \gamma\|P_N(u-v)\|_H,(u,v)\in B\times B,u\neq v \tag{2.4.24}$$

则有

$$\|Q_N(S(t)u-S(t)v)\|_H = \gamma\|P_N(S(t)u-S(t)v)\|_H,\ \forall\ t>0 \tag{2.4.25}$$

则称具有不变锥性质。

定义2.4.2 挤压性质：存在常数 $\beta>0$ 使得

$$\|S(t)u-S(t)v\|_H \leqslant e^{-\beta t}\|u-v\|_H, t\geqslant 0 \tag{2.4.26}$$

其中 $(u,v)\in B\times B$，$\{S(t)u,S(t)v\}\notin C_N(\gamma)$，称之具有挤压性质(Squeezing Property)，它意味着 $B\times B\backslash C_N(\gamma)$ 为指数 Squeezed。

定义2.4.3 强挤压性质：同时具有 ICP 和挤压性质的称之为强挤压性质(Strong Squezeing Property)，简记为 SSP。

对于 GKS 方程(2.4.1)，令算子 $A=\frac{d^4}{dx^4}$，定义在子空间 $D_A=\{u\in V:\frac{d^4u}{dx^4}\in L_2(-D,D),\frac{d^3u}{dx^3}\in V\}$，$A$ 在 $L_2(\Omega)$ 中是自共扼算子，满足 $AW_k=\lambda_k W_k$，$(k=1,2,\cdots)$，其中 $\lambda_k=\left(\frac{2\pi k}{D}\right)^4$ 容易检验

$$V=D_{A^{\frac{1}{4}}},\|u\|_1=\|A^{\frac{1}{4}}u\|_{L_2}=\|A^{\frac{1}{4}}u\|,u\in V$$

$$A^{\frac{1}{2}}u=\frac{d^2u}{dx^2},u\in D_{A^{\frac{1}{2}}},\|u\|_3=\|A^{\frac{3}{4}}u\|,u\in D_{A^{\frac{3}{4}}}$$

GKS 方程(2.4.1)可改写为算子形式。

$$\frac{du}{dt}+\gamma Au-\alpha A^{\frac{1}{2}}u+f(u)_x+\varphi(u)_{xx}=g(u)+h(x) \tag{2.4.27}$$

引理2.4.5 设 $u_1^0,u_2^0\in B$，$u_i^0(x)(i=1,2)$ 和 $h(x)$ 均为奇周期函数，$u_1(t)=S(t)u_1^0$，$u_2(t)=S(t)u_2^0$，$t\geqslant 0$，我们有如下估计

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|\leqslant\|u_1^0-u_2^0\|e^{2Kt},\forall\ t\geqslant 0 \tag{2.4.28}$$

其中 $S(t)u_i^0$ 表示方程(2.4.27)具有初值 $u_i^0(x)(i=1,2)$ 所生成的

半群，

$$B = \bigcup_{t\geqslant 0} S(t) B_{2E},$$

$$B_{2E} = \{u \in D_{A^{\frac{3}{4}}}, \|u\|_3 \leqslant 2(E_0 + E_1 + E_2 + E_3)\} \tag{2.4.29}$$

常数 E_0，E_1，E_2和 E_3分别为式(2.4.4)、(2.4.8)、(2.4.19)和式(2.4.21)所确定

$$\left\{\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\sup_{0\leqslant t<\infty}\Big(\|R_{2x}\|_{L_\infty(\Omega)} + 2\|R_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \\ &\quad \frac{3}{4\gamma}\|R_3\|^2_{L_\infty(\Omega)}\Big) + \frac{3\alpha^2}{4\gamma} - \frac{2\gamma}{3}\lambda_1 \\ \lambda_1 &= \left(\frac{2\pi}{D}\right)^4 \\ R_1 &= \int_0^1 f'_u(\tau u_1 + (1-\tau)u_2)\,\mathrm{d}\tau + \\ &\quad \int_0^1 f''_{ux}(\tau u_1 + (1-\tau)u_2)\,\mathrm{d}\tau + \\ &\quad \int_0^1 g'_u(\tau u_1 + (1-\tau)u_2)\,\mathrm{d}\tau + \\ &\quad \int_0^1 \varphi''_{ux}(\tau u_1 + (1-\tau)u_2)\,\mathrm{d}\tau \\ R_2 &= \int_0^1 f'_u(\tau u_1 + (1-\tau)u_2)\,\mathrm{d}\tau + \\ &\quad 2\int_0^1 \varphi''_{ux}(\tau u_1 + (1-\tau)u_2)\,\mathrm{d}\tau \\ R_3 &= \int_0^1 \varphi'_u(\tau u_1 + (1-\tau)u_2)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}\right. \tag{2.4.30}$$

证明 令 $W = u_1 - u_2$，则由式(2.4.27)可得

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} + \gamma AW - \alpha A^{\frac{1}{2}}W + f(u_1)_x = $$

$$f(u_2)_x + \varphi(u_1)_{xx} - \varphi(u_2)_{xx} - g(u_1) + g(u_2) = 0 \tag{2.4.31}$$

其中

$$f(u_1)-f(u_2)=W\int_0^1 f'_u(\tau u_1+(1-\tau)u_2)\mathrm{d}\tau$$

$$(f(u_1)-f(u_2))_x=W_x\int_0^1 f'_u\mathrm{d}\tau+W\int_0^1 f''_{ux}\mathrm{d}\tau$$

$$f''_{ux}=f''_{uu}(\tau u_1+(1-\tau)u_2)(\tau u_{1x}+(1-\tau)u_{2x})$$

$$(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))_{xx}=$$

$$W_{xx}\int_0^1\varphi'_u(\tau u_1+(1-\tau)u_2)\mathrm{d}\tau+$$

$$2\int_0^1\varphi''_{ux}(\tau u_1+(1-\tau)u_2)\mathrm{d}\tau W+W\int_0^1\varphi'''_{uxx}\mathrm{d}\tau$$

$$\varphi'''_{uxx}=\varphi'''_{uuu}(\tau u_{1x}+(1-\tau)u_{2x})+\varphi''_{ux}(\tau u_{1xx}+(1-\tau)u_{2xx})$$

$$g(u_1)-g(u_2)=W\int_0^1 g'_u(\tau u_1+(1-\tau)u_2)\mathrm{d}\tau$$

因此式(2.4.31)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}+\gamma AW-\alpha A^{\frac{1}{2}}W+R_1W+R_2W_x+R_3W_{xx}=0 \tag{2.4.32}$$

W 满足初值

$$W(0)=u_1^0-u_2^0 \tag{2.4.33}$$

其中

$$\begin{cases}R_1=\int_0^1 f'_u\mathrm{d}\tau+\int_0^1 f''_{ux}\mathrm{d}\tau+\int_0^1\varphi'''_{uxx}\mathrm{d}\tau+\int_0^1 g'_u\mathrm{d}\tau\\ R_2=\int_0^1 f'_u\mathrm{d}\tau+2\int_0^1\varphi''_{ux}\mathrm{d}\tau\\ R_3=\int_0^1\varphi'_u\mathrm{d}\tau\end{cases} \tag{2.4.34}$$

式(2.4.33)和 W 作内积可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|W\|^2+\gamma\|A^{\frac{1}{2}}W\|^2-\alpha\|A^{\frac{1}{4}}W\|^2+$$

$$(R_1W, W) + (R_2W_x, W) - (R_2W_{xx}, W) = 0 \tag{2.4.35}$$

其中

$$|(R_1W, W)| \leqslant \|R_1\|_{L_\infty} \|W\|^2$$

$$|(R_2W_x, W)| \leqslant \frac{1}{2}\|R_{2x}\|_{L_\infty} \|W\|^2$$

$$|(R_3W_{xx}, W)| \leqslant \|R_2\|_{L_\infty} \|W_{xx}\| \|W\| \leqslant$$

$$\frac{\gamma}{3}\|A^{\frac{1}{2}}W\|^2 + \frac{3}{4\gamma}\|R_3\|_{L_\infty}^2 \|W\|^2$$

$$\alpha\|A^{\frac{1}{4}}W\|^2 \leqslant \alpha\|A^{\frac{1}{2}}W\| \|W\| \leqslant \frac{\gamma}{3}\|A^{\frac{1}{2}}W\|^2 + \frac{3\alpha^2}{4\gamma}\|W\|^2$$

因此,由式(2.4.35)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|W\|^2 + \frac{\gamma}{3}\|A^{\frac{1}{2}}W\|^2 \leqslant$$

$$\frac{1}{2}\left(\|R_{2x}\|_{L_\infty} + \|R_1\|_{L_\infty} + \frac{3}{4\gamma}\|R_3\|_{L_\infty}^2 + \frac{3\alpha^2}{4\gamma}\right)\|W\|_{L_\infty}^2 \tag{2.4.35$'$}$$

由于

$$\|W_x\| \leqslant \|W\|^{\frac{1}{2}} \|W_{xx}\|^{\frac{1}{2}}$$

$$\|W_{xx}\|^2 \geqslant \frac{\|W_x\|^4}{\|W\|^2} = \frac{\|W_x\|^4}{\|W\|^4}\|W\|^2 \geqslant \lambda_1\|W\|^2$$

由(2.4.35)′可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|W\|^2 + \frac{2\gamma}{3}\lambda_1\|W\|^2 \leqslant$$

$$\left(\|R_{2x}|_{L_\infty} + 2\|R_1\|_{L_\infty} + \frac{3}{4\gamma}\|R_3\|_{L_\infty}^2 + \frac{3\alpha^2}{2\gamma}\right)\|W\|^2$$

由此即得

$$\|W(\cdot, t)\|^2 = \|u_1(t) - u_2(t)\|^2 \leqslant \|W(0)\|^2 e^{2Kt}, t \geqslant 0$$

引理2.4.6 设 $u_1, u_2 \in B$ 且 $[S(t)u_1, S(t)u_2] \notin C_N(\gamma_1)$, $\forall t \geqslant 0$,则对任何 N,只要

$$N+1 \geqslant N_0(\gamma,\tilde{D}) \tag{2.4.36}$$

其中

$$N_0(\gamma,\tilde{D}) =$$

$$(3\tilde{D}^4\gamma^{-1})^{\frac{1}{4}}\left[\frac{\sqrt{2}}{\gamma_1}\sup_{0\leqslant t<\infty}(\|R_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|R_{2x}\|_{L_\infty(\Omega)} +\right.$$

$$\|R_{3x}\|_{L_\infty(\Omega)} + \|R_{3xx}\|_{L_\infty(\Omega)}) +$$

$$\frac{4\alpha^2}{\gamma} + \frac{3}{4}\gamma^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\gamma_1}\right)^{\frac{4}{3}}(\sup_{0\leqslant t<\infty}\|R_2\|_{L_\infty})^{\frac{4}{3}} +$$

$$\frac{8}{\gamma\gamma_1^2}\sup_{0\leqslant t<\infty}\|R_{3x}\|_{L_\infty}^2 +$$

$$\left.\frac{8}{\gamma\gamma_1^2}(\sup_{0\leqslant t<\infty}\|R_3\|_{L_\infty})^2\right]^{\frac{1}{4}},\tilde{D}=\frac{D}{2\pi}$$

则有

$$\|S(t)u_1 - S(t)u_2\| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\gamma_1}\|u_1-u_2\|\exp\left[-\frac{\gamma}{2}\frac{(N+1)^4}{\tilde{D}^4}t\right],$$

$$t \geqslant 0 \tag{2.4.37}$$

证明

$$p_N = P_N(S(t)u_1 - S(t)u_2),q_N = Q_N(S(t)u_1 - S(t)u_2)$$

因

$$B = \bigcup_{t\geqslant 0} S(t)B_{2E},$$

$$B_{2E} = \{u \in D_{A^{\frac{3}{4}}},\|u\|_3 \leqslant 2(E_0+E_1+E_2+E_3)\}$$

$$[u_1,u_2] \in B\times B\backslash C_N(\gamma_1)$$

其中

$$C_N(\gamma_1) = \{0<\gamma_1\leqslant 1,\|Q_N(u_1-u_2)\| \leqslant \gamma_1\|P_N(u_1-u_2)\|\}$$

则对问题(2.4.32)、(2.4.33),令 $W=p_N\oplus q_N$,式(2.4.32)和 q_N 作内积可得

$$\left(q_N,\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} + \gamma AW - \alpha A^{\frac{1}{2}}W + R_1W + R_2W_x + R_3W_{xx}\right) = 0 \tag{2.4.38}$$

其中

$$\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t},q_N\right)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_N+q_N),q_N\right)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|q_N\|^2$$

$$(\gamma AW,q_N)=\gamma(A(p_N+q_N),q_N)=\gamma\|A^{\frac{1}{2}}q_N\|^2$$

$$\alpha\left(-A^{\frac{1}{2}}W,q_N\right)=-\alpha\left(A^{\frac{1}{2}}q_N,q_N\right)=-\alpha\|A^{\frac{1}{4}}q_N\|^2$$

$$|(R_1W,q_N)|\leqslant\|R_1\|_{L_\infty}\|W\|\|q_N\|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{\gamma_1}\|R_1\|_{L_\infty}\|q_N\|^2$$

$$\begin{aligned}|(R_2W_x,q_N)|=&|-(R_{2x}W,q_N)-(R_2W,q_{Nx})|\leqslant\\&\|R_{2x}\|_{L_\infty}\|W\|\|q_N\|+\|R_2\|_{L_\infty}\|W\|\|q_{Nx}\|\leqslant\\&\frac{\sqrt{2}}{\gamma_1}\|R_{2x}\|_{L_\infty}\|q_N\|^2+\frac{\sqrt{2}}{\gamma_1}\|R_2\|_{L_\infty}\|q_N\|\|q_{Nx}\|\end{aligned}\tag{2.4.39}$$

$$\begin{aligned}&|(R_3W_{xx},q_N)|=\\&|-(R_{3x}W_x,q_N)-(R_3W_x,q_{Nx})|=\\&|(R_{3xx}W,q_N)+2(R_{3x}W,q_{Nx})+(R_3W,q_{Nxx})|\leqslant\\&(\|R_{3xx}\|_{L_\infty}\|q_N\|+2\|R_{3x}\|_{L_\infty}\|q_{Nx}\|+\\&\|R_3\|_{L_\infty}\|q_{Nxx}\|)\frac{\sqrt{2}}{\gamma_1}\|q_N\|\end{aligned}\tag{2.4.40}$$

利用估计

$$\|q_{Nx}\|^2\leqslant\|q_N\|\|q_{Nxx}\|$$

则式(2.4.39)可估计如下

$$\begin{aligned}&|(R_2W,q_N)|\leqslant\\&\frac{\sqrt{2}}{\gamma_1}\|R_{2x}\|_{L_\infty}\|q_N\|^2+\frac{\sqrt{2}}{\gamma_1}\|R_2\|_{L_\infty}\|q_N\|^{\frac{3}{2}}\|q_{Nxx}\|^{\frac{1}{2}}\leqslant\\&\left[\frac{\sqrt{2}}{\gamma_1}\|R_{2x}\|_{L_\infty}+\frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{\gamma_1}\right)^{\frac{4}{3}}\gamma^{-\frac{1}{3}}\|R_2\|_{L_\infty}^{\frac{4}{3}}\right]\|q_N\|^2+\frac{\gamma}{4}\|q_{Nxx}\|^2\end{aligned}\tag{2.4.41}$$

式(2.4.40)可估计如下

$$
\begin{aligned}
&|(R_3W_{xx},q_N)|\leqslant \\
&\frac{\sqrt{2}}{\gamma_1}\|R_{2xx}\|_{L_\infty}\|q_N\|^2-\frac{\sqrt{2}}{\gamma_1}\|R_{3x}\|_{L_\infty}(\|q_N\|^2+\|q_{Nxx}\|^2)+ \\
&\frac{\sqrt{2}}{\gamma_1}\|R_3\|_{L_\infty}\|q_N\|\|q_{Nxx}\|\leqslant \\
&\frac{\sqrt{2}}{\gamma_1}(\|R_{3xx}\|_{L_\infty}+\|R_{3x}\|_{L_\infty})\|q_N\|^2+\frac{\gamma}{16}\|q_{Nxx}\|^2+ \\
&\frac{8}{\gamma\gamma_1^2}\|R_{3x}\|_{L_\infty}^2\|q_N\|^2+\frac{\gamma}{16}\|q_{Nxx}\|^2+ \\
&\frac{8}{\gamma\gamma_1^2}\|R_3\|_{L_\infty}^2\|q_N\|^2\leqslant \\
&\Big[\frac{\sqrt{2}}{\gamma_1}(\|R_{3xx}\|_{L_\infty}+\|R_{3x}\|_{L_\infty})+\frac{8}{\gamma\gamma_1^2}\|R_{3x}\|_{L_\infty}^2+ \\
&\frac{8}{\gamma\gamma_1^2}\|R_3\|_{L_\infty}^2\Big]\|q_N\|^2+\frac{\gamma}{8}\|q_{Nxx}\|^2
\end{aligned}
\tag{2.4.42}
$$

$$
\alpha\|q_{Nx}\|^2\leqslant\frac{\gamma}{16}\|q_{Nxx}\|^2+\frac{4\alpha^2}{\gamma}\|q_N\|_{L_\infty}^2 \tag{2.4.43}
$$

由式(2.4.38)、(2.4.41)、(2.4.42)、(2.4.43)可得

$$
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|q_N\|^2+\frac{9}{16}\gamma\|A^{\frac{1}{4}}q_N\|^2\leqslant R\|q_N\|^2 \tag{2.4.44}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
R=&\frac{\sqrt{2}}{\gamma_1}(\|R_1\|_{L_\infty}+\|R_{2x}\|_{L_\infty}+\|R_{3x}\|_{L_\infty}+\|R_{3xx}\|_{L_\infty})+ \\
&\frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{\gamma_1}\right)^{\frac{4}{3}}\gamma^{-\frac{1}{3}}\|R_2\|_{L_\infty}^{\frac{4}{3}}+ \\
&\frac{8}{\gamma\gamma_1^2}\|R_{3x}\|_{L_\infty}^2+\frac{8}{\gamma\gamma_1^2}\|R_3\|_{L_\infty}^2+\frac{4\alpha^2}{\gamma}
\end{aligned}
\tag{2.4.45}
$$

选取 N 适当大，即，$N+1\geqslant N_6(\gamma,\tilde{D})$，使得

$$\gamma\lambda_{N+1}-\sup_{0\leqslant t<\infty}R\geqslant 0$$

其中

$$\lambda_{N+1}=\left(\frac{2\pi(N+1)}{D}\right)^4=\frac{(N+1)^4}{\tilde{D}^4},\tilde{D}\equiv\frac{D}{2\pi}$$

则由式(2.4.44)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|q_N\|^2+\frac{\gamma}{8}\lambda_{N+1}\|q_N\|^2\leqslant 0 \tag{2.4.46}$$

因

$$\|W\|^2\leqslant\|p_N\|^2+\|q_N\|^2\leqslant\frac{2}{\gamma_1^2}\|q_N\|^2$$

因为由式(2.4.46)即得估计

$$\|S(t)u_1-S(t)u_2\|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{\gamma_1}\|u_1-u_2\|\exp\left[-\frac{\gamma}{16}\frac{(N+1)^4}{\tilde{D}^4}t\right],$$

$$\forall\ t\geqslant 0 \tag{2.4.47}$$

引理2.4.7 若满足条件：当 $N+1\geqslant\tilde{N}_0(\gamma,\tilde{D})$，使得

$$\frac{19}{48}\gamma\lambda_{N+1}-\frac{7\gamma}{6\gamma_1^2}\lambda_N-\bar{R}>0 \tag{2.4.48}$$

其中

$$\begin{cases}\lambda_N=\dfrac{(N+1)^4}{\tilde{D}^4}\\ \bar{R}=\sup\limits_{0\leqslant t<\infty}R+\sup\limits_{0\leqslant t<\infty}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{\gamma_1}\|R_1\|_{L_\infty}+\right.\\ \qquad\left.\dfrac{1}{2\gamma_1^2}\|R_{2x}\|_{L_\infty}+\dfrac{3}{\gamma\gamma_1^2}+\|R_3\|_{L_\infty}+\dfrac{1}{2\gamma_1^2}\|R_2\|_{L_\infty}^2\right]+\dfrac{3}{8\gamma}\end{cases} \tag{2.4.49}$$

则 $C_N(\gamma_1)=\{0<\gamma_1\leqslant 1,\|Q_N(u_1-u_2)\|\leqslant\gamma_1\|P_N(u_1-u_2)\|\}$ 是严格正不变的，即如果 $(u_1,u_2)\in C_N(\gamma_1)$，则

$$(S(t)u_1, S(t)u_2) \in C_N(\gamma_1) - \partial C_N(\gamma_1), \forall t \geqslant 0$$

证明 令 $p_N = P_N(S(t)u_1 - S(t)u_2)$，$q_N = Q_N(S((t)u_1 - S(t)u_2)$，$W = p_N \oplus q_N$，我们在引理2.4.6的推导中可知估计式(2.4.47)在$\|q_N\|^2 = \gamma_1^2\|p_N\|^2$上仍成立，现作式(2.4.32)和$p_N$的内积有

$$\left(p_N, \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} + \gamma AW - \alpha A^{\frac{1}{2}}W + R_1W + R_2W_x + R_3W_{xx}\right) = 0 \tag{2.4.50}$$

因

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_N \oplus q_N), p_N\right) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|p_N\|^2$$

$$(\gamma A(p_N \oplus q_N), p_N) = \gamma\|A^{\frac{1}{2}}p_N\|^2$$

$$\alpha\left(A^{\frac{1}{2}}(p_N \oplus q_N), p_N\right) = \alpha\left(A^{\frac{1}{2}}p_N, p_N\right) + \alpha\left(q_N, A^{\frac{1}{2}}p_N\right) = \alpha\|A^{\frac{1}{2}}p_N\|^2$$

$$|(R_1W, p_N)| \leqslant \|R_1\|_{L_\infty}\|W\|\|p_N\| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\gamma_1}\|R_1\|_{L_\infty}\|q_N\|^2$$

$$\begin{aligned}
&|(R_2W_x, p_N)| = \\
&\quad |(R_2(p_{N_x} + q_{N_x}), p_N)| \leqslant \\
&\quad \frac{1}{2}\|R_{2x}\|_{L_\infty}\|p_N\|^2 + \frac{1}{\gamma_1}\|R_2\|_{L_\infty}\|q_N\|\|q_{N_x}\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&|(R_3W_{xx}, p_N)| = \\
&\quad |(R_3(p_{N_{xx}} + q_{N_{xx}}), p_N)| \leqslant \\
&\quad |(R_3(p_{N_{xx}}, p_N)| + |(R_3q_{N_{xx}}, p_N)| \leqslant \\
&\quad \frac{\gamma}{6}\|p_{N_{xx}}\|^2 + \frac{3}{2\gamma}\|R_3\|_{L_\infty}^2\|p_N\|^2 + \\
&\quad \frac{\gamma}{6}\|p_{N_{xx}}\|^2 + \frac{3}{2\gamma}\|R_3\|_{L_\infty}^2\|p_N\|^2 \leqslant
\end{aligned}$$

$$\frac{\gamma}{6}\|p_{Nxx}\|^2+\frac{\gamma}{6}\|p_{Nxx}\|^2+\frac{3}{\gamma\gamma_1^2}\|R_3\|_{L_\infty}^2\|q_N\|^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_N+\gamma\|A^{\frac{1}{2}}p_N\|^2\geqslant$$

$$\alpha\|A^{\frac{1}{4}}p_N\|^2-\frac{\sqrt{2}}{\gamma_1^2}\|R_1\|_{L_\infty}\|q_N\|^2-$$

$$\frac{1}{2}\|R_{2x}\|_{L_\infty}\|q_N\|^2-\frac{1}{\gamma_1}\|R_2\|_{L_\infty}\|q_N\|\|q_{Nxx}\|-$$

$$\frac{\gamma}{6}\|p_{Nxx}\|^2-\frac{\gamma}{6}\|q_{Nxx}\|^2-\frac{3}{2\gamma\gamma_1^2}\|R_3\|_{L_\infty}^2\|q_N\|^2$$

因此有$(0<\gamma_1\leqslant 1)$

$$-\frac{\gamma_1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|p_N\|^2\leqslant$$

$$\gamma\|A^{\frac{1}{2}}p_N\|^2-\gamma_1\alpha\|A^{\frac{1}{4}}p_N\|^2+\frac{\sqrt{2}}{\gamma_1^2}\|R_1\|_{L_\infty}\|q_N\|^2+$$

$$\frac{1}{2}\|R_{2x}\|_{L_\infty}\cdot\frac{1}{\gamma_1^2}\|q_N\|^2+\frac{1}{\gamma_1}\|R_2\|_{L_\infty}\|q_N\|\|q_{Nx}\|+$$

$$\frac{\gamma}{6}\|p_{Nxx}\|^2+\frac{\gamma}{6}\|q_{Nxx}\|^2+\frac{3}{\gamma\gamma_1^2}\|R_3\|_{L_\infty}^2\|q_N\|^2=S$$

$$(2.4.51)$$

由式(2.4.44)和式(2.4.51)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|q_N\|^2-\gamma_1\|p_N\|^2]+\frac{9}{16}\gamma\|A^{\frac{1}{2}}q_N\|^2\leqslant R\|q_N\|^2+S$$

$$(2.4.52)$$

其中

$$\|A^{\frac{1}{4}}p_N\|^2\leqslant\lambda_N\|p_N\|^2\leqslant\frac{\lambda_N}{\gamma_1^2}\|q_N\|^2$$

$$\frac{1}{\gamma_1}\|R_2\|_{L_\infty}\|q_N\|\|q_{Nx}\|\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\left[\|p_{Nx}\|^2+\frac{1}{\gamma_1^2}\|R_2\|_{L_\infty}^2\|q_N\|^2\right]\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\gamma}{3}\|q_{Nxx}\|^2+\frac{3}{4\gamma}\|q_N\|^2+\frac{1}{\gamma_1^2}\|R_2\|_{L_\infty}^2\|q_N\|^2\right]\leqslant$$

$$\frac{\gamma}{6}\|A^{\frac{1}{2}}q_N\|^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\gamma_1^2}\|R_2\|_{L_\infty}^2+\frac{3}{4\gamma}\|q_N\|^2\right)$$

于是由式(2.4.52)有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|q_N\|^2-\gamma_1\|p_N\|^2]+\frac{9\gamma}{16}\|A^{\frac{1}{2}}q_N\|^2\leqslant$$

$$\left[R+\frac{\sqrt{2}}{\gamma_1^2}\|R_1\|_{L_\infty}+\frac{1}{2\gamma_1^2}\|R_{2x}\|_{L_\infty}+\frac{1}{2}\left(\frac{\|R_2\|_{L_\infty}^2}{\gamma_1^2}+\frac{3}{4\gamma}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{3}{\gamma\gamma_1^2}\|R_3\|_{L_\infty}^2+\frac{7}{6}\frac{\gamma}{\gamma_1^2}\lambda_N\right]\|q_N\|^2\leqslant$$

$$\left[\overline{R}+\frac{7\gamma}{6\gamma_1^2}\lambda_N\right]\|q_N\|^2$$

因此当 $N+1\geqslant\widetilde{N}_0(\gamma,\gamma_1,\widetilde{D})$ 使得

$$\frac{19}{48}\gamma\lambda_{N+1}-\frac{7\gamma}{6\gamma_1^2}\lambda_N-\overline{R}>0,\lambda_{N+1}=\frac{(N+1)^4}{\widetilde{D}^4} \tag{2.4.53}$$

即有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|q_N\|^2-\gamma_1\|p_N\|^2]<0$$

引理得证

由引理2.4.6和引理2.4.7可得如下定理：

定理2.4.1 设引理2.4.6，引理2.4.7条件满足，则对于方程GKS存在 $N_0=N_0(\gamma,\gamma_1,\widetilde{D})$ 使得当 $N+1>N_0$ 时成立：

(1) 锥 $C_N(\gamma_1)$ 是严格不变的，即如果 $[u_1,u_2]\in C_N(\gamma_1)$，则 $[S(t)u_1,S(t)u_2]\in C_N(\gamma_1)\backslash\partial C_N(\gamma_1),\forall t\geqslant 0$；

(2) $B\times B\backslash C_N(\gamma_1)$ 是指数挤压的，即对 $u_1,u_2\in B$ 和 $[S(t)u_1,S(t)u_2]\notin C_N(\gamma_1)$，我们有

$$\|S(t)u_1-S(t)u_2\|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{\gamma_1}\|u_1-u_2\|\exp\left[-\frac{\gamma}{16}\frac{(N+1)^4}{\widetilde{D}^4}t\right],$$

$$\forall t\geqslant 0$$

现证明 PGKS 方程的惯性流形的存在性。

设 $\theta(s):\mathbf{R}^+\to[0,1]$上的光滑非增函数，使得 $\theta(s)=1,0\leqslant s\leqslant 1;\theta(s)=0,s\geqslant 2,\sup\limits_{s\geqslant 0}|\theta'(s)|\leqslant 2$。

考虑如下的 PGKS 方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\gamma AW+\theta\left(\frac{\|u\|_1}{E}\right)\left(-\alpha A^{\frac{1}{2}}u\right)+F(u)_x+$$

$$\Phi(u)_{xx}+\theta\left(\frac{\|u\|_1}{E}\right)\left(-g(u)-h(x)\right)=0 \tag{2.4.54}$$

其中 $E=2(E_0+E_1)$，$B_E=\{u:\|u\|_1\leqslant E\}$为 GKS 方程的吸收集，$F(u)=f\left(\theta\left(\frac{\|u\|_1}{E}\right)u\right)$，$\Phi(u)=\varphi\left(\theta\left(\frac{\|u\|_1}{E}\right)u\right)$。显然，当 $u\in B_E$ 式，则 PGKS 方程和 GKS 方程是相同的。对于某正整数 N，算子 $P=P_N$ 表示 Hilbert 空间 H 到算子 A 的特征函数$\{W_1,\cdots,W_N\}$所张子空间的正交投影，$Q=Q_N=I-P_N$，显然算子 P,Q 与算子 A^β，$\forall\ \beta\in\mathbf{R}$ 是可交换的。

对于给定 $b,l>0$，且 $b,l\in(0,1]$，我们定义 Lipschitz 函数集 $\mathscr{F}=\mathscr{F}^\alpha_{b,l}:PD(A^\alpha)\to QD(A^\alpha)$，满足条件

$$\begin{cases}(1)\ \mathrm{Supp}\ \Phi\subset\{p\in PD(A^\alpha),\|A^\alpha p\|<2E\};\\(2)\ \|A^\alpha\Phi(p)\|\leqslant b,\forall\ p\in PD(A^\alpha);\\(3)\ \|A^\alpha\Phi(p_1)-A^\alpha\Phi(p_2)\|\leqslant l\|A^\alpha(p_1-p_2)\|,\\\quad\forall\ p_1,p_2\in PD(A^\alpha)\end{cases} \tag{2.4.55}$$

若在 $\mathscr{F}=\mathscr{F}^\alpha_{b,l}$ 上定义如下的距离

$$d(\Phi_1,\Phi_2)=\sup_{p\in PD(A^\alpha)}\|A^\alpha(\Phi_1(p)-\Phi_2(p))\| \tag{2.4.56}$$

则 $\mathscr{F}$ 是完备的。

令

$$u=p+\bar{\varphi}(p) \tag{2.4.57}$$

其中$\bar{\varphi}(p)\in\mathscr{F}^{1/4}_{bl}$，则$(p,\bar{\varphi}(p))$满足方程组

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+\gamma Ap+\theta\left(\frac{\|u\|_1}{E}\right)\left(-\alpha A^{\frac{1}{2}}p\right)+p_N B(u,v)=0$$

(2.4.58)

$$\frac{\mathrm{d}\,\bar{\varphi}(p)}{\mathrm{d}t}+\gamma A\,\bar{\varphi}(p)+\theta\left(\frac{\|u\|_1}{E}\right)\left(-\alpha A^{\frac{1}{2}}\,\bar{\varphi}(p)\right)+Q_N B(u,v)=0$$

(2.4.59)

$$B(u,v)\stackrel{\text{def}}{=\!=}F(u)_x+\Phi(u)_{xx}+\theta\left(\frac{\|u\|_1}{E}\right)(-g(u)-h(x))$$

(2.4.60)

显然，如果 $p(t)$ 为式(2.4.58)在$(-\infty,+\infty)$上的有界唯一解，则 $\bar{\varphi}(p)$ 为式(2.4.59)在$(-\infty,+\infty)$上的有界解，且有表达式

$$\bar{\varphi}(p_0)=-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\tau\gamma AQ_N}\left\{-\alpha A^{\frac{1}{2}}\,\bar{\varphi}(p(\tau))\theta\left(\frac{\|p(\tau)+\bar{\varphi}(p(\tau))\|_1}{E}\right)+\right.$$
$$\left.Q_N B(p(\tau)+\bar{\varphi}(p(\tau)),p(\tau)+\bar{\varphi}(p(\tau))\right\}\mathrm{d}\tau$$

(2.4.61)

其中

$$p_0=p(0),p(\tau)=p(\tau;p_0,\bar{\varphi}),p(0;p_0,\bar{\varphi})=p_0$$

(2.4.62)

现定义泛函算子：$\mathscr{F}_0:\mathscr{F}^{\frac{1}{4}}_{b,t}\to\mathscr{F}$ 为

$$\mathscr{F}_0\,\bar{\varphi}=-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\tau\gamma AQ_N}\left\{-\alpha A^{\frac{1}{2}}\,\bar{\varphi}(p)\theta\left(\frac{\|u\|_1}{E}\right)+Q_N(u,u)\right\}\mathrm{d}\tau$$

(2.4.63)

其中 $u=p+\bar{\varphi}(p)$，且

$$p=p(\tau;p_0,\bar{\varphi})\qquad(2.4.64)$$

为方程(2.4.58)满足初值条件

$$p(0;p_0,\bar{\varphi})=p_0\qquad(2.4.65)$$

的解。于是惯性流形的存在性，即寻求图$(p,\bar{\varphi}(p))$的存在性，归结为求泛函方程

$$\mathscr{F}_0\Phi=\Phi,\Phi\in\mathscr{F}^{\frac{1}{4}}_{b,t}\qquad(2.4.66)$$

不动点的存在性。为此，为了考虑方程(2.4.58)在$(-\infty,+\infty)$上有界解的存在性，我们需要以下引理：

引理2.4.8 给定$\bar{\varphi}\in\mathscr{F}$，$p_0\in PD(A^{\frac{1}{4}})$且设$f(0)=\varphi(0)=0$，则存在$t\in(-\infty,+\infty)$上的问题(2.4.58)、(2.4.62)的唯一解$p(t;p_0,\bar{\varphi})\in L^{\infty}(\mathbf{R};D(A^{\frac{1}{4}}))$

证明 先证明映照$\sigma\to\alpha\theta\left(\frac{\|\sigma+\bar{\varphi}(\sigma)\|_1}{E}\right)A^{\frac{1}{2}}\sigma-p_N B(\sigma+\bar{\varphi}(\sigma),\sigma+\bar{\varphi}(\sigma))$是 Lipschitz 连续的：$D(A^{\frac{1}{4}})\to D(A^{\frac{-1}{4}})$。事实上，设$u_1,u_2\in D(A^{\frac{1}{4}})$，$\theta_i=\theta_i\left(\frac{\|u_i\|_1}{E}\right)$，$i=1,2$，可证

$$
\begin{aligned}
L=&\alpha\|\theta_1A^{\frac{1}{4}}p_1-\theta_2A^{\frac{1}{4}}p_2\|+\\
&\|A^{\frac{1}{4}}(B(u_1,u_1)-B(u_2,u_2))\|\leqslant\\
&C\|A^{\frac{1}{4}}(u_1-u_2)\|
\end{aligned}
$$

为此，我们考虑三种不同情况：

(1) $\|A^{\frac{1}{4}}u_1\|=\|u_1\|_1$，$\|A^{\frac{1}{4}}u_2\|=\|u_2\|_1\geqslant 2E$，则$\theta_i=0(i=1,2)$，$L=0$，论断显然真。

(2) $\|u_1\|_1\leqslant 2E\leqslant\|u_2\|_1$，则$\theta_2=0$，且

$$
\begin{aligned}
L=&\alpha\left|\theta\left(\frac{\|u_1\|_1}{E}\right)-\theta\left(\frac{\|u_2\|_1}{E}\right)\right|\|A^{\frac{1}{4}}p_1\|+\\
&\|F(u_1)+A^{\frac{1}{4}}\Phi(u_1)+\theta_1A^{-\frac{1}{4}}(-g(u)-h)\|=\\
&\alpha|\theta_1-\theta_2|\|p_1\|_1+\|f((\theta_1-\theta_2)u_1)+\varphi((\theta_1-\theta_2)u_1)_x+\\
&(\theta_1-\theta_2)A^{-\frac{1}{4}}(-g(u)-h)\|\leqslant\\
&\frac{2\alpha}{E}\|u_1-u_2\|_1\|p_1\|_1+2/E\|f'_u\|_{L_\infty}\|u_1\|_{L_\infty}\|u_1-u_2\|_1+\\
&\frac{2}{E}\|\varphi_u\|_{L_\infty}\|u_1\|_{L_\infty}\|u_1-u_2\|_1+\\
&\frac{2}{E}\|A^{-\frac{1}{4}}(-g(u)-h)\|\|u_1-u_2\|_{L_2}\leqslant\\
&\left(\frac{2\alpha}{E}\|p_1\|_1+\|f'_u\|_{L_\infty}2/E\|u_1\|_{L_\infty}+2/E\|\varphi_u\|_{L_\infty}+\right.
\end{aligned}
$$

$$2/E\|A^{-\frac{1}{4}}(g(u)+h)\|\big)\|u_1-u_2\|_1 \leqslant$$

$$C\|A^{\frac{1}{4}}(u_1-u_2)\|$$

其中

$$|(g(u)+h,v)| \leqslant (\|g(u)\|+\|h(x)\|)\|v\| \leqslant$$

$$C\|v\|_1\|A^{-\frac{1}{4}}(g(u)+h)\| \leqslant C$$

(3) $\|u_1\|_1,\|u_2\|_1<2E$,则有

$$L=\alpha\|\theta_1A^{\frac{1}{4}}p_1-\theta_2A^{\frac{1}{4}}p_2\|+\|A^{-\frac{1}{4}}(B(u_1,u_1)-B(u_2,u_2))\| \leqslant$$

$$\alpha\|(\theta_1-\theta_2)A^{\frac{1}{4}}p_1+\theta_2\big(A^{\frac{1}{4}}p_1-A^{\frac{1}{4}}p_2\big)\|+$$

$$\|A^{-\frac{1}{4}}[F(u_1)_x+\Phi(u_1)_{xx}+\theta_1(-g(u_1)-h(x))-$$

$$F(u_2)_x-\Phi(u_2)_{xx}-\theta_2(-g(u_2)-h(x))]\| \leqslant$$

$$\frac{2\alpha}{E}\|u_1-u_2\|_1\|A^{\frac{1}{4}}p_1\|+\alpha\|u_1-u_2\|_1+$$

$$\|F'(u)\|_{L_\infty}\|u_1-u_2\|_1+$$

$$\big(4E\|\Phi''(u)\|_{L_\infty}+\|\Phi'(u)\|_{L_\infty}\big)\|u_1-u_2\|_1+$$

$$\big(2/E\|g(u)\|_{L_\infty}+\|g'(u)\|_{L_\infty}\big)\|u_1-u_2\|_1 \leqslant$$

$$C\|u_1-u_2\|_1$$

以上我们证明了映照 $\sigma\to\alpha\theta\left(\frac{\|\sigma+\bar{\varphi}(\sigma)\|}{E}\right)A^{\frac{1}{2}}\sigma-P_NB(\sigma+\bar{\varphi}(\sigma),\sigma+\bar{\varphi}(\sigma))$ 是 Lipschitz 连续的 $PAp=APp=Ap$。$PD\big(A^{\frac{1}{4}}\big)$ 是有限维的,因此从常微分方程通常的解的存在定理,可知初值问题(2.4.58)、(2.4.62)具有唯一解 $p=p(t;p_0,\bar{\varphi})$,$\forall t\in\mathbf{R}$。

引理2.4.9 对任何 $\alpha\in\mathbf{R}$,给定 $\sigma\in L^\infty\big(\mathbf{R};D\big(A^{\alpha-\frac{1}{2}}\big)\big)$,则存在唯一连续有界函数 $\xi:\mathbf{R}\to D(A^\alpha)$,且满足方程

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}+A\xi=\sigma \tag{2.4.67}$$

引理2.4.10 若 $p_0\in PD\big(A^{\frac{1}{2}}\big)$,$\bar{\varphi}\in\mathscr{F}^{\frac{1}{4}}_{b,l}$,则存在方程(2.4.59)的连续有界唯一解 $\bar{\varphi}(p):\mathbf{R}\to QD\big(A^{\frac{1}{4}}\big)$。

证明 只要验证一下引理2.4.9的条件即可，即证$\sigma=\alpha A^{\frac{1}{2}}\bar{\varphi}(p)-Q_NB(p+\bar{\varphi}(p),p+\bar{\varphi}(p))\in L^\infty(\mathbf{R};D(A^{-\frac{1}{4}}))$，事实上，

$$\left|\left(\alpha A^{\frac{1}{2}}\bar{\varphi}(p),v\right)\right|=\left|\left(\alpha A^{\frac{1}{4}}\bar{\varphi}(p),A^{\frac{1}{4}}v\right)\right|\leqslant C\|A^{\frac{1}{4}}v\|=C\|v\|_1$$

$$\left|(F(u)_x+\Phi(u)_{xx}+\theta\left(\frac{\|u\|_1}{E}\right)(-g(u)-h(x),v)\right|\leqslant$$

$$\|F(u)\|\|v_x\|+\|\Phi'(u)\|_{L_\infty}\|u_x\|v_x\|+(\|g(u)\|+\|h(x)\|)\|v\|\leqslant$$

$$C\|v\|_1$$

因而$\sigma\in L^\infty\left(\mathbf{R};D\left(A^{-\frac{1}{4}}\right)\right)$，引理得证。

以下建立泛函算子$\mathscr{F}_0$的某些性质。

引理2.4.11 设$\bar{\varphi}\in\mathscr{F}^{\frac{1}{4}}_{b,l}$，则 $\text{Supp}\mathscr{F}_0\bar{\varphi}\subset B_{4E}=\{u:\|u\|_1\leqslant 4E\}$。

证明 若不然，设$\|p_0\|_1>4E$，则$\|U(0)|_1=(\|p_0\|_1^2+\|\bar{\varphi}(p_0)\|_1^2)^{\frac{1}{2}}>4E$，由于式(2.4.58)的解对$t$的连续性，必存在一个邻域$D$使得式(2.4.58)的解满足$\|p(t)\|_1>2E+\rho,\rho>0,\forall t\in\mathscr{D}$，因此

$$\|p(t)+\bar{\varphi}(p(t))\|_1>2E$$

于是有

$$F(p(t)+\bar{\varphi}(p(t)))=0,\Phi(p(t)+\Phi(p(t)))=0,$$

$$\theta\left(\frac{\|p+\bar{\varphi}(p)\|_1}{E}\right)=0$$

方程(2.4.58)归结为

$$A^{\frac{1}{2}}p(\tau)=\mathrm{e}^{-\gamma AP_N\tau}A^{\frac{1}{4}}p_0$$

上式至少对于$|\tau|$充分小成立，对于$\tau<0$有

$$\|p(\tau)\|_1=\|A^{\frac{1}{4}}p(\tau)\|\geqslant\mathrm{e}^{\gamma\lambda_1|\tau|}\|A^{\frac{1}{4}}p_0\|=\mathrm{e}^{\gamma\lambda_1|\tau|}\|p_0\|_1$$

因此

$$\|p(\tau)+\bar{\varphi}(p(\tau))\|_1\geqslant\|p(\tau)\|_1>4E,\forall\ \tau\leqslant 0$$

因此

$$\mathscr{F}_0 \bar{\varphi}(p_0) = 0$$

引理得证。

引理2.4.12[106] 对 $\alpha>0$和 $\tau<0$,算子$(AQ)^\alpha e^{\tau AQ}$在 QH 上线性连续,更进一步有,它在 $\mathscr{L}(QH)$上的模$\|(AQ)^\alpha e^{\tau AQ}\|_{op}$囿于

$$k_2(\alpha)|\tau|^{-\alpha},当 -\alpha\lambda_{N+1}^{-1} \leqslant \tau < 0 \tag{2.4.68}$$

$$\lambda_{N+1}^\alpha e^{\tau\lambda_{N+1}},当 -\infty < \tau \leqslant -\alpha\lambda_{N+1}^{-1} \tag{2.4.69}$$

如 $\alpha < 1$,则

$$\int_{-\infty}^0 \|(AQ)^\alpha e^{\tau AQ}\|_{\mathscr{L}(QH)} d\tau \leqslant k_3(\alpha)\lambda_{N+1}^{\alpha-1} \tag{2.4.70}$$

其中 λ_{N+1}为 $A|_{QH}$的最小特征值,$k_2(\alpha)$,$k_3(\alpha)$均为依赖于 α 的某确定常数。

引理2.4.13 设$\bar{\varphi}\in \mathscr{F}^{\frac{1}{4}}_{b,l}$,$b$,$l\in(0,1]$,则当 $N+1\geqslant N'_0(E)$时有

$$\|\mathscr{F}_0(\bar{\varphi})(p)\|_1 = \|A^{\frac{1}{4}}\mathscr{F}_0 \bar{\varphi}(p)\| \leqslant b \tag{2.4.71}$$

证明 由 $\mathscr{F}_0\bar{\varphi}(p)$的表达式(2.4.63)可得

$$\begin{aligned}
&\|A^{\frac{1}{4}}\mathscr{F}_0 \bar{\varphi}(p)\| \leqslant \\
&\quad \alpha\int_{-\infty}^0 \|(AQ_N)^{\frac{1}{2}} e^{\tau\gamma AQ_N}\| \|A^{\frac{1}{4}} \bar{\varphi}(p)\| d\tau + \\
&\quad \int_{-\infty}^0 \|(AQ_N)^{\frac{1}{4}} e^{\tau\gamma AQ_N}\| \|Q_N B_1(u,u)\| d\tau + \\
&\quad \int_{-\infty}^0 \|(AQ_N)^{\frac{1}{2}} e^{\tau\gamma AQ_N}\| \|A^{\frac{1}{4}}\Phi(u)\| d\tau
\end{aligned} \tag{2.4.72}$$

其中

$$B_1(u,u) = f(u)_x + \theta\left(\frac{\|u\|_1}{E}\right)(-g(u) - h(x))$$

$$\|Q_N B_1(u,v)\| \leqslant C\|f'(u)\|_{L_\infty}\|u\|_1 + \|g(u)\| + \|h(x)\|_2 \leqslant C_1(E)$$

$$\|A^{\frac{1}{4}}\Phi(u)\| \leqslant \|\varphi'(u)\|_{L_\infty}\|u\|_1 \leqslant C_2(E)$$

于是由引理 2.4.12 和式(2.4.72) 可得

$$\|\mathscr{F}_0\bar{\varphi}(p)\|_1 =$$

$$\|A^{\frac{1}{4}}\mathscr{F}_0\bar{\varphi}(p)\| \leqslant$$

$$abk_3\left(\frac{1}{2}\right)\lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}} + C_1(E)k_3\left(\frac{1}{4}\right)\lambda_{N+1}^{\frac{3}{4}} + C_2(E)k_3\left(\frac{1}{2}\right)\lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}} =$$

$$k_3\left(\frac{1}{2}\right)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}(ab + C_2(E)) + C_1(E)k_3\left(\frac{1}{4}\right)\lambda_{N+1}^{\frac{3}{4}} \leqslant$$

$$C_3(E)\left[\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} + \lambda_{N+1}^{-\frac{3}{4}}\right]$$

其中 $\lambda_{N+1}=\dfrac{(N+1)^4}{\tilde{D}^4}$,因此当 $N+1\geqslant\tilde{N}_0(E)$时有

$$\|\mathscr{F}_0\bar{\varphi}(p)\|_1 \leqslant b$$

设有两个微分不等式的方程组为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + ay - bz \geqslant 0 \tag{2.4.73}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - cy + dz \leqslant 0,\ t \in I \subset \mathbf{R} \tag{2.4.74}$$

考虑集合 C_γ:

$$C_\gamma = \{(y,e) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \mid e \geqslant \gamma y\},\gamma > 0 \tag{2.4.75}$$

引理2.4.14 设 $a,b,c,d,\gamma>0$且

$$d - \gamma^{-1}c > 0, d - a - \gamma b - \gamma^{-1}c > 0 \tag{2.4.76}$$

则对式(2.4.73)、(2.4.74)的轨线$(y(t),z(t))$,当$(y(t_0),z(t_0))\in C_\gamma$时有

$$\begin{gathered} z(t) \leqslant z(t_0)\exp\{-(d-\gamma^{-1}C)(t-t_0)\}, \\ \forall\ t \geqslant t_0,(y(t),z(t)) \in C_\gamma \end{gathered} \tag{2.4.77}$$

定理2.4.2 对于任何 $b,l\in(0,1]$,存在 $N_1=N_1(\gamma,\tilde{D})$使得 $N+1>N_1$时有

$$\mathscr{F}_0\mathscr{F}_{b,l}^{\frac{1}{4}} \subset \mathscr{F}_{b,l}^{\frac{1}{4}} \tag{2.4.78}$$

证明 由引理2.4.11和引理4.17只需证明

$$\|A^{\frac{1}{4}}(\mathscr{F}_0\bar{\varphi}(p_{01}) - \mathscr{F}_0\bar{\varphi}(p_{02}))\| \leqslant l\|A^{\frac{1}{4}}(p_{01} - p_{02})\|,$$

$$l > 0, \forall\ p_{01}, p_{02} \in PD(A^{\frac{1}{4}}) \tag{2.4.79}$$

现考虑具有两个不同初值 p_{01}, p_{02} 的泛函算子 $\mathscr{F}_0\bar{\varphi}$。令 $U_j = p_j + \bar{\varphi}(p_j)$，$j=1,2$，其中 $p_j = p_j(\tau; p_{0j}; \bar{\varphi})$ 为方程

$$\dot{p}_j + \gamma A p_j + \theta\left(\frac{\|U_j\|_1}{E}\right)\left(1 - \alpha A^{\frac{1}{2}} p_j\right) + P_N B(U_j, U_j) = 0 \tag{2.4.80}$$

具初值

$$p_j(0; p_{0j}; \bar{\varphi}) = p_{0j} \tag{2.4.81}$$

的解，则

$$\mathscr{F}_0\bar{\varphi}(p_{0j}) = q_j(0) \tag{2.4.82}$$

其中 $q_j(\tau)$ 为方程

$$\dot{q}_j + \gamma A Q_N q_j + \theta\left(\frac{\|U_j\|_1}{E}\right)\left(-\alpha A^{\frac{1}{2}} Q_N U_j\right) + Q_N B(U_j, U_j) = 0 \tag{2.4.83}$$

的解，令

$$\begin{cases} \delta(\tau) = p_1(\tau; p_{01}; \bar{\varphi}) - p_2(\tau; p_{02}; \bar{\varphi}) \\ \Delta(\tau) = q_1(\tau) - q_2(\tau) \end{cases} \tag{2.4.84}$$

则 $\delta(\tau)$，$\Delta(\tau)$ 满足方程

$$\dot{\delta} + \gamma A \delta + P_N D(U_1, U_2) = 0, \delta(0) = p_{01} - p_{02} \tag{2.4.85}$$

$$\dot{\Delta} + \gamma A \Delta + Q_N D(U_1, U_2) = 0 \tag{2.4.86}$$

其中

$$D(U_1, U_2) = \theta\left(\frac{\|U_1\|_1}{E}\right)\left(-\alpha A^{\frac{1}{2}} U_1\right) + B(U_1, U_1) - \theta\left(\frac{\|U_2\|_1}{E}\right)\left(-\alpha A^{\frac{1}{2}} U_2\right) - B(U_2, U_2) \tag{2.4.87}$$

$$B(U, U) = F(U)_x + \Phi(U)_{xx} + \theta\left(\frac{\|U\|_1}{E}\right)\left(-g(U) - h(x)\right) = B_1(U, U) + \Phi(U)_{xx} \tag{2.4.88}$$

为简单计，简记

$$\theta_1 = \theta\left(\frac{\|U_1\|_1}{E}\right), \theta_2 = \theta\left(\frac{\|U_2\|_1}{E}\right)$$

则 $D(U_1, U_2)$ 可写为

$$\begin{aligned}
&D(U_1, U_2) = \\
&\quad \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)\left(-\alpha A^{\frac{1}{2}}(U_1 - U_2)\right) + \\
&\quad \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\left(-\alpha A^{\frac{1}{2}}(U_1 + U_2)\right) + \\
&\quad (F'(U_1) - F'(U_2))U_{1x} + F'(U_2)(U_{1x} - U_{2x}) + \\
&\quad (\Phi(U_1) - \Phi(U_2))_{xx} - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)(g(U_1) - g(U_2)) - \\
&\quad \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)(g(U_1) + g(U_2)) = \\
&\quad D_1(U_1, U_2) + (\Phi(U_1) - \Phi(U_2))_{xx}
\end{aligned} \tag{2.4.89}$$

作方程(2.4.85)与 $A^{\frac{1}{2}}\delta$ 的内积得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^{\frac{1}{4}}\delta\|^2 + \gamma\|A^{\frac{3}{4}}\delta\|^2 + \left(P_N D(U_1, U_2), A^{\frac{1}{2}}\delta\right) = 0 \tag{2.4.90}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\left(D(U_1, U_2), A^{\frac{1}{2}}\delta\right) = \\
&\quad \left(D_1(U_1, U_2) + (\Phi(U_1) - \Phi(U_2))_{xx}, A^{\frac{1}{2}}\delta\right) = \\
&\quad \left(D_1, A^{\frac{1}{2}}\delta\right) - \left((\Phi(U_1) - \Phi(U_2))_x, \mathscr{A}^{\frac{3}{4}}\delta\right) = \\
&\quad \left(D_1, A^{\frac{1}{2}}\delta\right) - \left((\Phi'(U_1) - \Phi'(U_2))U_{1x} + \right. \\
&\quad \left.\Phi'(U_2)(U_{1x} - U_{2x}), A^{\frac{3}{4}}\delta\right)
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\left|\left(D(U_1, U_2), A^{\frac{1}{2}}\delta\right)\right| \leqslant \\
&\quad \frac{\alpha}{2}(\theta_1 + \theta_2)\|A^{\frac{3}{4}}\delta\|\|A^{\frac{1}{4}}(U_1 - U_2)\| +
\end{aligned}$$

$$\frac{\alpha}{2}|\theta_1 - \theta_2| \|A^{\frac{1}{4}}(U_1 + U_2)\| \|A^{\frac{3}{4}}\delta\| +$$

$$\|F''(U_2)\|_{L_\infty} \|U_{1x}\| \|U_1 - U_2\|_{L_\infty} \|A^{\frac{1}{2}}\delta\| +$$

$$\|F'(U_2)\|_{L_\infty} \|U_1 - U_2\|_1 \|A^{\frac{1}{2}}\delta\| +$$

$$\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \|g'(U)\|_{L_\infty} \|U_1 - U_2\| \|A^{\frac{1}{2}}\delta\| +$$

$$\frac{1}{2}|\theta_1 - \theta_2| \|g(U_1) + g(U_2)\| \|A^{\frac{1}{2}}\delta\| +$$

$$\|\Phi''(U)\|_{L_\infty} \|U_{1x}\| \|U_1 - U_2\|_{L_\infty} \|A^{\frac{3}{4}}\delta\| +$$

$$\|\Phi'(U_2)\|_{L_\infty} \|U_1 - U_2\|_1 \|A^{\frac{3}{4}}\delta\|$$

其中

$$\|U_1 - U_2\|_1 \leqslant \|p_1 - p_2\|_1 + \|\bar{\varphi}(p_1) - \bar{\varphi}(p_2)\|_1 \leqslant$$

$$(1 + l)\|A^{\frac{1}{4}}\delta\| \leqslant 2\|A^{\frac{1}{4}}\delta\|$$

$$|\theta_1 - \theta_2| = \left|\theta\left(\frac{\|U_1\|_1}{E}\right) - \theta\left(\frac{\|U_2\|_1}{E}\right)\right| \leqslant$$

$$\frac{2}{E}\|U_1 - U_2\|_1 \leqslant$$

$$\frac{4}{E}\|A^{\frac{1}{4}}\delta\|$$

于是

$$\left|\left(D(U_1, U_2), A^{\frac{1}{2}}\delta\right)\right| \leqslant$$

$$2\alpha\|A^{\frac{3}{4}}\delta\| \|A^{\frac{1}{2}}\delta\| + 2\alpha\|U_1 + U_2\|_1 \|A^{\frac{1}{4}}\delta\| \|A^{\frac{3}{4}}\delta\| +$$

$$C\|F''(U)\|_{L_\infty} \|U_{1x}\| \|A^{\frac{1}{4}}\delta\| \|A^{\frac{1}{2}}\delta\| +$$

$$2\|F'(U_2)\|_{L_\infty} \|A^{\frac{1}{4}}\delta\| \|A^{\frac{1}{2}}\delta\| +$$

$$2\|g'(U)\|_{L_\infty} \|A^{\frac{1}{4}}\delta\| \|A^{\frac{1}{2}}\delta\| +$$

$$2\|g(U_1) + g(U_2)\| \|A^{\frac{1}{4}}\delta\| \|A^{\frac{1}{2}}\delta\| +$$

$$2\|\Phi''(U)\|_{L_\infty}\|U_{1t}\|\|A^{\frac{1}{4}}\delta\|\|A^{\frac{3}{4}}\delta\|+$$

$$2\|\Phi'(U_2)\|_{L_\infty}\|A^{\frac{1}{4}}\delta\|\|A^{\frac{3}{4}}\delta\|\leqslant$$

$$\frac{\gamma}{2}\|A^{\frac{3}{4}}\delta\|^2+C_1\left(\|A^{\frac{3}{4}}\delta\|+\|A^{\frac{1}{4}}\delta\|\right)\|A^{\frac{1}{4}}\delta\|$$

因此由式(2.4.90)可得

$$\left|\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^{\frac{1}{4}}\delta\|^2+\gamma\|A^{\frac{3}{4}}\delta\|^2\right|\leqslant$$
$$C_1\left(\|A^{\frac{3}{4}}\delta\|+\|A^{\frac{1}{4}}\delta\|\right)\|A^{\frac{1}{4}}\delta\|+\frac{\gamma}{2}\|A^{\frac{3}{4}}\delta\|^2 \tag{2.4.91}$$

同理可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^{\frac{1}{4}}\Delta\|^2+\frac{\gamma}{2}\|A^{\frac{3}{4}}\Delta\|^2\leqslant$$
$$C'_1\left(\|A^{\frac{3}{4}}\Delta\|+\|A^{\frac{1}{4}}\Delta\|\right)\|U_1-U_2\|_1\leqslant \tag{2.4.92}$$
$$C_2\left(\|A^{\frac{3}{4}}\Delta\|+\|A^{\frac{1}{4}}\Delta\|\right)\|A^{\frac{1}{4}}\delta\|$$

令 $y=A^{\frac{1}{4}}\delta, z=A^{\frac{1}{4}}\Delta$，则由式(2.4.91)、(2.4.92)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|y\|^2\geqslant-\frac{2}{3\gamma}\lambda_N\|y\|^2-C_1\left(\lambda_N^{\frac{1}{2}}\|y\|+\|y\|\right)\|y\|$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|z\|^2+\gamma\|A^{\frac{3}{4}}\Delta\|^2\leqslant 2C_2\left(\|A^{\frac{3}{4}}\Delta\|+\|z\|\right)\frac{\|z\|}{\gamma_1}$$

由于

$$\gamma\|A^{\frac{3}{4}}\Delta\|^2\geqslant\gamma\lambda_{N+1}\|z\|^2$$

$$\frac{2C_2}{\gamma_1}\|A^{\frac{3}{4}}\Delta\|\|z\|\leqslant\gamma/2\|A^{\frac{3}{4}}\Delta\|^2+\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{2C_2}{\gamma_1}\right)^2\|z\|^2$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|y\|+\left(\frac{3\gamma}{4}\lambda_N+C_1\lambda_N^{\frac{1}{2}}+1\right)\|y\|\geqslant 0 \tag{2.4.93}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|z\|+\left(\frac{\gamma}{4}\lambda_{N+1}-C_3(\gamma,\gamma_1)\right)\|z\|\leqslant 0 \tag{2.4.94}$$

其中

$$C_3(\gamma,\gamma_1) = \frac{C_2}{\gamma\gamma_1^2} + \frac{2C_2}{\gamma_1}$$

由引理 2.4.14,其中

$$d = \gamma/4\lambda_{N+1} - C_3(\gamma,\gamma_1) > 0, N \geqslant N_0$$

$$C = 0, b = 0, a = 3\gamma/4\lambda_N + C_1\lambda_N^{\frac{1}{2}} + 1$$

$$d - a - \gamma_1 b - \gamma_1^{-1}C =$$

$$\frac{\gamma}{4}\lambda_{N+1} - \frac{3\gamma}{4}\lambda_N - C_1\lambda_N^{\frac{1}{2}} - 1 - C_3 > 0, N \geqslant N_0$$

可得

$$\|z(t)\| \leqslant \|z(t_0)\|\exp\left\{-\left(\frac{\gamma}{4}\lambda_{N+1} - C_3\right)(t - t_0)\right\} \tag{2.4.95}$$

$$\|z(0)\| \leqslant \|z(t_0)\|\exp\left\{\left(\frac{\gamma}{4}\lambda_{N+1} - C_3\right)t_0\right\}$$

上式令 $t_0 \to -\infty$,由引理2.4.10,由于

$$\sup\left\{\|A^{\frac{1}{4}}\Delta(t)\| = \|z(t)\|: -\infty < t \leqslant 0\right\} < \infty$$

因此有

$$\|z(0)\| = 0$$

$\|z(0)\| > l\|y(0)\|(\neq 0)$ 不可能,我们有

$$\|z(0)\| \leqslant l\|y(0)\|$$

即有

$$\|A^{\frac{1}{4}}(\mathscr{F}_0\bar{\varphi}(p_{01}) - \mathscr{F}_0\bar{\varphi}(p_{02}))\| \leqslant l\|A^{\frac{1}{4}}(p_{01} - p_{02})\| \tag{2.4.96}$$

只要 N 充分大,$N \geqslant \max(N_0, N'_2) = N_1(\gamma,\gamma_1,\tilde{D})$,定理2.4.2证毕。

现证明泛函算子 $\mathscr{F}_0$的压缩性。

定理2.4.3 对任何 $b, l \in (0,1]$,存在 $N_2 = N_2(\gamma,\gamma_1,b,l,\tilde{D})$ 使得当 $N+1 \geqslant N_2$时,则有

$$d(\mathscr{F}_0\bar{\varphi}_1,\mathscr{F}_0\bar{\varphi}_2)\leqslant\frac{1}{2}d(\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2),\forall\ \bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2\in\mathscr{F}^{\frac{1}{4}}_{b,l}$$
(2.4.97)

证明 设$\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2\in\mathscr{F}^{\frac{1}{4}}_{b,l}$

$$d_0=d(\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2)=\max\{\|\bar{\varphi}_1(p)-\bar{\varphi}_2(p)\|_1,p\in PD(A^{\frac{1}{4}})\}$$
(2.4.98)

在定理 2.4.2 的证明中,置

$$U_j=p_j+\bar{\varphi}_j(p_j),j=1,2\qquad(2.4.99)$$

其中 $p_j=p_j(\tau;p_0;\bar{\varphi}_j)$ 为方程(2.4.80)

$$p'_j-\gamma Ap_j+\theta\left(\frac{\|U_j\|_1}{E}\right)(-\alpha A^{\frac{1}{2}}p_j)+P_NB(U_j,U_j)=0$$
(2.4.100)

满足相同初值条件

$$p_j(0;p_0;\bar{\varphi}_j)=p_0\qquad(2.4.101)$$

的解,设 $q_j(\tau)$ 为式(2.4.83)

$$q'_j+\gamma AQ_Nq_j-\theta\left(\frac{\|U_j\|_1}{E}\right)(-\alpha A^{\frac{1}{2}}Q_NU_j)+Q_NB(U_j,U_j)=0$$
(2.4.102)

在$(-\infty,0]$上的有界解,令

$$\delta(\tau)=p_1(\tau;p_0,\bar{\varphi}_1)-p_2(\tau;p_0;\bar{\varphi}_2)\qquad(2.4.103)$$
$$\Delta(\tau)=q_1(\tau)-q_2(\tau)$$

则由式(2.4.100)、式(2.4.101)有

$$\dot{\delta}+\gamma A\delta+P_ND(U_1,U_2)=0,\delta(0)=0\qquad(2.4.104)$$
$$\dot{\Delta}+\gamma A\Delta+Q_ND(U_1,U_2)=0\qquad(2.4.105)$$

类似于不等式(2.4.91)和式(2.4.92)有

$$\left|\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^{\frac{1}{4}}\delta\|^2+\frac{\gamma}{2}\|A^{\frac{3}{4}}\delta\|^2\right|\leqslant C_1(\|A^{\frac{3}{4}}\delta\|+\|A^{\frac{1}{4}}\delta\|)\|U_1-U_2\|_1\qquad(2.4.106)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^{\frac{1}{4}}\delta\|^2+\frac{\gamma}{2}\|A^{\frac{3}{4}}\delta\|^2\leqslant C_2(\|A^{\frac{3}{4}}\Delta\|+\|A^{\frac{1}{4}}\Delta\|)\|U_1-U_2\|_1\qquad(2.4.107)$$

由于

$$\|U_1 - U_2\|_1 \leqslant \|p_1 - p_2\|_1 + \|\bar{\varphi}_1(p_1) - \bar{\varphi}_2(p_2)\|_1 \leqslant$$
$$\|p_1 - p_2\|_1 + \|\bar{\varphi}_1(p_1) - \bar{\varphi}_1(p_2)|_1 +$$
$$\|\bar{\varphi}_1(p_2) - \bar{\varphi}_2(p_2)\|_1 \leqslant$$
$$2\|A^{\frac{1}{4}}\delta\| + d_0$$

令 $y = A^{\frac{1}{4}}\delta, z = A^{\frac{1}{4}}\Delta$ 则有

$$\left|\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|y\|^2 + \frac{\gamma}{2}\|A^{\frac{1}{2}}y\|^2\right| \leqslant C_1(\|A^{\frac{1}{2}}y\| + \|y\|)(2\|y\| + d_0) \tag{2.4.108}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|z\|^2 + \frac{\gamma}{2}\|A^{\frac{1}{2}}z\|^2 \leqslant C_2(\|A^{\frac{1}{2}}z\| + \|z\|)(2\|y\| + d_0) \leqslant$$
$$\frac{C_2}{\gamma_1}(\|A^{\frac{1}{2}}z\| + \|z\|)(2\|z\| + \gamma_1 d_0) \tag{2.4.109}$$
$$(\|z\| > \gamma_1\|y\|)$$

其中

$$\|y(0)\| = 0, \sup\{\|A^{\frac{1}{4}}\Delta(t)\| = \|z(t)\| : -\infty < t \leqslant 0\} < \infty \tag{2.4.110}$$

考虑$(-\infty,0]$上的开子集 $J=\{t\in(-\infty,0]:\|z\|>\frac{1}{2}d_0\}$。如$0\in J$，令 $J_0=(-T,0]$为含有0的 J 的部分。在 J_0上，由不等式(2.4.109)、(2.4.110)可得

$$\left|\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|y\|^2 + \frac{\gamma}{2}\|A^{\frac{1}{2}}y\|^2\right| \leqslant 2C_1(\|A^{\frac{1}{2}}y\| + \|y\|)^2(\|y\| + \|z\|)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|z\|^2 + \frac{\gamma}{2}\|A^{\frac{1}{2}}z\|^2 \leqslant$$
$$\frac{2C_2}{\gamma_1}(\|A^{\frac{1}{2}}z\| + \|z\|)(\|z\| + \gamma_1\|z\|) =$$
$$\frac{2C_2}{\gamma_1}(\gamma_1 + 1)\left[\|A^{\frac{1}{2}}z\|\|z\| + \|z\|^2\right] \leqslant$$
$$\frac{\gamma}{4}\|A^{\frac{1}{2}}z\|^2 + \frac{2C_1(\gamma_1 + 1)}{\gamma_1}\left(\frac{2C_1(\gamma + 1)}{\gamma\gamma_1} + 1\right)\|z\|^2$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|y\| + \frac{\gamma}{2}\lambda_N\|y\| + 2C_1\left(\lambda_N^{\frac{1}{2}} + 1\right)(\|y\| + \|z\|) \geqslant 0 \tag{2.4.111}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|z\| + \frac{\gamma}{4}\lambda_{N+1}\|z\| - \frac{2C_1(\gamma_1 + 1)}{\gamma_1}\left(\frac{2C_1(\gamma + 1)}{\gamma\gamma_1} + 1\right)\|z\| \leqslant 0 \tag{2.4.112}$$

因 $\|z(0)\| \geqslant \frac{1}{2}d_0, \|y(0)\| = 0$，且

$$d = \frac{\gamma}{4}\lambda_{N+1} - \frac{2C_1(\gamma_1 + 1)}{\gamma_1}\left(\frac{2C_1(\gamma + 1)}{\gamma\gamma_1} + 1\right) > 0,$$

$$N + 1 \geqslant N_2^0$$

$$c = 0, a = \frac{\gamma}{2}\lambda_N + 2C_1\left(\lambda_N^{\frac{1}{2}} + 1\right) > 0,$$

$$b = 2C_1\left(\lambda_N^{\frac{1}{2}} + 1\right) > 0$$

$$\begin{aligned}
& d - a - \gamma_1 b - \gamma_1^{-1}c = \\
& \frac{\gamma}{4}\lambda_{N+1} - \frac{\gamma}{2}\lambda_N - 2C_1\left(\lambda_N^{\frac{1}{2}} + 1\right) - \\
& 2C_1\gamma_1\left(\lambda_N^{\frac{1}{2}} + 1\right) - \frac{2C_1(\gamma_1 + 1)}{\gamma_1}\left(\frac{2C_1(\gamma_1 + 1)}{\gamma\gamma_1} + 1\right) = \\
& \frac{\gamma}{4}\lambda_{N+1} - \frac{\gamma}{2}\lambda_N - 2C_1(\gamma_1 + 1)\lambda_N^{\frac{1}{2}} - 2C_1(\gamma_1 + 1) - \\
& \frac{2C_1(\gamma_1 + 1)}{\gamma_1}\left(\frac{2C_1(\gamma_1 + 1)}{\gamma\gamma_1} + 1\right) > 0, N \geqslant N_2^1
\end{aligned}$$

由引理 2.4.14，当 $N + 1 \geqslant \max(N_2^0, N_2^1) = N_2$ 有

$$\|z(0)\| \leqslant \|z(t)\|\exp(dt), t \in J_0 \tag{2.4.113}$$

由于 $\sup\{\|z(t)\|: -\infty \leqslant t \leqslant 0\} < \infty$ 如 $T = \infty$ 则有

$$\|z(0)\| = 0 \leqslant \frac{1}{2}d_0$$

否则由式(2.4.113)及 $-T \notin J$，有

$$\|z(0)\| \leqslant \|z(-T)\| \leqslant \frac{1}{2}d_0$$

因此我们证明了

$$\|\mathscr{F}_0\bar{\varphi}_1(p_0)-\mathscr{F}_0\bar{\varphi}_2(p_0)\|=\|z(0)\|\leqslant\frac{1}{2}d_0=\frac{1}{2}d(\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2)$$

因 $p_0\in PD(A^{\frac{1}{4}})$ 是任意的，因此有

$$d(\mathscr{F}_0\bar{\varphi}_1,\mathscr{F}_0\bar{\varphi}_2)\leqslant\frac{1}{2}d(\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2),N+1\geqslant N_2$$

现在来完成 PGKS 方程惯性流形 M 的构造，即要求：

(1) $M=\text{graph}(\Phi)$，其中 Φ 为从 $PD(A^{\frac{1}{4}})$ 到 $QD(A^{\frac{1}{4}})$ 上的 Lip 连续映照；

(2) Φ 具有紧支集，$\text{Supp}\,\Phi\in\{p\in PD(A^{\frac{1}{4}}):\|A^{\frac{1}{4}}p\|<2E\}$；

(3) $S_p(t)M\subset M,t\geqslant0$；

(4) 存在常数 $\lambda>0$，使得对任何 $u_0\in D(A^{\frac{1}{4}})$，存在 $\mu_0>0$（对有界集上的 u_0 一致成立）使得

$$\text{dist}(S_p(t)u_0,M)\leqslant\mu_0\exp(-\lambda t),\forall\ t\geqslant0$$

(5) PGKS 方程的吸引子 $\mathscr{A}_p$ 在 M 上。

(1)、(2)由于 $\Phi\in\mathscr{F}^{\frac{1}{4}}_{b,l}$ 为已知，现依次证明(3)、(4)、(5)。

定理2.4.4 设 $b,l\in(0,1]$ 且

$$N+1>N_2(\gamma,\gamma_1,b,l,\tilde{D})$$

则 $\mathscr{F}_0$ 具有唯一的不动点 $\Phi\in\mathscr{F}^{\frac{1}{4}}_{b,l}$ 使得

$$d(\Phi,\mathscr{F}_0\bar{\varphi})\leqslant\frac{1}{2}d(\Phi,\bar{\varphi}),\ \forall\ \bar{\varphi}\in\mathscr{F}^{\frac{1}{4}}_{b,l}\tag{2.4.114}$$

且 Lip 流形

$$M=\text{graph}(\Phi)=\{(p+\bar{\varphi}(p):p\in PD(A^{\frac{1}{4}})\}\tag{2.4.115}$$

对于 $\{S_p(t)\}_{t\geqslant0}$ 是不变的

证明 定理的第一部分来自定理2.4.2和由于 Φ 为 $\mathscr{F}_0$ 的不动点，即 $\mathscr{F}_0\Phi=\Phi$，由定理2.4.3有

$$d(\Phi,\mathscr{F}_0\bar{\Phi})=d(\mathscr{F}_0\phi,\mathscr{F}_0\bar{\varphi})\leqslant\frac{1}{2}d(\phi,\bar{\varphi})$$

由 $\mathscr{F}_0$ 的定义以及 $\mathscr{F}_0\Phi=\Phi,\Phi\in\mathscr{F}^{\frac{1}{4}}_{b,l}$，因此有

$$S_p(t)M \subset M$$

定理2.4.5 对于一切 $u \in B_{2E}$ 和 $\tau \geqslant 0$ 有

$$\operatorname{dist}(S_p(\tau)u, M) = \inf\{\|A^{\frac{1}{4}}(S_p(\tau)u - v)\|, v \in M\} \leqslant 4E\exp\{-d\tau\} \tag{2.4.116}$$

其中 M 为(2.4.115)所定义，

$$d = \frac{\gamma}{4}\frac{(N+1)^4}{\tilde{D}^4} - \frac{2C_1(\gamma_1+1)}{\gamma_1}\left(\frac{2C_1(\gamma_1+1)}{\gamma\gamma_1}+1\right) > 0$$

证明 对于 $u \in B_{2E}$ 和 $\tau > 0$ 设

$$p(t) = p(t; p_N S_p(t)u; \Phi)$$

为方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \gamma A p + \theta\left(\frac{\|U\|_1}{E}\right)(-\alpha A^{\frac{1}{2}} p) + P_N B(U, U) = 0 \tag{2.4.117}$$

的解，其中 $U = p + \Phi(p)$。定义 $v = p(-\tau) + \Phi(p(-\tau))$，且令

$$\tilde{\delta}(t) = A^{\frac{1}{4}} P_N[S_p(t)u - S_p(t)v]$$

$$\tilde{\Delta}(t) = A^{\frac{1}{4}} Q_N[S_p(t)u - S_p(t)v], t \in [0, \tau]$$

则如定理2.4.2所证，有

$$\left|\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\tilde{\delta}\|^2 + \frac{\gamma}{2}\|A^{\frac{1}{2}}\tilde{\delta}\|^2\right| \leqslant C_1(\|A^{\frac{1}{2}}\tilde{\delta}\| + \|\tilde{\delta}\|)\|\tilde{\delta}\|$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\tilde{\Delta}\|^2 + \frac{\gamma}{2}\|A^{\frac{1}{2}}\tilde{\Delta}\|^2 \leqslant C_2(\|A^{\frac{1}{2}}\tilde{\Delta}\| + \tilde{\Delta}\|)\|\tilde{\delta}\|$$

因 $|\tilde{\Delta}(0)| \geqslant |\tilde{\delta}(0)| = 0$，则由引理2.4.14有

$$\|S_p(\tau)u - \{P_N S_p(\tau)u + \Phi[P_N S_p(t)u]\}\|_1 = \|\tilde{\Delta}(\tau)\| \leqslant \|\tilde{\Delta}(0)\| e^{-d\tau} \tag{2.4.118}$$

如 $\|p(-\tau)\|_1 \geqslant 2E$，则 $Q_N v = 0$

$$\|\tilde{\Delta}(0)\| = \|A^{\frac{1}{4}} Q_N[S_p(t)u - S_p(0)v]| =$$

$$\|A^{\frac{1}{4}}Q_N u\|_1 = \|Q_N u\|_1 \leqslant 2E$$

如 $\|p(-\tau)\|_1 < 2E$，则

$$\|Q_N v\|_1 = \|\Phi[p(-\tau)]\|_1 = \|\Phi[p(-\tau)] - \Phi(2E)\|_1 \leqslant$$
$$l(2E - \|p(-\tau)\|_1) \leqslant 2E$$

因此 $\|\tilde{\Delta}(0)\| \leqslant \|Q_N(u-v)\|_1 \leqslant 4E$ 由此

$$\|\tilde{\Delta}(0)\| \leqslant \max(2E, 4E) = 4E$$

定理得证。

推论2.4.1 PGKS 方程的吸引子 $\mathscr{A}_p$ 在 M 上。

证明 因 $\mathscr{A}_p = S_p(t)\mathscr{A}_p \subset S_p(t)B_{2E}, \forall\, t \geqslant 0$，其中 B_{2E} 为吸收集，对于 $u \in \mathscr{A}_p$，由不等式(2.4.118)有

$$\mathrm{dist}(u, M) \leqslant 4E\mathrm{e}^{-dt}, d > 0$$

当 $t \to \infty$ 时，即得 $\mathscr{A}_p$ 包含于 M 中。

由以上结果综合可得

定理2.4.6 对于一切 $N \geqslant \tilde{N}(\gamma, \gamma_1, b, l, \tilde{D})$ 存在 PGKS 方程的惯性流形 M，它是在 $\mathscr{F}^{\frac{1}{4}}_{l,t}$ 上定义的算子 $\mathscr{F}_0$ 式(2.4.63)的不动点的图。

现考虑 PGKS 方程的惯性流形和 GKS 方程(2.4.1)惯性流形的关系，进一步我们再考虑 PGKS 方程惯性流形 M 的 Galerkin 逼近。

引理2.4.15 GKS 方程(2.4.1)的吸引子 $\mathscr{A}$ 和吸收集

$$B_{\frac{3}{2}E} = \left\{u \in H^1, \|u\|_1 \leqslant \frac{3}{2}(E_0 + E_1)\right\}$$

有如下关系

$$\mathscr{A} = \bigcap_{t \geqslant 0} S(t) B_{\frac{3}{2}E} \tag{2.4.119}$$

证明 由整体吸引子 $\mathscr{A}$ 的定义可知

$$\mathscr{A} = \bigcap_{\tau \geqslant 0} \bigcup_{t \geqslant \tau} \overline{S(t) B_{\frac{3}{2}E}} \tag{2.4.120}$$

其中“—”表示在 L_2 上取闭包，令 $\mathscr{A}' = \bigcap_{t \geqslant 0} S(t) B_{\frac{3}{2}E}$，由式(2.4.120)可知 $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$，另方面，因 $B_{\frac{3}{2}E}$ 是吸收的，因此存在 $t_1 >$

0,使得

$$S(t)B_{\frac{3}{2}E} \subset B_{\frac{3}{2}E}, t \geqslant t_1$$

因此

$$\mathscr{A} \subset \bigcup_{t \geqslant \tau} S(t)B_{\frac{3}{2}E} \subset S(\tau - t_1)B_{\frac{3}{2}E}, \tau \geqslant t_1$$

因此 $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}'$,于是有

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}'$$

定理2.4.7 设 M 为 PGKS 方程的惯性流形,满足

(1) $M=\text{graph}(\Phi)$,其中 Φ 为 $P_N D(\mathscr{A}^{\frac{1}{4}}) \to Q_N D(\mathscr{A}^{\frac{1}{4}})$ 的一个 Lip 连续映照。

(2) Φ 具有紧支集,当 Φ 在 B_{2E}外时,$\Phi \geqslant 0$。则在 M 的某个开邻域 M_2是 GKS 方程(2.4.1)的一个惯性流形。

证明 令 $B_{\frac{1}{2}E} = \left\{u \in H^1 : \|u\|_1 \leqslant \frac{1}{2}E\right\}$,则存在 $t_0 \geqslant 0$,使得

$$B_1 = \bigcup_{t \geqslant t_0} S(t)B_{\frac{1}{2}E} \subset B_E\{u \in H^1 : |u\|_1 \leqslant E\}$$

注意到 $S(t)B_1 \subset B_1, S_p(t)B_1 = S(t)B, \forall\ t \geqslant 0$。令

$$M_1 = M \cap B_1$$

则

$$\begin{aligned} S(t)M_1 = S_p(t)M_1 \subset S_p(t)M \cap S_p(t)B_1 = \\ S_p(t)M \cap S(t)B_1 \subset M \cap B_1 = \\ M_1, \forall\ t \geqslant 0 \end{aligned}$$

令

$$M_1 = \partial M + M_2$$

即 M_2为 M_1在 M 中的内点,由于 $S_p(t)M$ 和 M 同胚,因此 $S(t)M_2$ 也是 $S_p(t)M_1 = S(t)M_1 \subset M_1$的内点,因此 M_2具有性质(1)、(2),即:

(1) $M_2 = \text{graph}\ \Phi$,其中 Φ 为 $P_N D(A^{\frac{1}{4}}) \to Q_N D(A^{\frac{1}{4}})$ 的 Lip 连续映照。

(2) $S(t)M_2 \subset M_2, t \geqslant 0$。

如同文献[199]所证，可证GKS方程的吸引子$\mathscr{A}\subset M_2$，且有

$$\operatorname{dist}(S(t)u,M_2)\leqslant \mu_1 e^{-\delta t},\mu_1>0,\delta>0,t\geqslant 0,u\in B$$

其中B为B_1中的任一有界集，于是M_2为GKS方程的一个惯性流形。

现考虑PGKS方程的m阶Galerkin近似：用P_m作用于PGKS方程得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u^{(m)}+\gamma A u^{(m)}+\theta\left(\frac{\|u^{(m)}\|_1}{E}\right)\left(-\alpha A^{\frac{1}{2}}u^{(m)}\right)+$$

$$P_m B(u^{(m)},u^{(m)})=0,u^{(m)}\in P_m D(A^{\frac{1}{4}})$$

$$(2.4.121)$$

当$m\geqslant N\geqslant\tilde{N}$时，Galerkin近似式(2.4.121)具有自己的m维惯性流形$M^{(m)}$，有如下定理：

定理2.4.8 设$m\geqslant N\geqslant\tilde{N}$则Galerkin近似式(2.4.121)具有惯性流形$M^{(m)}=\{p+\Phi_m(p),p\in P_N D(A^{\frac{1}{4}})\}$，其中$\Phi_m$为算子$P_m\mathscr{F}$的一个不动点，$P_m\mathscr{F}_0$：

$$P_m\mathscr{F}_{b,l}^{\frac{1}{4}}\rightarrow P_m\mathscr{F}_{b,l}^{\frac{1}{4}},P_m\mathscr{F}_{b,l}^{\frac{1}{4}}=\{P_m\varphi;\varphi\in\mathscr{F}_{b,l}^{\frac{1}{4}}\}$$

设m充分大，我们可建立Φ_m逼近于Φ的估计。

定理2.4.9 设$m\geqslant\tilde{N}$为固定的，我们有

$$d(\Phi,\Phi_m)\leqslant\frac{C(\tilde{D})}{(m+1)^3}\qquad(2.4.122)$$

其中

$$d(\varphi_1,\varphi_2)=\max\{\|\varphi_1(p)-\varphi_2(p)\|_1,p\in P_N D(A^{\frac{1}{4}})\}$$

N是惯性流形graph Φ和graph Φ_m的维数。

证明 设$m>N\geqslant\tilde{N}$令

$$U^{(m)}=p^{(m)}+\Phi_m(p^{(m)}),P_m U^{(m)}=U^{(m)}\qquad(2.4.123)$$

其中$p^{(m)}(\tau,p_0;\Phi_m)$为满足方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u^{(m)}+\gamma A u^{(m)}+\theta\left(\frac{\|U^{(m)}\|_1}{E}\right)\left(-\alpha A^{\frac{1}{2}}p^{(m)}\right)+$$

$$P_N B(U^{(m)}, U^{(m)}) = 0 \tag{2.4.124}$$

$$p^{(m)}(0; p_0; \Phi_m) = p_0 \tag{2.4.125}$$

的解,由此可得

$$\Phi_m(p_0) = P_m \mathscr{F}_0 \Phi_m(p_0) = \\ -\int_{\infty}^{0} e^{\tau\gamma A Q_N} \cdot \theta\left(\frac{\|U^{(m)}\|_1}{E}\right) \times \\ Q_N\left[-\alpha A^{\frac{1}{2}} U^{(m)} + P_m B(U^{(m)}, U^{(m)})\right] d\tau \tag{2.4.126}$$

现考虑 $\mathscr{F}_0 \Phi_m$ 的定义,方程(2.4.57)、(2.4.58)是和式(2.4.123)、(2.4.124)一致的。因 $P_N D\left(A^{\frac{1}{4}}\right) \subset P_m D\left(A^{\frac{1}{4}}\right)$, $P_m U^{(m)} = U^{(m)}$,因此

$$\mathscr{F}_0 \Phi_m(p_0) = -\int_{\infty}^{0} e^{\tau\gamma A Q_N} \cdot \theta\left(\frac{\|U^{(m)}\|_1}{E}\right) \times \\ Q_N\left[-\alpha A^{\frac{1}{2}} U^{(m)} + P_m B(U^{(m)}, U^{(m)})\right] d\tau \tag{2.4.127}$$

从式(2.4.126)、(2.4.127)可得

$$\|\Phi_m(p_0) - \mathscr{F}_0 \Phi_m(p_0)\|_1 = \\ \|P_m \mathscr{F}_0 \Phi_m(p_0) - \mathscr{F}_0 \Phi_m(p_0)\|_1 = \\ \left|\int_{-\infty}^{0} (AQ_N)^{\frac{1}{4}} e^{\gamma\tau A Q_N} \cdot Q_N(1 - P_m) B(U^{(m)}, U^{(m)}) d\tau\right| \leqslant \\ \int_{-\infty}^{0} (AQ_m)^{\frac{1}{4}} e^{\gamma\tau A Q_m} \cdot Q_m B(U^{(m)}, U^{(m)}) d\tau \leqslant \\ \frac{Ce^{-\frac{\gamma}{4}}}{(\lambda_{m+1})^{\frac{3}{4}}}$$

第三章　近似惯性流形

在前面有关整体吸引子和惯性流形的讨论中，我们看到，整体吸引子可能是不光滑的，惯性流形虽然光滑，但为了寻求它必须求无穷区间上的积分方程，这给实际计算带来不少麻烦。因此很自然地想到用一种近似的、比较光滑的、比较容易求的流形，去逼近整体吸引子和惯性流形。这就是近期发展起来的近似惯性流形。下面以二维 Navier-Stokes 方程为例，来说明多种近似惯性流形及其误差估计。

3.1　二维 Navier-Stokes 方程

设 Navier-Stockes 方程具有以下形式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \nu Au + B(u,u) = f \tag{3.1.1}$$

$$u(0) = u_0 \tag{3.1.2}$$

其中 $Au = -P\Delta u, \forall u \in D(A), B(u,w) = P[(u \cdot \nabla)w], \forall u, w \in D(A)$，这里 P 表示 $(L^2(\Omega))^2$ 到 H 的正交投影，H 表示 V 依 $(L^2(\Omega))^2$ 的闭包。当 $u|_{\partial\Omega}=0$ 时，$V=\{v\in \{C_0^\infty(\Omega)\}^2, \mathrm{div}\, v=0\}$，这里 A 是线性无界自共轭算子，A^{-1} 是紧的，$D(A)$ 在 H 中稠。因此 H 具有由算子 A 的特征向量所组成的正交基 $\{w_j\}_{j=1}^\infty$，$Aw_j = \lambda_j w_j, j=1,2,\cdots$，且

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$$

λ_m 满足

$$C_0\lambda_1 m \leqslant \lambda_m \leqslant C_1\lambda_1 m, m = 1,2,\cdots \tag{3.1.3}$$

其中 C_0, C_1 为某确定常数。以下用 $C_0, C_1, \cdots$ 表示正绝对常数。

容易验证 $B(u,v)$ 满足

$$|(B(u,v),w)| \leqslant C_2 |u|^{\frac{1}{2}} \| u \|^{\frac{1}{2}} \| v \|^{\frac{1}{2}} |w|^{\frac{1}{2}} \| w \|^{\frac{1}{2}},$$

$$\forall u,v,w \in V \qquad (3.1.4)$$

$$|(B(u,v),w)| \leqslant C_3 \| u \|_{L^\infty(\Omega)} \| v \| |w|,$$

$$\forall u \in D(A), \forall v \in V, \forall w \in H \qquad (3.1.5)$$

其中 $u \in H$, $|u|^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 \mathrm{d}x$; $u \in V$, $\| u \|^2 = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x$。由 Brezis-Gallouet 不等式，有

$$\| u \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_4 \| u \| \left\{1 - \lg\left(\frac{|Au|}{\lambda_1^{\frac{1}{2}} \| u \|}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in D(A)$$

$$(3.1.6)$$

从式(3.1.5)、(3.1.6)，有

$$|(B(u,v),w)| \leqslant C_5 \| v \| |w| \| u \| \left\{1 + 2\lg\left(\frac{|Au|}{\lambda_1^{\frac{1}{2}} \| u \|}\right)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\forall u \in D(A), \forall v \in V, \forall w \in H \qquad (3.1.7)$$

$$|(B(u,v),w)| \leqslant C_6 \| v \| |u| \| w \| \left\{1 + 2\lg\left(\frac{|Aw|}{\lambda_1^{\frac{1}{2}} \| w \|}\right)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\forall u \in H, \forall v \in V, \forall w \in D(A) \qquad (3.1.8)$$

另外，$B(u,v)$ 还满足如下基本等式(*)

$$(B(u,v),w) = -(B(u,w),v)。\forall u \in H, \forall v,w \in D(A)$$

对于问题(3.1.1)、(3.1.2)的解 $u(t)$，已经证明，存在 t_0，它依赖于 $u_0, \nu, |f|$ 和 λ_1，使

$$|u(t)| \leqslant M_0, \| u(t) \| \leqslant M_1, \quad \forall t \geqslant t_0 \qquad (3.1.9)$$

其中常数 M_0 与 M_1 仅依赖于 $\nu, |f|$ 和 λ_1。

现考虑问题(3.1.1)、(3.1.2)的近似惯性流形。

设 P_m 为 H 在 $H_m = \mathrm{span}\{w_1, \cdots, w_m\}$ 上的正交投影。$Q_m = I - P_m$。令 $p = P_m u, q = Q_m u$，则式(3.1.1)等价于

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \nu Ap + P_m B(p+q, p+q) = P_m f \quad (3.1.10)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \nu Aq + Q_m B(p+q, p+q) = Q_m f \quad (3.1.11)$$

方程(3.1.1)的惯性流形是子集 $M \subset H$,具有如下性质:

(i) M 是有限维 Lip 流形。 (3.1.12)

(ii) M 对流是正不变集。即如 $u_0 \in M$,则式(3.1.1)、(3.1.2)的解 $u(t) \in M, \forall t > 0$。 (3.1.13)

(iii) M 指数吸引一切轨线。即对问题(3.1.1)、(3.1.2)的任意解 $u(t)$,有 dist $(u(t), M) \to 0$, $t \to \infty$指数逼近。由此推出整体吸引子 $\mathscr{A} \subset M$。 (3.1.14)

如要求 M 是 Lip 函数 $\Phi: H_m \to Q_m H$ 的图,则不变条件(3.1.13)等价于对于问题(3.1.10)、(3.1.11)的任何解 $p(t), q(t)$ 具有 $q(0) = \Phi(p(0))$,则 $q(t) = \Phi(p(t)), \forall t \geq 0$ 成立。因此,如果这样的函数 Φ 存在,则方程(3.1.10)、(3.1.11)在惯性流形 M 上等价于如下常微分方程组(称之为惯性形式):

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \nu Ap + P_m B(p + \Phi(p), p + \Phi(p)) = P_m f, p \in H_m \quad (3.1.15)$$

为了用光滑流形逼近整体吸引子,我们引进近似惯性流形。

显然,在式(3.1.15)中,如 $\Phi \overset{\text{def}}{=\!=} 0$,则得到通常的 Galerkin 近似:

$$\frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t} + \nu Au_m + P_m B(u_m, u_m) = P_m f, u_m \in H_m \quad (3.1.16)$$

现考虑引入有限维解析流形。$\mu_0 = \text{graph}\ (\Phi_0)$,

$$\Phi_0(p) = (\nu A)^{-1}[Q_m f - Q_m B(p, p)], p \in H_m \quad (3.1.17)$$

作为整体吸引子的更好的逼近流形。

定理 3.1.1 设 m 充分大,使得

$$\lambda_{m+1} \geq \left(\frac{2C_2 M}{\nu}\right)^2 \quad (3.1.18)$$

则对式(3.1.10)、(3.1.11)的每个解 $u(t)=p(t)+q(t)$，满足

$$|q(t)| \leqslant K_0 \lambda_{m+1}^{-1} L^{\frac{1}{2}} \tag{3.1.19}$$

$$\| q(t) \| \leqslant K_1 \lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \tag{3.1.20}$$

$$|Aq(t)| \leqslant K_2 L^{\frac{1}{2}} \tag{3.1.21}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right| \leqslant K'_0 \lambda_{m+1}^{-1} L^{\frac{1}{2}} \tag{3.1.22}$$

$$\| q(t) - \Phi_m(p(t)) \| \leqslant K_1 \lambda_{m+1}^{-1} L, \forall t \geqslant T_* \tag{3.1.23}$$

其中 $T_*>0$ 依赖于 $\nu,\lambda_1,|f|$ 和 R_0，$|u(0)|\leqslant R_0$，

$$L = (\lg \frac{\lambda_m}{\lambda_1}) + 1$$

K_0, K'_0, K_1, K_2 是依赖于 $\nu,\lambda_1,|f|$ 的正常数。

令 $\mathscr{B}=\{p\in H_m \mid \| p \| \leqslant 2M_1\}$，$\mathscr{B}^{\perp}=\{q\in Q_mV \mid \| q \| \leqslant 2M_1\}$，其中 M_1 满足式(3.1.13)。当 m 充分大时，存在映射 $\Phi^s:\mathscr{B}\to Q_mV$ 满足

$$\Phi^s(p) = (\nu A)^{-1}[Q_m f - Q_m B(p+\Phi^s(p), p+\Phi^s(p))],$$
$$\forall p \in \mathscr{B} \tag{3.1.24}$$

令 $M^s=\text{graph } \Phi^s$，它是 C 解析流形，且含有式(3.1.1)的一切定常解。现证明 Φ^s 的存在性。并给出它的上界。

定理 3.1.2 设 m 充分大，使

$$\lambda_{m+1} \geqslant \max\{4r_2^2, \frac{r_2^2}{4M_1^2}\} \tag{3.1.25}$$

则存在唯一映射 $\Phi^s:\mathscr{B}\to Q_mV$，满足式(3.1.24)，且

$$\| \Phi^s(p) \| \leqslant \lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} r_1 \tag{3.1.26}$$

其中
$$r_1 = \nu^{-1}C_5 8M_1^2 L^{\frac{1}{2}} + \nu^{-1}C_2 8M_1^2 + \nu^{-1}\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}|f|,$$

$$r_2 = [\nu^{-1}C_5 2M_1 L^{\frac{1}{2}} + \nu^{-1}C_2 6M_1],$$

$$L = 1 + \lg \frac{\lambda_m}{\lambda_1}$$

证明 设 $p\in\mathscr{B}$ 为固定，定义 $T_p:\mathscr{B}\to Q_mV$，使

$$T_p(q)=(\nu A)^{-1}[Q_mf-Q_mB(p+q,p+q)]$$

要证明 T_p 具有唯一不动点，首先证明 $T_p:\mathscr{B}^\perp\to\mathscr{B}^\perp$。令 $q\in\mathscr{B}^\perp$，$w\in H$，$|w|=1$，则

$$|(A^{\frac{1}{2}}T_p(q),w)|\leqslant\nu^{-1}[|B(p+q,p+q),A^{-\frac{1}{2}}Q_mw)|+$$
$$|A^{-1}Q_mf\|w|]\leqslant\nu^{-1}[|(B(p,p+q),A^{-\frac{1}{2}}Q_mw)|+$$
$$|(B(q,p+q),A^{-\frac{1}{2}}Q_mw)|]+\nu^{-1}\lambda_{m+1}^{-1}|f|$$

由式(3.1.7)和式(3.1.4)，可得

$$|(A^{\frac{1}{2}}T_p(q),w)|\leqslant$$
$$\nu^{-1}C_5\|p+q\|\,|A^{-\frac{1}{2}}Q_mw|\,\|p\|\left(1+\lg\frac{|Ap|}{\|p\|\lambda_1^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$\nu^{-1}C_2|q|^{\frac{1}{2}}\|q\|^{\frac{1}{2}}\|p+q\|\,|A^{-\frac{1}{2}}Q_mw|^{\frac{1}{2}}|w|^{\frac{1}{2}}+$$
$$(\nu\lambda_{m+1})^{-1}|f|\leqslant\nu^{-1}C_58M_1^2\lambda_{m-1}^{-\frac{1}{2}}(1+\lg\lambda_m/\lambda_1)^{\frac{1}{2}}+$$
$$\nu^{-1}C_2\lambda_{m-1}^{-\frac{1}{2}}8M_1^2+(\nu\lambda_{m-1})^{-1}|f|$$

因此

$$\|T_p(q)\|\leqslant\lambda_{m-1}^{-\frac{1}{2}}r \tag{3.1.27}$$

由式(3.1.25)，$\|T_p(q)\|\leqslant 2M_1$。

下面证明 T_p 是压缩的。考察

$$\frac{\partial}{\partial q}T_p(q)\eta=(\nu A)^{-1}Q_m[B(p+q,\eta)+B(\eta,p+q)],$$
$$\forall\eta\in Q_mV$$

设 $w\in H$，$|w|=1$，则有

$$|(A^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial q}T_p(q)\eta,w)|\leqslant\nu^{-1}|(B(p,\eta),A^{-\frac{1}{2}}Q_mw)|+$$
$$\nu^{-1}|(B(q,\eta),A^{-\frac{1}{2}}Q_mw)|+\nu^{-1}|(B(\eta,p+q),A^{-\frac{1}{2}}Q_mw)|\leqslant$$
$$\nu^{-1}C_5\|\eta\|\,|A^{-\frac{1}{2}}Q_mw|\,\|p\|\,(1+\lg|Ap|/\lambda_1^{\frac{1}{2}}\|p\|)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\nu^{-1}C_2|q|^{\frac{1}{2}}\|q\|^{\frac{1}{2}}\|\eta\||A^{-\frac{1}{2}}Q_m w|^{\frac{1}{2}}|w|^{\frac{1}{2}}+$$

$$\nu^{-1}C_2|\eta|^{\frac{1}{2}}\|\eta\|^{\frac{1}{2}}\|p+q\||A^{-\frac{1}{2}}Q_m w|^{\frac{1}{2}}|w|^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$[\nu^{-1}C_5 2M_1(1+\lg(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}))^{\frac{1}{2}}+\nu^{-1}C_2 6M_1]\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\|\eta\|$$

因此

$$\|\frac{\partial}{\partial q}T_p(q)\|_{\mathscr{L}(Q_m V)}\leqslant r_3\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} \tag{3.1.28}$$

由式(3.1.25),从式(3.1.28)推出

$$\|\frac{\partial}{\partial q}T_p(q)\|_{\mathscr{L}(Q_m V)}\leqslant\frac{1}{2}$$

由压缩映射原理,推出存在唯一 $q(p)\in\mathscr{B}^{\perp}$,使 $q(p)=T_p(q)$。令 $\Phi^s(p)=q(p)$。由式(3.1.27)推出式(3.1.26),且 $M^s=\text{Graph}\Phi^s$ 为 C 解析流形,每条轨线 $u(t)=p(t)+q(t)$ 位于流形 M^s 的小邻域内,整体吸引子也在这个邻域内。

定理 3.1.3 设 m 充分大,使得式(3.1.25)成立,则对问题(3.1.10)、(3.1.11)的每一个解 $u(t)=p(t)+q(t)$,有

$$\|q(t)-\Phi^s(p(t))\|\leqslant\frac{2K'_0}{\nu}\lambda_{m+1}^{-\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{2}},\forall t\geqslant T_*, \tag{3.1.29}$$

其中 T_* 和 K'_0 为定理 3.1.1 中的常数。

证明 令 $\Delta(t)=q(t)-\Phi^s(p(t))$。由式(3.1.11)和式(3.1.17),有

$$\nu A\Delta+Q_m[B(\Delta,p+\Phi^s(p))+B(p+q,\Delta)]+\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=0$$

在 H 上作上述方程和 Δ 的内积。由(*)得

$$\nu\|\Delta\|^2\leqslant|(B(\Delta,p+\Phi^s(p)),\Delta)|+|(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t},\Delta)|$$

由式(3.1.4),有

$$\nu\|\Delta\|^2\leqslant C_2|\Delta|\|\Delta\|\|p+\Phi^s(p)\|+|\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}||\Delta| \tag{3.1.30}$$

当 $t>T_*$ 时，$\| p(t) \| \leqslant M_1$。由定理 3.1.2，$\Phi^r(p(t)) \leqslant 2M_1$。将式(3.1.22)代入式(3.1.30)，得

$$\nu \| \Delta \|^2 \leqslant C_2 \lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} \| \Delta \|^2 (M_1 + 2M_1) + K'_0 \lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \| \Delta \|$$

从式(3.1.25)，得

$$\| \Delta \| \leqslant \frac{2K'_0}{\nu} \lambda_{m+1}^{-\frac{3}{2}} L^{\frac{1}{2}}$$

定理 3.1.3 得证。

现考虑另一种近似 Φ^r，它可以逐次逼近，显式求解。有如下定理：

定理 3.1.4 设 m 充分大，使得式(3.1.25)成立。如同定理 3.1.2 来定义 $T_p: \mathscr{B}^\perp \to \mathscr{B}^\perp$，

$$T_p(q) = (\nu A)^{-1}[Q_m f - Q_m B(p+q, p+q)], \forall q \in \mathscr{B}^\perp$$

记

$$\begin{cases} \Phi_0^r(p) = T_p(0), \forall p \in \mathscr{B} \\ \Phi_{n+1}^r(p) = T_p(\Phi_n^r(p)), \forall p \in \mathscr{B}; n = 0, 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{3.1.31}$$

则

$$\| \Phi^r(p) - \Phi_n^r(p) \| \leqslant (2r_2 \lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}})^{n+1} \lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} \nu^{-1} [|f| + 4C_5 M_1^2 L^{\frac{1}{2}}] \tag{3.1.32}$$

其中 r_2 为定理 3.1.2 中所定义。

证明 首先，注意到 $\Phi_0^r(p) \overset{\text{def}}{=\!=} \Phi_0(p), \forall p \in \mathscr{B}$。由定理 3.1.2 和式(3.1.28)、(3.1.25)，易得：

$$\| \Phi^r(p) - \Phi_n^r(p) \| \leqslant 2(r_2 \lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}})^{n+1} \| \Phi_0^r(p) \| \tag{3.1.33}$$

因此，只要估计 $\| \Phi_0^r(p) \|$。从式(3.1.31)，有

$$\Phi_0^r(p) = \Phi_0(p) = (\nu A)^{-1}[Q_m f - Q_m B(p, q)] \tag{3.1.34}$$

则有

$$|A\Phi_0(p)| \leqslant \nu^{-1}|f| + \nu^{-1}|B(p,p)|$$

由式(3.1.4)，有

$$|A\Phi_0^r(p)| \leqslant \nu^{-1}|f| + \nu^{-1}C_5 \| p \|^2 (1 + \lg \frac{|Ap|}{\| p \| \lambda_1^{\frac{1}{2}}})^{\frac{1}{2}},$$

$$|A\Phi_n^s(p)| \leqslant \nu^{-1}|f| + \nu^{-1}C_5 4M_1^2 L^{\frac{1}{2}}$$

因此

$$\| \Phi_0^s(p) \| \leqslant \lambda_{m-1}^{\frac{1}{2}} \nu^{-1} [|f| + 4C_5 M_1^2 L^{\frac{1}{2}}] \quad (3.1.35)$$

联合式(3.1.35)、(3.1.33)，推出式(3.1.32)。

推论 3.1.1 设 m 充分大，使得式(3.1.25)成立，则对问题(3.1.10)、(3.1.11)的每个解 $u(t)=p(t)+q(t)$，有

$$\| q(t) - \Phi_n^s(p(t)) \| \leqslant \lambda_{m+1}^{-\frac{3}{2}} \frac{2K_0}{\nu} L^{\frac{1}{2}} +$$

$$2(r_2 \lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}})^{n+1} \lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} \nu^{-1} [|f| + 4C_5 M_1^2 L^{\frac{1}{2}}],$$

$$\forall t \geqslant T_*, n = 0,1,2,\cdots \quad (3.1.36)$$

其中 Φ_n^s 为式(3.1.31)所确定，T_*，L 和 K'_0 如同定理 3.1.1，r_2 如同定理 3.1.2。

证明 这是定理 3.1.3 和定理 3.1.4 的推论。

为了估计通常有限维 Galerkin 方法逼近的误差。需要先证明如下引理。

引理 3.1.1 设 m 充分大，使得式(3.1.25)成立，则对一切整数 $k \geqslant m+1$，有

$$\| Q_k \Phi^s(p) \| \leqslant K_1 \lambda_{k+1}^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.1.37)$$

其中 $K_1 = \frac{16C_2 M_1^2}{\nu}(1+\lg \frac{\lambda_k}{\lambda_1})^{\frac{1}{2}} + 1$。

证明 从式(3.1.24)，有

$$\nu A Q_k \Phi^s(p) + Q_k B(p + \Phi^s(p), p + \Phi^s(p)) = Q_k f$$

上式在 H 上作和 $\Phi^s(p)$ 的内积，得

$$\nu \| Q_k \Phi^s(p) \|^2 \leqslant |(B(p + \Phi^s(p), p + \Phi^s(p)), Q_k \Phi^s(p))| +$$

$$|f||Q_k \Phi^s(p)|, \nu \| Q_k \Phi^s(p) \|^2 \leqslant$$

$$|(B(p + P_k \Phi^s(p), p + \Phi^s(p)), Q_k \Phi^s(p))| +$$

$$|(B(Q_k \Phi^s(p), p + \Phi^s(p)), Q_k \Phi^s(p))| + |f\| Q_k \Phi^s(p)|$$

由式(3.1.4)和式(3.1.7)可得

$$\nu\|Q_k\Phi^s(p)\|^2\leqslant C_5\|p+\Phi^s(p)\|^2|Q_k\Phi^s(p)|(1+\lg\frac{\lambda_k}{\lambda_1})^{\frac{1}{2}}+$$

$$C_2|Q_k\Phi^s(p)|\,\|Q_k\Phi^s(p)\|\,\|p+\Phi^s(p)\|+|f|\,\|Q_k\Phi^s(p)|$$

从式(3.1.26)和 $\mathscr{B}$ 的定义,有

$$\nu\|Q_k\Phi^s(p)\|\leqslant C_5 8M_1^2\lambda_{k-1}^{-\frac{1}{2}}(1+\lg\frac{\lambda_k}{\lambda_1})^{\frac{1}{2}}+$$

$$C_2\sqrt{8}M_1\lambda_{k+1}^{-\frac{1}{2}}\|Q_k\Phi^s(p)\|+\lambda_{k+1}^{-\frac{1}{2}}|f|$$

由式(3.1.25)推出式(3.1.37)。

令 $k\geqslant m+1$,m 充分大,满足式(3.1.25)。考虑通常的 k 阶 Galerkin 近似:

$$\frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}t}+\nu Au_k+P_kB(u_k,u_k)=P_kf.\ u_k\in H_k \quad (3.1.38)$$

利用定理 3.1.2。容易证明方程(3.1.38)具有唯一解 $\Phi^{s,k}:\mathscr{B}\to P_kQ_mV$,它满足

$$\nu A\Phi^{s,k}(p)+P_kQ_mB(p+\Phi^{s,k}(p),p+\Phi^{s,k}(p))=P_kQ_mf,$$
$$\forall p\in\mathscr{B} \quad (3.1.39)$$

我们注意到 $\Phi^{s,k}$具有方程(3.1.38)的一切定常解。

引理 3.1.2 设 m 充分大,使得式(3.1.25)成立,则对一切整数 $k\geqslant m+1$,有

$$\|\Phi^s(p)-\Phi^{s,k}(p)\|\leqslant K_3\lambda_{k+1}^{-\frac{1}{2}},\quad \forall p\in\mathscr{B} \quad (3.1.40)$$

其中

$$K_3=[1+\frac{(2C_2+C_3)}{\nu}2\sqrt{8}M_1\lambda_{k+1}^{-\frac{1}{2}}(1+\lg\frac{\lambda_k}{\lambda_1})^{\frac{1}{2}}]K_1$$

K_1 为引理 3.1.1 中所定义。

证明 对 $p\in\mathscr{B}$,令 $u=p+\Phi^s(p)$,$v=p+\Phi^{s,k}(p)$,$\Delta=P_k(u-v)$,$\eta=Q_k(u-v)$,$u-v=\Delta+\eta$。由式(3.1.24)和式(3.1.39),有

$$\nu A\Delta+P_kQ_m[B(u-v,u)+B(v,u-v)]=0,$$

$$\nu A\Delta + P_k Q_m[B(\Delta + \eta, u) + B(v, \Delta + \eta)] = 0$$

在 H 上和 Δ 作内积，并利用等式（*），得

$$\nu \|\Delta\|^2 \leqslant |B(\Delta + \eta, u), \Delta)| + |(B(v, \eta), \Delta)|$$

由等式（*），有

$$\nu \|\Delta\|^2 \leqslant |(B(\Delta, u), \Delta)| + |(B(\eta, u), \Delta)| + |(B(P_k v, \Delta), \eta)| + |(B(Q_k v, \Delta), \eta)|$$

利用式(3.1.4)、(3.1.8)、(3.1.7)，可得

$$\begin{aligned}\nu \|\Delta\|^2 \leqslant\ & C_2 |\Delta|\ \|\Delta\|\ \|u\| + \\ & C_5 |\eta|\ \|u\|\ \|\Delta\| (1 + \lg \frac{\lambda_k}{\lambda_1})^{\frac{1}{2}} + \\ & C_5 \|v\|\ \|\Delta\|\ |\eta| (1 + \lg \frac{\lambda_k}{\lambda_1})^{\frac{1}{2}} + \\ & C_2 |Q_k v|^{\frac{1}{2}} \|Q_k v\|^{\frac{1}{2}} \|\Delta\|\ |\eta|^{\frac{1}{2}} \|\eta\|^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.1.41)$$

由式(3.1.26)推出 $\|u\| \leqslant \sqrt{8} M_1$。类似地，有 $\|v\| \leqslant \sqrt{8} M_1$。从式(3.1.41)推出

$$\begin{aligned}\nu \|\Delta\| \leqslant\ & C_2 \lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} \|\Delta\|\ \sqrt{8} M_1 + \\ & C_2 2 \sqrt{8} M_1 \|\eta\| \lambda_{k-1}^{-\frac{1}{2}} (1 + \lg \frac{\lambda_k}{\lambda_1})^{\frac{1}{2}} + \\ & C_2 \sqrt{8} M_1 \|\eta\| \lambda_{k+1}^{-\frac{1}{2}} (1 + \lg \frac{\lambda_k}{\lambda_1})^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

由式(3.1.25)可得

$$\|\Delta\| \leqslant \frac{2(2C_5 + C_2)}{\nu} \sqrt{8} M_1 \|\eta\| \lambda_{k+1}^{-\frac{1}{2}} (1 + \lg \frac{\lambda_k}{\lambda_1})^{\frac{1}{2}} \quad (3.1.42)$$

由式(3.1.37)和式(3.1.42)推出式(3.1.40)。

定理 3.1.5 设 m 充分大，使式(3.1.25)成立。给定 $k \geqslant m+1$，对任何 $p \in \mathscr{B}$，定义 $T_p: \mathscr{B}^\perp \to \mathscr{B}^\perp$，如同定理 3.1.2，

$$T_p(q) = (\nu A)^{-1}[Q_m f - Q_m B(p + q, p + q)]。\forall q \in \mathscr{B}$$

令

$$\Phi_0^{m,k}(p) = P_k T_p(0), \forall p \in \mathscr{B}$$

$$\Phi_{m+1}^{s,k}(p) = P_k T_p(\Phi_n^{s,k}(p)), \quad \forall p \in \mathscr{B}; n = 0,1,2,\cdots \tag{3.1.43}$$

则

$$\| \Phi^{s,k}(p) - \Phi_n^{s,k}(p) \| \leqslant 2(r_2\lambda_{k+1}^{-\frac{1}{2}})^{n+1}\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\nu^{-1}[|f| + 4C_5M_1^2L^{\frac{1}{2}}] \tag{3.1.44}$$

更进一步，对问题(3.1.10)、(3.1.11)的解 $u(t)=p(t)+q(t)$，我们有

$$\| q(t) - \Phi_n^{s,k}(p(t)) \| \leqslant \frac{2K'_0}{\nu}\lambda_{m+1}^{-\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{2}} +$$

$$(2r_2\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}})^{n+1}\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\nu^{-1}[|f| + 4C_5M_1^2L^{\frac{1}{2}}] +$$

$$K_2\lambda_{k+1}^{-\frac{1}{2}}。\forall t \geqslant T_*, n = 0,1,2,\cdots。 \tag{3.1.45}$$

其中 T_*，L 和 K'_0 如同在定理 3.1.1 中，r_2 如同在定理 3.1.2 中，K_3 如同引理 3.1.2 中。

证明 为得到式(3.1.44)，我们重复定理 3.1.4 的证明，只要将 Φ^s 换为 $\Phi^{s,k}$ 即可。估计式(3.1.45)是式(3.1.29)、(3.1.40)和式(3.1.44)的直接推论。

3.2 解的 Gevrey 正则性

考虑具空间周期边界条件的 Navier-Stokes 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f \tag{3.2.1}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{3.2.2}$$

其中未知函数 $u=u(x,t)$，$p=p(x,t)$；$u=\{u_1,u_2\}$，空间为二维；$u=\{u_1,u_2,u_3\}$，空间为三维。$x\in\mathbf{R}^n$，$n=2$ 或 3。体积外力 f 给定，$\nu>0$ 为动力粘性。设 f,u,p 沿每个空间方向均具有 2π 周期。以 Ω 表示以周期 $(0,2\pi)^n$ 的立方体。

$$u,p \text{ 为 } \Omega \text{ 周期的} \tag{3.2.3}$$

为简单计，设 u 在 Ω 上的平均为零，即

$$\int_{\Omega} u(x,t)\mathrm{d}x = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}^{+} \tag{3.2.4}$$

通常问题(3.2.1)～(3.2.4)可写成抽象方程形式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \nu A u + B(u) = f \tag{3.2.5}$$

在 Hilbert 空间 H 中，算子 A(对应于 Stockes 算子具有空间周期边界条件)为线性自共轭无界正算子，$D(A)\subset H$。

u 对 x 作傅氏展开有

$$u = \sum_{j\in Z^n} u_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}, u_j \in \mathbf{C}^n, u_{-j} = \bar{u}_j, u_0 = 0 \tag{3.2.6}$$

$$j \cdot u_j = 0, \quad \forall j \tag{3.2.7}$$

$$\sum_{j\in Z^n} |u_j|^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}|u|^2 < \infty \tag{3.2.8}$$

式(3.2.7)等价于式(3.2.2)，条件 $u_0=0$，是由式(3.2.4)得到的。

考虑算子 A 的正次幂的定义域 $D(A^{\alpha})$，$\alpha>0$，即满足问题(3.2.6)～(3.2.8)函数 u 的集合，满足

$$(2\pi)^n \sum_{j\in Z^n} |j|^{2\alpha} |u_j|^2 = |A^{\alpha} u|^2 < \infty \tag{3.2.9}$$

对给定 $\tau, s>0$，我们考虑 Gevrey 类 $D(\mathrm{e}^{\tau A^s})$，它是满足问题(3.2.6)～(3.2.8)函数 u 的集合，且使得

$$(2\pi)^n \sum_{j\in Z^n} \mathrm{e}^{2\tau|j|^{2s}} |u_j|^2 = |\mathrm{e}^{\tau A^s} u|^2 < \infty \tag{3.2.10}$$

最后，在式(3.2.5)中，$B(u)=B(u,u)$，其中 $B(u,v)$ 定义为

$$(B(u,v),w)) = b(u,v,w) = \sum_{j,k=1}^{n} \int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} w_k \mathrm{d}x$$

补充方程(3.2.5)以初始条件

$$u(0) = u_0 \tag{3.2.11}$$

我们考虑初值问题(3.2.5)、(3.2.11)解的 Gevrey 正则性。

引理 3.2.1 设 u,v,w 在 $D(\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A)$中给定，$\tau>0$，则$B(u,v)$

属于 $D(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}})$，且对空间二维或三维，有

$$|(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}B(u,v),e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Aw)| \leqslant$$

$$C_1|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u|^{\frac{1}{2}}|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Au|^{\frac{1}{2}}|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}v\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Aw| \quad (3.2.12)$$

其中 $C_1>0$ 为适当的常数。

证明 置

$$u=\sum_{j\in Z^n}u_je^{ijx},u^*=\sum_{j\in Z^n}u_j^*e^{ijx},u_j^*=e^{\tau|j|}u_j$$

对于 v,w 运用相类似的符号，我们有

$$(B(u,v),w)=(2\pi)^n\mathrm{i}\sum_{j-k=l}(u_j\cdot k)(v_k\cdot\overline{w}_l) \quad (3.2.13)$$

其中 $j,k,l\in Z^n$。

$$(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}B(u,v),e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Aw)=$$

$$(2\pi)^n\mathrm{i}\sum\nolimits_{j+k=l}(u_j\cdot k)(v_k\cdot\overline{w}_l)|l|^2e^{2\tau|l|}=$$

$$(2\pi)^n\mathrm{i}\sum\nolimits_{j+k=l}(u_j^*\cdot k)(v_k^*\cdot\overline{w}_l^*)|l|^2e^{\tau(|l|-|j|-|k|)} \quad (3.2.14)$$

注意到 $|l|-|j|-|k|=|j+k|-|j|-|k|\leqslant 0$，有

$$(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}B(u,v),e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Aw)\leqslant(2\pi)^n\sum_{j+k=l}|u_j^*||k||v_k^*||\overline{w}_l^*||l|^2 \quad (3.2.15)$$

式(3.2.15)的右端等于积分

$$\int_\Omega\xi(x)\Phi(x)\theta(x)\mathrm{d}x$$

其中

$$\xi(x)=\sum_{j\in Z^n}|u_j^*|e^{ijx},\Phi(x)=\sum_{k\in Z^n}|k||v_k^*|e^{ikx},$$

$$\theta(x)=\sum_{l\in Z^n}|l|^2|w_l^*|e^{ilx}$$

这个积分可为$(B(u^*,v^*),Aw^*)$所估计。而此类有 B 的估计在 NS 方程中是标准的。于是即得式(3.2.12)。

定理 3.2.1 设 u_0 在 $D(A^{\frac{1}{2}})$中给定，f 在 $D(e^{\sigma_1 A^{\frac{1}{2}}})$中给定，

$\sigma_1>0$，则存在 T_*，它仅依赖于初值 u_0，$|A^{\frac{1}{2}}u_0|$，使得以下成立：

(i) 对于空间二维或三维，式(3.2.5)、(3.2.11)在 $(0,T_*)$ 上具有唯一正则解（它从 $[0,T_*]$ 到 $D(A^{\frac{1}{2}})$ 连续），使得 $t\to e^{\Psi(t)A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u(t)$ 在 $(0,T_*)$ 上解析，$\Psi(t)=\min(t,\sigma_1,T_*)$；

(ii) 如果式(3.2.5)、(3.2.11)的解对于一切 $t>0$ 存在并保持在 $D(A^{\frac{1}{2}})$ 中有界，则 u 在 (T_*,∞) 中解析，它的值属于 $D(A^{\frac{1}{2}}e^{\sigma A^{\frac{1}{2}}})$，其中 $\sigma>0$，T_* 如前。

证明 主要证明在于建立解的先验估计。其他可用 Galerkin 方法建立近似解。设取复的框架，$t=\zeta\in\mathbf{C}$，$\varphi(t)=\min(t,\sigma_1)$；

(i) 实的情况。在时刻 τ 作式(3.2.5)和 $Au(\tau)$ 依 $D(e^{\varphi(\tau)A^{\frac{1}{2}}})$ 的内积

$$(e^{\varphi(\tau)A^{\frac{1}{2}}}u'(\tau),Ae^{\varphi(\tau)A^{\frac{1}{2}}}u(\tau))+\nu|e^{\varphi(\tau)A^{\frac{1}{2}}}Au(\tau)|^2=$$

$$(e^{\varphi(\tau)A^{\frac{1}{2}}}f,e^{\varphi(\tau)A^{\frac{1}{2}}}Au(\tau)-(e^{\varphi(\tau)A^{\frac{1}{2}}}B(u(\tau)),e^{\varphi(\tau)A^{\frac{1}{2}}}Au(\tau))\quad(3.2.16)$$

这里 $(\cdot,\cdot)_2$，$|\cdot|_2$ 表示在 $D(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}})$ 中的内积和模，而 $((\cdot,\cdot))$，$\|\cdot\|_2$ 则表示在 $D(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}})$ 中的内积和模。

$$(e^{\varphi(t)A^{\frac{1}{2}}}u'(t),e^{\varphi(t)A^{\frac{1}{2}}}Au(t))=(A^{\frac{1}{2}}(e^{\varphi(t)A^{\frac{1}{2}}}u(t))'-$$
$$\varphi'(t)Ae^{\varphi(t)A^{\frac{1}{2}}}u(t),e^{\varphi(t)A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u(t))=$$
$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A^{\frac{1}{2}}e^{\varphi(t)A^{\frac{1}{2}}}u(t)|^2-\varphi'(t)(Ae^{\varphi(t)A^{\frac{1}{2}}}\times$$
$$u(t),e^{\varphi(t)A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u(t))=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_{\varphi(t)}^2-$$
$$\varphi'(t)(Au(t),A^{\frac{1}{2}}u(t))_{\varphi(t)}\geqslant\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_{\varphi(t)}^2-$$
$$|Au(t)|_{\varphi(t)}\|u(t)\|_{\varphi(t)}\geqslant\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_{\varphi(t)}^2-$$
$$\frac{\nu}{4}|Au(t)|_{\varphi(t)}^2-\frac{1}{\nu}\|u(t)\|_{\varphi(t)}^2\quad(3.2.17)$$

再写式(3.2.16)的右边为

$$(f,Au)_\varphi-(B(u),Au)_\varphi \tag{3.2.18}$$

由引理 3.2.1,不等式(3.2.12)以及 Schwarz 不等式,可得到式(3.2.18)的界

$$|f|_\varphi|Au|_\varphi+C_1\|u\|_\varphi^{\frac{3}{2}}|Au|_\varphi^{\frac{3}{2}}\leqslant\frac{\nu}{4}|Au|_\varphi^2+\frac{2}{\nu}|f|_\varphi^2+\frac{C_2}{\nu^3}\|u\|_\varphi^6$$

其中 C_1,C_2 以及 C_i,C'_i 均表示各种常数。于是由式(3.2.16)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_\varphi^2+\nu|Au|_\varphi^2\leqslant\frac{4}{\nu}|f|_\varphi^2+\frac{2}{\nu}\|u\|_\varphi^2+\frac{2C_2}{\nu^3}\|u\|_\varphi^6$$

$$\leqslant\frac{4}{\nu}|f|_\varphi^2+C_3+\frac{3C_2}{\nu^3}\|u\|_\varphi^2 \tag{3.2.19}$$

最后,可得

$y'\leqslant K_1y^3$

$$y(t)=1+\|u(t)\|_\varphi^2,K_1=\frac{4}{\nu}|f|_{\sigma_1}^2+C_3+\frac{(3C_2)^{\frac{1}{3}}}{\nu} \tag{3.2.20}$$

因此

$$y(t)=1+|\mathrm{e}^{\varphi(t)A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u(t)|^2\leqslant2y(0)=2+2|A^{\frac{1}{2}}u(0)|^2 \tag{3.2.21}$$

$$t\leqslant T_1(|A^{\frac{1}{2}}u(0)|)=\frac{2}{K_1}(1+|A^{\frac{1}{2}}u(0)|^2)^{-2} \tag{3.2.22}$$

于是 $u(t)$ 属于 $D(\mathrm{e}^{\varphi(t)A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}})$,式(3.2.21)成立当 $t\in(0,T_1)$,$u(0)\in D(A^{\frac{1}{2}})$。特别

$$|\mathrm{e}^{\varphi(T_1)A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u(T_1)|^2\leqslant2+2|A^{\frac{1}{2}}u(0)|^2 \tag{3.2.23}$$

如果已知

$$|A^{\frac{1}{2}}u(t)|\leqslant M_1,\quad\forall t\geqslant0 \tag{3.2.24}$$

(式(3.2.23)对于空间二维永远是对的,对于三维则必须给假设)。则我们重复上述原理,对任何 $t_0>0$,有

$$|\mathrm{e}^{\sigma2A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u(t)|^2\leqslant2+2M_1^2,\forall t\geqslant T_2 \tag{3.2.25}$$

其中 $\sigma_2=\varphi(T_2)=\min(T_2,\sigma_1)$，有

$$T_2 = T_2(M_1) = \frac{2}{K_1}(1 + M_1^2)^{-2} \tag{3.2.26}$$

(ii)复的情况。为了得到对时间 t 的解析性，我们考虑方程(3.2.5)具复的时间 $\zeta\in\mathbf{C}$，u 为复值函数，$\mathbf{H}$ 表示原空间 H 的复化空间，内积、模和算子 A,B 作同样的扩张。

方程(3.2.5)可写为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\zeta} + \nu Au + Bu = f \tag{3.2.27}$$

其中 $\zeta=se^{i\theta}$，$s>0$、$\cos\theta>0$，因此 $\mathrm{Re}\,\zeta>0$。作式(3.2.27)和 $Au(se^{i\theta})$ 依 $D(e^{\varphi(s\cos\theta)A^{\frac{1}{2}}})$ 的内积，乘这个方程以 $e^{-i\theta}$，再取实部可得

$$\mathrm{Re}\ e^{-i\theta}(e^{\varphi(s\cos\theta)A^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\zeta}(se^{i\theta}),e^{\varphi(s\cos\theta)A^{\frac{1}{2}}}Au(se^{i\theta}))=$$

$$\mathrm{Re}\ (A^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(e^{\varphi(s\cos\theta)A^{\frac{1}{2}}}u(se^{i\theta}))-$$

$$e^{-i\theta}\varphi'(s\cos\theta)\cos\theta Au(se^{i\theta}),e^{\varphi(s\cos\theta)A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u(se^{i\theta}))=$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|A^{\frac{1}{2}}u(se^{i\theta})|^2_{\varphi(s\cos\theta)}-$$

$$\cos^2\theta\varphi'(s\cos\theta)|Au(se^{i\theta})|_{\varphi(s\cos\theta)}|A^{\frac{1}{2}}u(se^{i\theta})|_{\varphi(s\cos\theta)}\geqslant$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|A^{\frac{1}{2}}u(se^{i\theta})|^2_{\varphi(s\cos\theta)}-\frac{\nu\cos\theta}{4}|Au(se^{i\theta})|^2_{\varphi(s\cos\theta)}-$$

$$\frac{1}{\nu\cos\theta}\|u(se^{i\theta})\|^2_{\varphi(s\cos\theta)}$$

$$\mathrm{Re}\ e^{-i\theta}(e^{\varphi(s\cos\theta)A^{\frac{1}{2}}}Au(se^{i\theta}),e^{\varphi(s\cos\theta)A^{\frac{1}{2}}}Au(se^{i\theta}))=$$

$$\cos\theta|Au(se^{i\theta})|^2_{\varphi(s\cos\theta)}$$

以 φ 代替 $\varphi(s\cos\theta)$，必要时忽略 s，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|u\|^2_{\varphi}+\frac{3}{4}\nu\cos\theta|Au|^2_{\varphi}-\frac{1}{\nu\cos\theta}\|u\|^2_{\varphi}\leqslant$$

$$\mathrm{Re}\ e^{-i\theta}(f,Au)_{\varphi}-\mathrm{Re}\ e^{-i\theta}(B(u),Au)_{\varphi} \tag{3.2.28}$$

对于不等式(3.2.28)右端可估计如下

$$|f|_\varphi |Au|_\varphi + C_1 \| u \|_\varphi^{\frac{3}{2}} \| Au \|_\varphi^{\frac{3}{2}} \leqslant \frac{\nu \cos\theta}{4} |Au|_\varphi^2 +$$

$$\frac{2}{\nu\cos\theta} |f|_\varphi^2 + \frac{C_4}{(\nu\cos\theta)^3} \| u \|_\varphi^6$$

类似于式(3.2.19)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \| u \|_\varphi^2 + \nu\cos\theta |Au|_\varphi^2 \leqslant \frac{4}{\nu\cos\theta} |f|_\varphi^2 + \frac{2}{\nu\cos\theta} \| u \|_\varphi^2 +$$

$$\frac{2C_4}{(\nu\cos\theta)^3} \| u \|_\varphi^6 \leqslant \frac{4}{\nu\cos\theta} |f|_\varphi^2 + C_5 + \frac{4C_4}{(\nu\cos\theta)^3} \| u \|_\varphi^6 \tag{3.2.29}$$

其中 $u = u(se^{i\theta})$，$\varphi = \varphi(s\cos\theta)$。如限制 $\cos\theta \geqslant \sqrt{2}/2$，则得到类似于式(3.2.20)的形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \leqslant K_2 y^3$$

$$y(s) = 1 + |\mathrm{e}^{\varphi(s\cos\theta)A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} u(se^{i\theta})|^2 \tag{3.2.30}$$

$$K_2 = \frac{8}{\nu} |f|_{\sigma 1}^2 + C_5 + \frac{2^5 C_4}{\nu^3}$$

于是 $y(s) \leqslant 2y(0)$。即

$$|\mathrm{e}^{\varphi(s\cos\theta)A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} u(se^{i\theta})|^2 \leqslant 2 + 2|A^{\frac{1}{2}} u(0)|^2 \tag{3.2.31}$$

其中

$$0 \leqslant s \leqslant T_3(|A^{\frac{1}{2}} u(0)|) = \frac{2}{K_2} [1 + |A^{\frac{1}{2}} u(0)|^2]^{-2} \tag{3.2.32}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \cos\theta \leqslant 1 \tag{3.2.33}$$

这就表明，如果 $u(0) \in D(A^{\frac{1}{2}})$，则 $u(se^{i\theta})$ 在式(3.2.32)、(3.2.33)所确定的复的角形区域上属于 $D(\mathrm{e}^{\varphi(s\cos\theta)A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}})$。特别

$$|\mathrm{e}^{\sigma_3 A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} u(T_3 e^{i\theta})|^2 \leqslant 2 + 2|A^{\frac{1}{2}} u(0)|^2 \tag{3.2.34}$$

于此 $1 \geqslant \cos\theta \geqslant \sqrt{2}/2$，$\sigma_3 = \varphi(T_3, \sqrt{2}/2) = \min$ $(T\ \sqrt{2}/2,$

σ_1)。

如果式(3.2.24)成立,则我们能重复以上过程,使得对任何 $t_0>0$,有

$$|e^{\sigma_4 A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} u(se^{i\theta}+t_0)|^2 \leqslant 2+2M_1^2 \qquad (3.2.35)$$

其中 $0\leqslant s\leqslant T_4$, $\sqrt{2}/2\leqslant\cos\theta\leqslant 1$,

$$T_4 = T_4(M_1) = \frac{2}{K_2}(1+M_1^2)^{-2} \qquad (3.2.36)$$

$\sigma_4=\varphi(T_4,\sqrt{2}/2)=\min(T_4\sqrt{2}/2,\sigma_1)$,特别估计式(3.2.35)对于 $\varphi=se^{i\theta}+t_0$。在区域 $\Delta(M_1)$

$$\mathrm{Re}\, s \geqslant T_4(M_1), |\mathrm{Im}\, s| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}T_4(M_1) \qquad (3.2.37)$$

上成立。于是定理得证。

$T_*=T_4(M_1)$, $\sigma=\min((\sqrt{2}/2)T_*,\sigma 1)$。

附注:

(i) 如果 f 依赖于 t,如假定 f 对时间 t 在 $D(e^{\sigma_1 A^{\frac{1}{2}}})$ 中解析,此时 u 的解析区域为 $\Delta(M_1)$和 f 解析区域的交。

(ii) 引理 3.2.1 的证明中,对于式(3.2.12)左边的估计也可用对于 B 的其他估计。例如,对于空间二维情况,由

$$|(B(u^*,v^*),w^*)| \leqslant$$
$$C|A^{\frac{1}{2}}u^*||A^{\frac{1}{2}}v^*||Aw^*|\left(1+\lg\frac{|Au^*|^2}{4\pi^2|A^{\frac{1}{2}}u^*|^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

有

$$|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}B(u,v),e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}w)| \leqslant$$
$$C'_1|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u||e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}v||e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Aw| \times$$
$$(1+\lg\frac{|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Au|^2}{4\pi^2|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u|^2})^{\frac{1}{2}} \qquad (3.2.38)$$

由式(3.2.38)代替式(3.2.12),可增加 $T_4(M_1)$和区域(3.2.37)的

宽度。代替式(3.2.29)可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \leqslant C_7(\nu\cos\theta)^{-1}y^2\lg y \tag{3.2.39}$$

因此,若式(3.2.24)满足,可得到式(3.2.36)对任何 $t_0 \geqslant 0$,任何 s,θ 满足 $0 \leqslant s \leqslant T_5(M_1)$,$\sqrt{2}/2 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$,

$$T_5(M_1) = \frac{C_8}{(\frac{1}{\nu})(|f|_{\sigma_1}^2 + M_1^2) + \lg((1/\nu^2)(|f|_{\sigma_1}^2 + M_1^2))} \tag{3.2.40}$$

u 的解析区域含有 $\Delta'(M_1)$,类似于 $\Delta(M_1)$。T_5 代替 T_4。解析值在 $D(A^{\frac{1}{2}}e^{\sigma_5 A^{\frac{1}{2}}})$ 中,$\sigma_5 = \min\ ((T_5\ \sqrt{2}/2),\sigma_1)$。

(iii) 置 $u^*(t) = e^{\varphi(t)A^{\frac{1}{2}}}u(t)$,则从式(3.2.5)可得 u^* 的方程

$$\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}t} + \nu Au^* - \varphi' A^{\frac{1}{2}}u + e^{-\varphi}B(u^*) = f^* \tag{3.2.41}$$

3.3 一类耗散非线性发展方程解的时间解析性

设 H 为无穷维 Hilbert 空间,具数量积$(\cdot,\cdot)$和模$|\cdot|$,A 为给定的无界的、正的自共轭的线性闭算子,$D(A) \subset H$,A^{-1}在 H 中紧,非线性算子 $R:D(A) \to H$ 在 $D(A)$的有限维子空间上是解析的,且依这些子空间的复化可解析扩张。

由于 A^{-1}在 H 中的紧性,存在 H 的基函数$\{w_j\}$,它们是 A 的特征向量,即存在 H 的正交基,由对应于 A 的特征值 $\lambda_j \in \mathbf{R}_+$ 的特征向量$\{w_j\}$所组成:

$$Aw_j = \lambda_j w_j$$
$$|w_j| = 1$$
$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$$

当 $j \to \infty$ 时,$\lambda_j \to +\infty$。同样可定义 A 的幂 A^s,$s \in \mathbf{R}$。A^s 映照 $D(A^s)$到 H。特别 $V = D(A^{\frac{1}{2}})$,它的模和内积用$\|\cdot\|$和$((\cdot,\cdot))$

分别表示，且$|\cdot|_1=(\|\cdot\|^2+|\cdot|^2)^{\frac{1}{2}}$。对于向量$u$，$Au=(Au_1,\cdots,Au_k)$。

考虑如下抽象初值问题

$$\begin{cases} u'(t)+DAu(t)+R(u(t))=f(t), t\in \mathbf{R}_+ & (3.3.1)\\ u(0)=u_0, & t=0 \quad (3.3.2)\end{cases}$$

其中u为向量函数：$\mathbf{R}_+\to D(A)$，f：$\mathbf{R}_+\to H$为解析的，$D=(d_{ij})_{k\times k}$为实的、正定矩阵。

用H_c，V_c和$D(A)_c$分别表示H，V和$D(A)$复化。例如H_c为$H\oplus H$通过复数组成基本元素$h_1+\mathrm{i}h_2$的子集，$A(h_1+\mathrm{i}h_2)=Ah_1+\mathrm{i}Ah_2$，

$$(h_1+\mathrm{i}h_2,g_1+\mathrm{i}g_2)=(h_1,g_1)+(h_2,g_2)+\mathrm{i}[(h_2,g_1)-(h_1,g_2)]$$

A^{-1}在H_c是紧的。事实上，用H空间的正交基$\{w_j\}$，易于构造由A的特征向量组成的H_c的正交基$\{w_j\}$。

设$1\leqslant\gamma<\infty$，$K>0$，函数$C\in C(0,\infty;\mathbf{R}_+)$使得对一切$\varepsilon>0$，$R$满足

$$|(R(u),Au+u)|\leqslant\varepsilon|Au|^2+C(\varepsilon)|u|_1^{2\gamma}+K,\quad \forall u\in D(A)_c \tag{3.3.3}$$

且当$v_m\to v$从X到$D(A)$依弱拓扑下收敛时，有

$$R(v_m)\to R(v)，依 L^2(X,H) 弱收敛 \tag{3.3.4}$$

设存在$M>0$，f满足

$$\|f(t)\|_*\leqslant M,\forall t\in\mathbf{R}_+ \tag{3.3.5}$$

定理 3.3.1 设u为式(3.3.1)、(3.3.2)的解，在上述假定式(3.3.3)、(3.3.4)、(3.3.5)下，则存在θ_0，$|\theta_0|\leqslant\frac{\pi}{4}$，和函数$T_1\in C(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$，如$|u(0)|_1$为有限，则$u$具有$D(A)_c$值，可解析延拓至复数区域：

$$\Delta(|u(0)|_1)=\{z=se^{\mathrm{i}\theta}\,|\,|\theta|\leqslant\theta_0,0\leqslant s\leqslant T_1(|u(0)|_1)\} \tag{3.3.6}$$

更进一步，若$|u(t)|_1$在$t\in(a,b)$上囿于B，则此区域可拓展为

$$\Delta = \bigcup_{t\in(a,b)} t + \Delta(B)$$

对于一切紧集K包含在这个区域内，以下不等式成立：

$$\sup_{z\in K}\left|\frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d}z^k}(z)\right|_1 \leqslant 2^{\frac{1}{2}}(2/d)^k(k!)(1+|u_0|_1^2)^{\frac{1}{2}}, d = \text{dist}(K,\partial\Delta) \tag{3.3.7}$$

$$\sup_{z\in K}|Au(z)| \leqslant T_2(K) < \infty \tag{3.3.8}$$

$$\sup_{z\in K}\left|A\left(\frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d}z^k}(z)\right)\right| \leqslant 2^k(k!)[d(K,\partial\Delta(u_0)]^{-k}T_2(K') \tag{3.3.9}$$

其中$K' \overset{\text{def}}{=} \{z\in\Delta(u_0)\,|\,d(z,\partial\Delta(u_0)) \geqslant \frac{1}{2}d(K,\partial\Delta(u_0))\}$

证明 考虑对复时间的 Galerkin 近似，对在$H_m \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{C}w_1+\cdots+\mathbf{C}w_m\}$上的复微分方程，令$P_m$为$H_m$的投影，寻求解

$$u_m(z) = \sum_{i=1}^{m} g_i(z)w_i, g_i: C\to C$$

$$\left(\frac{\partial u_m}{\partial z} + DAu_m + R(u_m) - f(t), v\right) = 0, \quad \forall v\in H_m, \tag{3.3.10}$$

$$u_m(0) = P_m u_0 \tag{3.3.11}$$

因A在H_m上具有特别简单的形式，即$Au_m(z) = \sum \lambda_i g_i(z)w_i$，式(3.3.10)～(3.3.11)归结为$m$个常微分方程组，依众知的 Cauchy-Kovalevskaya 定理，它具有唯一解析解确定在原点的复邻域中。u_m也可以归结为实时间问题(3.3.1)、(3.3.2)的 Galerkin 近似(当限制于实轴上)。现作先验估计。令$v=Au_m+u_m$在式(3.3.10)中并忽略下标m可得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}, Au\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}, u\right) + (DAu, Au) + (DAu, u) +$$

$$(R(u), Au+u) - (f(t), Au+u) = 0 \tag{3.3.12}$$

令 $z=se^{i\theta}$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，乘方程(3.3.12)以 $e^{i\theta}$，再取实部。因 D 是实的、正定矩阵，因此存在 $\alpha_0\geqslant 0$，使得 $\mathrm{Re}\,(Dz,z)\geqslant\alpha_0|z|^2$，$\forall z\in\mathbf{C}^n$，由此可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\|u\|^2+|u|^2)+\alpha_0\cos\theta(|Au|^2+\|u\|^2)\leqslant\\
&\sin\theta\|D\|_*(|Au|^2+\|u\|^2)+\\
&|(R(u),Au+u)|+|(f(t),Au+u)|
\end{aligned}
$$

利用条件(3.3.3)，取 $\varepsilon=(\alpha_0\cos\theta)/8$，以及条件(3.3.5)可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\|u\|^2+|u|^2)+\alpha_0\cos\theta(|Au|^2+\|u\|^2)\leqslant\\
&|\sin\theta|\|D\|_*(|Au|^2+\|u\|^2)+(\alpha_0/8)\cos\theta|Au|^2+\\
&K+C(\theta)|u|_1^{2\gamma}+M(|Au|+|u|)
\end{aligned}
\tag{3.3.13}
$$

进一步限制 θ，使得

$$\alpha_0\cos\theta\geqslant\|D\|_*|\sin\theta|$$

例如可取

$$|\theta|\leqslant\min(\arctan(\alpha_0/4\|D\|_*),\frac{\pi}{4})\tag{3.3.14}$$

因此，在式(3.3.13)中最后一项利用 Young 不等式可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|u|_1^2+\alpha_0\cos\theta(|Au|^2+\|u\|^2)\leqslant\\
&(\alpha_0/4)\cos\theta[|Au|^2+\|u\|^2]+\\
&(\alpha_0/8)\cos\theta|Au|^2+K+C(\theta)|u|_1^{2\gamma}+\\
&4M^2/(\alpha_0\cos\theta)+(\alpha_0/8)\cos\theta|Au|^2+M|u|^2
\end{aligned}
$$

化简得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|u|_1^2+\alpha_0\cos\theta(|Au|^2+\|u\|^2)\leqslant\\
&C(\theta)|u|^{2\gamma_1}+4M^2/(\alpha_0\cos\theta)+K
\end{aligned}
\tag{3.3.15}
$$

如果 θ 满足式(3.3.14)，则式(3.3.15)中系数的界与 θ 无关，因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|u(se^{i\theta})|_1^2+C_1(|Au|^2+\|u\|^2)\leqslant C_2+C_3|u(se^{i\theta})|_1^{2\gamma}\tag{3.3.16}$$

忽略 $C_1(|Au|^2+\|u\|^2)$，记 $y(s)=1+|u(se^{i\theta})|_1^2$，可得微分方程

$$y'(s)\leqslant C_4 y^\gamma(s), s\geqslant 0$$

其中 $C_4=\max\{C_2,C_3\}$。积分上面方程得

$$0<y(s)\leqslant (y(0)^{1-\gamma}-(\gamma-1)C_4 s)^{1/(1-\gamma)},$$

$$0\leqslant s<y(0)^{1-\gamma}[(\gamma-1)C_4]^{-1}$$

这就表明存在常数 $T_1=y(0)^{1-\gamma}(1-(\frac{1}{2})^{\gamma-1})/((\gamma-1)C_4)$，它依赖于 $|u_0|_1$，但与 m 无关，使得

$$|u_m(se^{i\theta})|_1\leqslant 2(1+|u_m(0)|_1^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant 2(1+|u_0|_1^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\forall\theta \text{ 满足式}(3.3.14), 0\leqslant s\leqslant T_1(|u_0|_1) \qquad (3.3.17)$$

于此，我们恢复下标 m。因此由常微分方程解的存在性理论，推出 u_m 能拓展为式(3.3.16)的解析解在区域

$\Delta(|u(0)|_1)=\{z=se^{i\theta}|0<s<T_1(|u_0|_1),\theta$ 满足(3.3.14)$\}$ 如图 3.1 所示。

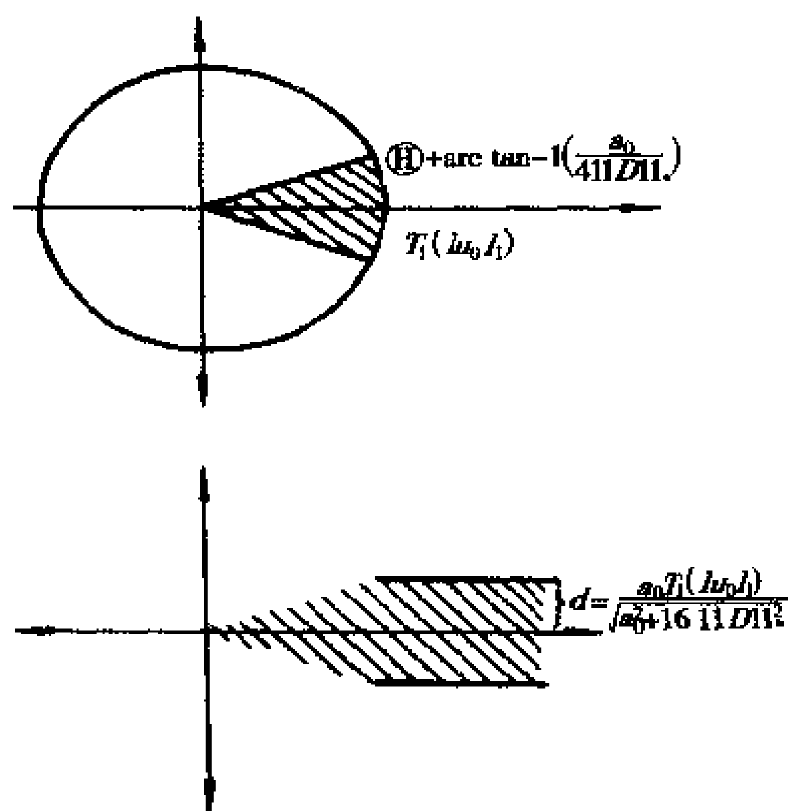


图 3.1

即有

$$\sup |u_m(z)|_1 \leqslant 2(1+|u_0|_1^2)^{\frac{1}{2}}, z \in \Delta(|u_0|_1)$$

进一步，由柯西公式有

$$\frac{d^k u_m}{dz^k}(z) = (k!)/(2\pi i)\int_{|z-\eta|=\frac{d}{2}} u_m(\eta)(\eta - z)^{-(k+1)} d\eta$$

其中 $d=d(z,\partial\Delta(u_0))$。因此

$$\left|\frac{d^k u_m}{dz^k}\right|_1 \leqslant (2/d)^k (k!) \sup_{z\in\Delta(|u_0|_1)} |u_m(z)|_1$$

特别，K 作为 $\Delta(|u_0|_1)$ 的紧子集有

$$\sup_{z\in K}\left|\frac{d^k u_m}{dz^k}(z)\right|_1 \leqslant 2^{\frac{1}{2}}(2/d)^k(k!)(1+|u_0|_1^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3.18}$$

其中 $d=d(K,\partial\Delta(|u_0|_1))$，为了得到 u_m 在 $D(A)$ 中的界，对于 $\Delta(|u_0|_1)$ 中的任何紧子集 K，和任意 $z=se^{i\theta}\in K$，有

$$\left|\frac{d}{ds}|u_m(se^{i\theta})|_1^2\right| = \left|2\left(\frac{du_m}{dz},u_m\right)+2\left(\frac{du_m}{dz},u_m\right)\right| \leqslant$$

$$2\left|\frac{du_m}{dz}\right|_1 |u_m|_1 \leqslant 4(2/d)(1+|u_0|_1^2) \tag{3.3.19}$$

其中 $d=d(K,\partial\Delta(|u_0|_1))$。将此代入式(3.3.15)，忽略 $\|u_m\|^2$ 可得

$$C_1|Au_m|^2 \leqslant C_2 + C_3(2(1+|u_0|_1^2))^\gamma + 4(2/d)(1+|u_0|_1^2) \tag{3.3.20}$$

因此，对任何紧子集 $K\subset\Delta(|u_0|_1)$，u_m 在 $L^\infty(K,D(A))$ 中一致有界(与 m 无关)。

$$\sup_{z\in K}|Au_m(z)| \leqslant T_2 < \infty, T_2 = T_2(K)$$

由柯西公式可得，对任何紧子集 K，使得当 $d(K,\partial\Delta(|u_0|_1))>d>0$ 时

$$A(d^k u_m/dz^k)(z) = (k!)/(2\pi i)\int_{|z-\eta|=\frac{d}{2}} Au_m(\eta)/(\eta-z)^{k+1}d\eta, \forall z \in K$$

令 K' 为紧子集 $\{z\in\Delta(u_0) \mid d(z,\partial\Delta(|u_0|_1)) \geqslant \frac{1}{2}d(K,\partial\Delta(|u_0|_1))\}\supset K$ 有

$$|A(d^k u_m/dz^k)(z)| \leqslant 2^k(k!)[d(z,\partial\Delta(u_0))]^{-k}\sup_{z\in K'}|Au_m(z)|$$

$$\sup_{z\in K}|A(d^k u_m/dz^k)(z)| \leqslant 2^k(k!)[d(z,\partial\Delta(u_0))]^{-k}T_2(K')$$

(3.3.21)

现取极限 $m\to\infty$。因函数 $u_m:\mathbf{C}\to D(A)$ 在 $\Delta(|u_0|_1)$ 上是一致有界的和解析的，依古典的 Montel 定理知，对于序列 $\{u_m\}$ 可选取其子序列依 $D(A)$ 模在 $\Delta(u_0)$ 的任何紧集上一致收敛于函数 u^*，它是在 $\Delta(u_0)$ 上 $D(A)$ 解析。进一步，因 $u_m|_{0,T}$ 对应于实的 Galerkin 近似，$u_m|_{0,T}\to u$ 为式(3.3.31)、(3.3.32)的解。而 u^* 正好是 u 在 $\Delta(u_0)$ 上的解析延拓。因此 u^* 为 u 在 $\Delta(u_0)$ 上的唯一解析延拓，$u^*=u$。因此 $\{u_m\}$ 任何子序列收敛于 u，即整个序列收敛于 u。我们有

$$\sup_{z\in K}|Au(z)| \leqslant T_2(K),\forall \text{紧集 } K\subset\Delta(u_0)$$

类似地，由式(3.3.18)、(3.3.21)推出

$$\frac{d^k u_m}{dz^k}\to\frac{d^k u}{dz^k}$$

依 $D(A)$ 在 $\Delta(u_0)$ 的紧子集上一致收敛，u 满足式(3.3.37)、(3.3.38)、(3.3.39)。这些一致收敛性结果，易知 u 为式(3.3.31)、(3.3.32)的解。

若 $|u|_1\leqslant R,t\in(\alpha,\beta)$，则我们能重复在 $t=0$ 时的原理到任何点 $t\in(\alpha,\beta)$，有 $u:\mathbf{C}\to D(A)_c$ 为 $D(A)$ 值的时间解析函数在如下开集上：

$$\bigcup_{t\geqslant 0}[t+\Delta(|u(t)|_1)]\supset\bigcup_{t\in(\alpha,\beta)}[t+\Delta(R)]$$

附注：在定理3.3.1的假设下，对 $0<t\leqslant(\frac{3}{4})T_1(|u_0|_1)$，我们有

$$\left|\frac{d^k u}{dz^k}(t)\right|_1 \leqslant 2^k k! C^{-k}(2^{\frac{1}{2}})(1+|u_0|_1^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3.22}$$

$$\left|A\frac{d^k u}{dz^k}(t)\right| \leqslant 2^k k! C^{-k}(C_2+C_3(2(1+|u_0|_1^2)^\gamma)+4(4/C)(1+|u_0|_1^2)^{\frac{1}{2}}C_1) \tag{3.3.23}$$

其中 $C=(t_m/(1+m)^2)^{\frac{1}{2}}$ 为 t 到 $\partial\Delta$ 的距离，$m=\alpha_0/4\|D\|_*,C_1,C_2$

和 γ 为常数。

以下举出定理3.3.1的具体应用。

例： 反应扩散方程

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为有界开集，反应扩散方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-D\Delta u+g(u)=0 \tag{3.3.24}$$

$$u(0)=u_0 \tag{3.3.25}$$

其中 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_k)$ 为定义在 $\Omega\times\mathbf{R}_+$ 上的向量函数，D 为正对角阵，对角元素为 $d_1,d_2,\cdots,d_k$，$g:\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}^k$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的函数，它的分量具有 $r(r\geqslant 2)$ 阶多项式形式：

$$g_i(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant r}C_\alpha^i x_1^{\alpha_1}\cdots x_k^{\alpha_k} \tag{3.3.26}$$

补充如下边界条件之一：

$$u(x,t)=0,x\in\partial\Omega,t>0 \tag{3.3.27}$$

$$u(\cdot,t)\text{ 为 }\Omega\text{ 周期的},\forall t\geqslant 0,\Omega=(0,L)^n \tag{3.3.28}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t)=0,\forall x\in\partial\Omega,\forall t\geqslant 0 \tag{3.3.29}$$

对应于上述边界条件有

$$H=L^2(\Omega),\qquad L^2(\Omega),\qquad L^2(\Omega)$$

$$V=H_0^1(\Omega),\qquad H_{per}^1(\Omega),\qquad H^1(\Omega)$$

$$D(A)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\quad H_{per}^2(\Omega),\quad \{v\in H^2(\Omega)\mid\frac{\partial v}{\partial n}=0\}$$

写式(3.3.24)为式(3.3.31)形式，此时有 $A=-\Delta,R(u)=g(u)$，$u\in D(A)$，考虑 $R(u)$在什么条件满足条件(3.3.3)。

$$|R(u)|=\int\sum_{1\leqslant i\leqslant k}(C_\alpha^i u_1^{\alpha_1}\cdots u_k^{\alpha_k})|^2\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C\int\sum_{1\leqslant i\leqslant k}\ \sum_{|\alpha|\leqslant r}|C_\alpha^i u_1^{\alpha_1}\cdots u_k^{\alpha_k}|^2\mathrm{d}x\leqslant C\int\sum_{1\leqslant i\leqslant k}\ \sum_{|\alpha|\leqslant r}C_\alpha^i|u|^{2|\alpha|}\mathrm{d}x$$

我们能找到常数 C_1和 C_2，它们与 i 无关，使得

$$\sum_{|\alpha|\leqslant r}|C_\alpha^i||u|^{2|\alpha|}\leqslant C_1|u|^{2r}+C_2$$

因此

$$|R(u)| \leqslant C(|u|_{L^{2r}})^r + C|\Omega|$$

$$\begin{aligned}
&|(R(u), Au + u)| \leqslant \\
&|\int \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \sum_{|\alpha| \leqslant r} (C_\alpha^i u_1^{\alpha_1} \cdots u_k^{\alpha_k})(-\Delta u_i + u_i) \mathrm{d}x| \leqslant \\
&\sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \{\int \sum_{|\alpha| \leqslant r} |C_\alpha^i| |u|^{\alpha} |\Delta u_i| \mathrm{d}x + \int \sum_{|\alpha| \leqslant r} |C_\alpha^i| |u|^{|\alpha|-1} \mathrm{d}x\} \leqslant \\
&\sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \{\int (C_1 |u|^r |\Delta u_i| + C_2 |\Delta u_i|) \mathrm{d}x\} + \\
&\int (C_3 |u|^{r+1} + C_4) \mathrm{d}x\} \leqslant C_1(|u|_{L^{2r}})^r |Au| + \\
&C_2 |\Omega|^{\frac{1}{2}} |Au| + C_3(|u|_{L^{r+1}})^{r+1} + C_4 |\Omega| \qquad (3.3.30)
\end{aligned}$$

$n=1$或$n=2$维。此时有

$$|u|_{L^p} \leqslant C_p |u|_{H^1}, p \geqslant 1$$

因此，再利用 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}
&|(R(u), Au + u)| \leqslant C_1(C_{2r}|u|_1)^r |Au| + C_2|\Omega|^{\frac{1}{2}} |Au| + \\
&C_3(C_{r+1}|u|_1)^{r+1} + C_4|\Omega| \leqslant \varepsilon |Au|^2 + \\
&C(\frac{1}{\varepsilon})(|u|_1)^{2r} + |\Omega| + C(|u|_1)^{r+1} + C_4|\Omega|
\end{aligned}$$

由此可知条件(3.3.33)成立。此时$\gamma=r$，r为任何正整数。

$n \geqslant 3$维，我们有引理

引理3.3.1 存在σ和τ满足$1>\tau,\sigma \geqslant 0, r\sigma<1,(r+1)\tau<2$。使得

$$(|u|_{L^{2r}})^r \leqslant C(r,n,\Omega)(|Au|^2 + |u|^2)^{r\sigma/2}(|u|_1)^{r(1-\sigma)} \qquad (3.3.31)$$

$$1 \leqslant r < (n+2)/(n-2)$$

$$(|u|_{L^{r+1}})^{r+1} \leqslant C(r,n,\Omega)(|Au|^2 + |u|^2)^{(r+1)\tau/2}(|u|_1)^{(r+1)(1-\tau)}$$

$$1 \leqslant r < (n+6)/(n-2) \qquad (3.3.32)$$

证明 首先有嵌入定理$H^{\sigma+1}$嵌入到L^{2r}，当

$$\frac{1}{2r} \geqslant \frac{1}{2} - (1+\sigma)/n, 2r \leqslant 2n/(n-2(1+\sigma)) \qquad (3.3.33)$$

再用 $H^{1+\sigma}$ 由 H^1 与 H^2 作插值，而 $(|Au|^2+|u|^2)^{\frac{1}{2}}$ 是等价于 H^2 模。

$$|u|_{H^{1+\sigma}} \leqslant C(|u|_{H^2})^{\sigma}(|u|_{H^1})^{1-\sigma}$$

$$(|u|_{H^{1+\sigma}})^r \leqslant C(|Au|^2 + |u|^2)^{r\sigma/2}(|u|_{H^1})^{r(1-\sigma)}$$

使 $r\sigma<1$，即得

$$2r < 2n/(n-2)(1+\frac{1}{r})$$

$$r < (n+2)/(n-2)$$

式(3.3.31)得证。对于式(3.3.32)，由 Sobolev 嵌人定理，$H^{1+\tau}$ 嵌入 L^{r+1}，当

$$1/(r+1) \geqslant \frac{1}{2} - (1+\tau)/n \tag{3.3.34}$$

$$r+1 \leqslant 2n/(n-2(1+\tau))$$

再作 $H^{1+\tau}$ 再 H^1, H^2 之中的插值，有

$$(|u|_{H^{1+\tau}})^{1+r} \leqslant C(|Au|^2 + |u|^2)^{(r+1)\tau/2}(|u|_{H^1})^{(r+1)(1-\tau)}$$

取 $(r+1)\tau/2<1$，即 $(r+1)\tau<2$，代入式(3.3.34)得

$$r+1 < 2n/(n-2(1+\tau/(r+1)))$$

$$r < (n+6)/(n-2)$$

由此即得式(3.3.32)。利用引理3.3.1，可得

$$|(R(u), Au+u)| \leqslant$$

$$C(|Au|^2 + |u|^2)^{r\sigma/2}(|u|_1)^{r(1-\sigma)}|Au| + C_2|\Omega|^{\frac{1}{2}}|Au| +$$

$$C(|Au|^2 + |u|^2)^{(r+1)\tau/2}(|u|_1)^{(r+1)(1-\tau)} + C_4|\Omega|$$

$$|(R(u), Au+u)| \leqslant$$

$$\frac{C}{2}(|Au|^{r\sigma+1} + |u|^{r\sigma})(|u|_1)^{r(1-\sigma)} + C_2|\Omega|^{\frac{1}{2}}|Au| +$$

$$C(|Au|^{(r+1)\tau} + |u|^{(r+1)\tau})(|u|_1)^{(r-1)(1-\tau)} + C_4|\Omega|$$

由此可得

定理3.3.2 在空间一维或二维时，存在 θ_0，$|\theta_0|\leqslant\frac{\pi}{4}$ 和函数 $T_1 \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$，它依赖于 g 和空间维数，使得当对任何 t，

$|u(t)|_1$为有限时，则 u 具有 $D(A)$，解析拓展在如下复数区域上

$$\Delta = t + \Delta(|u(t)|_1)$$

且式(3.3.37)、(3.3.38)、(3.3.39)成立。在空间三维时，只要 $g(u)$的多项式次数为1,2,3或4。对于空间维数4或5，充分限制 r 为1或2。

例： Ginzburg-Landau 方程

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为有界开集，$n=1,2,3$；Ginzburg-Landau 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\nu + i\alpha)\Delta u + (k + i\beta)|u|^2 u - \gamma u = 0 \qquad (3.3.35)$$

$$u(0) = u_0 \qquad (3.3.36)$$

其中 $u(x,t)$为复值函数，$(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}_+$参数 $\nu,\alpha,k,\beta,\gamma$ 为实数，且 $\nu>0,k>0$。设有以下边界条件之一。

$$u(x,t) = 0, \forall x \in \partial\Omega, t \geqslant 0 \qquad (3.3.37)$$

$$u(\cdot,t) \text{ 为 } \Omega \text{ 周期}, \forall t \geqslant 0, \Omega = (0,L)^n \qquad (3.3.38)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = 0, \forall x \in \partial\Omega, t \geqslant 0 \qquad (3.3.39)$$

写式(3.3.35)为式(3.3.31)形式。$u=u_1+iu_2$，$A=-\Delta$，

$$D = \begin{pmatrix} \nu & -\alpha \\ \alpha & \nu \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} R_1(u) &= (u_1^2 + u_2^2)(ku_1 - \beta u_2) - \gamma u_1 \\ R_2(u) &= (u_1^2 + u_2^2)(ku_2 - \beta u_1) - \gamma u_2 \end{aligned}$$

现验证条件(3.3.33)满足

$$|(R(u), Au + u)| \leqslant$$

$$|(k + i\beta)|\left|\int \nabla(|u|^2 u + (|\gamma| + 1)u) \cdot \nabla u \mathrm{d}x\right| \leqslant$$

$$C|u|_{L^4}^2 |\nabla u|_{L^4}^2 + (|\gamma| + 1)\|u\|^2$$

当 $n=1,2,3$，$H^{\frac{3}{4}}$连续嵌入 L^4，而 $H^{\frac{3}{4}}$可由 L^2和 H^1插值，可得

$$|u|_{L^4} \leqslant C|u|^{\frac{1}{4}}(|u|_1)^{\frac{3}{4}} \qquad (3.3.40)$$

利用$(|Au|^2+|u|^2)^{\frac{1}{2}}$模和 H^2模的等价性，可得

$$|\nabla u|_{L^4} \leqslant C\|u\|^{\frac{1}{4}}(|Au|^2 + |u|^2)^{\frac{3}{8}} \qquad (3.3.41)$$

由式(3.3.40)和式(3.3.41)可得

$$|(R(u),Au+u)|\leqslant C|u|^{\frac{1}{2}}(|u|_1)^{\frac{3}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}(|u|^2+|Au|^2)^{\frac{3}{4}}+$$
$$(|\gamma|+1)\|u\|^2\leqslant\varepsilon|Au|^2+\varepsilon|u|^2+(\varepsilon)^{-3}C|u|^2\|u\|^2(|u|_1)^6+$$
$$(|\gamma|+1)\|u\|^2\leqslant\varepsilon|Au|^2+C(\varepsilon)^{-3}(|u|_1)^{10}+K$$

其中 $C=\max\ ((4\varepsilon)^{-1}C,|\gamma|+1)$。于是条件(3.3.33)满足，其中 $\gamma=5$。因此定理3.3.2.1成立。于是 Ginzburg-Landau 方程的两个实分量的解为 $D(A)$解析函数。由于当 $n=1,2$时，它在 V 中的吸收集的存在性。我们有

定理3.3.3 对于空间一维或者二维，存在 $d,\tau>0$，使得 Ginzburg-Landau 方程(3.3.35)初边值问题解的实和虚分量可在区域

$$\Delta_d=\{z\in\mathbf{C}\ \mathrm{Re}\ (z)>\tau,|\mathrm{Im}\ (z)|<d\}$$

上解析延拓，且式(3.3.37)～(3.3.39)在 Δ_d 上成立(特别 $t>\tau$)。对于空间三维，当$|u(t)|_1$为有限时，能得到该问题的解的实部和虚部在区域 $\Delta(|u(t)|_1)$上解析延拓。

下面介绍一下 Gevrey 正则类。设有$2p$ 阶正的线性自共轭的无界的齐次椭圆型算子 A。具有形式

$$A=\sum_{|\alpha|=p}a_\alpha D^{2\alpha}$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$。设 $\Omega=[0,2\pi]^n$ 具有周期边界条件。A 的傅氏变换 $\hat{A}$为正的齐次的$2p$ 次多项式。

$$C^{-1}|\xi|^{2p}\leqslant\hat{A}\ (\xi)\leqslant C|\xi|^{2p}\qquad(3.3.42)$$

A 的特征向量为指数函数$\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}\}_{j\in Z^n}$，它的特征值 $\{\lambda_j=\hat{A}(j)\}_{j\in Z^n}$

$$u=\sum u_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx},u_j=(u_j^1,\cdots,u_j^n)\in\mathbf{C}^n$$

$$|u|^2\stackrel{\text{def}}{=}(\frac{1}{2\pi})^n\sum|u_j|^2<\infty\qquad(3.3.43)$$

为简单计，设

$$\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x=0,\quad\forall t\geqslant 0,\text{对一切解 }u\qquad(3.3.44)$$

式(3.3.44)等价于条件 $u_0=0$。在 $D(A)$上，

$$|Au|^2=(\frac{1}{2\pi})^n\sum|\lambda_j|^2|u_j|^2$$

定义微分算子 $B=(-1)^p\Delta^p$，则 $\hat{B}(\xi)=|\xi|^{2p}$

$$|Bu|^2=(\frac{1}{2\pi})^n\sum|j|^{4p}|u_j|^2$$

因此，在式(3.3.42)中，令 $\xi=j$，则在 $D(A)$上有

$$C^{-1}|Bu|^2\leqslant|Au|^2\leqslant C|Bu|^2 \tag{3.3.45}$$

现对 $\tau>0$，定义函数的 Gevrey 类 $D(\exp(2B^{\frac{1}{2p}}))$：对于具形式(3.3.43)、(3.3.44)的函数，使得

$$|u|_\tau^2\equiv|\exp(\tau B^{\frac{1}{2p}})u|^2=(\frac{1}{2\pi})^n\sum e^{2\tau|j|}|u_j|^2<\infty \tag{3.3.46}$$

现考虑抽象初值问题(3.3.31)、(3.3.32)具有周期边界条件。且设非线性项 R 为$\{D^\alpha\}_{|\alpha|\leqslant d}$的多项式。因傅氏变换在 L^2中是等距的，因此存在一个函数 F，它仅依赖于 u 的傅氏系数 u_j 和 R 的多重指数 α_i，使得

$$(R(u),Au)=F(u_j,j^{\alpha j})$$

要求对于式(3.3.33)中的 γ，K 和 C，和任意 $\epsilon>0$，F 满足

$$|F(u_j,|j^{\alpha_i}|)|\leqslant\epsilon|Au|^2+C(\epsilon)\|u\|^{2\gamma}+K \tag{3.3.47}$$

对于条件(3.3.34)，置换为：存在常数 $M,\sigma>0$，使得 f 满足

$$|f(t)|_\sigma\leqslant M,\forall t\in\mathbf{R}. \tag{3.3.48}$$

定理3.3.4　设微分算子 A 满足以前的条件，初值 $u_0\in V$，f 满足式(3.3.48)，$R(u)$满足式(3.3.47)和式(3.3.34)。则存在 T_*，它仅依赖于初值$\|u_0\|$，和区域 $\Delta\supseteq(0,T_*)$在复平面上，使得如下成立：

(i) 存在问题(3.3.31)、(3.3.32)的唯一正则解 u，使得映照：$t\to[A^{\frac{1}{2}}\exp(\phi(t)B^{\frac{1}{2p}})]u$ 取值在 H 解析在$(0,T_*)\subset\Delta$ 上，$\phi(t)=\min(t,\sigma,T_*)$。

(ii) 如果问题(3.3.31)、(3.3.32)的解存在，在 V 中一致有界

$(t\in \mathbf{R}_+)$，则 u 取值在 $D(A^{\frac{1}{2}}\exp(\sigma B^{\frac{1}{2p}}))$ 中对 $t\in(0,\infty)$ 解析，Δ 包含 $(0,\infty)$。

为证定理3.3.4。先证如下引理：

引理 3.3.2 设 $u\in D(A^{\frac{1}{2}}e^{\tau B^{\frac{1}{2p}}})$，$\tau>0$，如果 R 满足式(3.3.47)，则有

$$|(R(u),Au)_\tau \leqslant \varepsilon(|Au|_\tau^2)+C(\varepsilon)|A^{\frac{1}{2}}u|_\tau^{2\gamma}+K,\quad \forall\varepsilon>0 \tag{3.3.49}$$

其中 γ,k,C 如同式(3.3.33)。

证明 令

$$u=\sum u_j e^{ijx}$$

$$u^*=\sum u_j^* e^{ijx}=\exp(\tau B^{\frac{1}{2p}}u)$$

其中

$$u_j^*=e^{\tau|j|}u_j,\ j\in Z^n$$

设

$$R(u)=\sum\prod_{k=1}^d D^{\alpha_k}u^{i_k}$$

其中：$\alpha_1,\cdots,\alpha_d$ 为任意多重指标；$i_1,\cdots,i_d$ 为1到 n 之间的整数。$u=(u^1,\cdots,u^n)$。我们有

$$(R(u),Au)_\tau=(R(u),\exp(2\tau B^{1/(2p)}Au)_\tau$$

$$(R(u),Au)_\tau=\int_\Omega\left(\prod_{k=1}^d\sum_{j_k\in Z^n}u_{j_k}^{i_k}j_k^{\alpha_k}e^{ij_kx}\right)\times$$

$$\left(\sum_{j_0\in Z^n}\overline{u}_{j_0}^{i_0}\lambda_{j_0}e^{2\tau|j_0|}e^{-ij_0x}\right)dx$$

这个积分为零，由指数函数的性质，除非

$$-j_0+j_1+j_2+\cdots+j_k=0$$

此时积分值为 $(2\pi)^n$。因此

$(R(u),Au)_\tau=$

$$(2\pi)^n\sum\sum_{j_1+\cdots+j_d=j_0}u_{j_d}^{i_1}\cdots u_{j_d}^{i_d}\ \overline{u}_{j_0}^{i_0}j_1^{\alpha_d}\cdots j_d^{\alpha_d}\lambda_{j_0}e^{2\tau j_0}$$

$$|(R(u),Au)_\tau| \leqslant (2\pi)^n \sum \sum_{j_1+\cdots+j_d=j_0} |u_{j_0}^{*i_0}|\cdots|u_{j_d}^{*i_d}| \times$$

$$|j_1^{\alpha_1}|\cdots|j_d^{\alpha_d}|\lambda_{j_0} e^{\tau(|j_0|-|j_1|-\cdots-|j_d|)}$$

但 $|j_0|=|j_1+j_2+\cdots+j_k|\leqslant|j_1|+\cdots+|j_k|$，此时 $\exp(\tau(|j_0|-|j_1|-\cdots-|j_d|)\leqslant 1$。我们得到

$$|(R(u),Au)_\tau| \leqslant (2\pi)^n \sum \sum_{j_1+\cdots+j_d=j_0} |u_{j_0}^{*i_0}|\cdots|u_{j_d}^{i_d}|\cdots|j_d^{\alpha_d}\ \lambda_{j_0}$$

其中 $u^*=\exp(\tau B^{\frac{1}{2p}})u$。于是我们建立了

$$|(R(u),Au)_\tau| \leqslant |F(|u_j^*|,|j^{\alpha_j}|)| \leqslant$$

$$\varepsilon|Au^*|^2 + C(\varepsilon)|A^{\frac{1}{2}}u^*|^{2\gamma} + R$$

这就完成了引理3.3.2的证明。

现利用引理3.3.2来证明定理3.3.4。证明的框架如同定理3.3.1，关键在于得到先验估计。首先，复化方程(3.3.31)，令 $\phi(t)=\min(t,\sigma)$，$z=se^{i\theta}$，$s>0$，$\cos\theta>0$，$E_s=\exp(\phi(s\cos\theta)B^{\frac{1}{2p}})$，$\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$。作式(3.3.31)和 $Au(se^{i\theta})$ 在 $D(E_s)$ 中的内积，再乘以 $e^{i\theta}$，取实部，可得

$$\mathrm{Re}\ e^{i\theta}[(E_s\frac{\partial u}{\partial t}(se^{i\theta}),E_sAu(se^{i\theta}))+(E_sDAu,E_sAu)+$$

$$(E_sR(u),E_sAu)]=\mathrm{Re}\ e^{i\theta}(E_sf,E_sAu) \tag{3.3.50}$$

利用关系 $\frac{d}{ds}=e^{-i\theta}\frac{d}{dz}$，可得

$$\mathrm{Re}\ e^{i\theta}\{(E_s\frac{\partial u}{\partial t}(se^{i\theta}),E_sAu(se^{i\theta}))\}=\mathrm{Re}\ (A^{\frac{1}{2}}\frac{d}{ds}(E_su(se^{i\theta}))-$$

$$\phi'(s\cos\theta)(\cos\theta)E_sAu(se^{i\theta}),E_sA^{\frac{1}{2}}u(se^{i\theta}))=$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}|A^{\frac{1}{2}}u(se^{i\theta})|^2_{\phi(s\cos\theta)}-$$

$$(\cos\theta)\phi'(s\cos\theta)|Au|_{\phi(s\cos\theta)}|A^{\frac{1}{2}}u|_{\phi(s\cos\theta)}\geqslant$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}|A^{\frac{1}{2}}u(se^{i\theta})|^2_{\phi(s\cos\theta)}-\alpha_0\cos\theta/4|Au|^2_{\phi(s\cos\theta)}-$$

$$(\cos\theta/\alpha_0)|A^{\frac{1}{2}}u(se^{i\theta})|^2_{\phi(s\cos\theta)} \tag{3.3.51}$$

如前估计有

$$\text{Re } e^{i\theta}(E_sDAu, E_sAu) \geqslant \cos\theta\alpha_0|Au|^2_{\phi(s\cos\theta)} - |\sin\theta|\|D\|_*|Au|^2_{\phi(s\cos\theta)}$$

限制 θ 满足式(3.3.51)可得

$$\text{Re } e^{i\theta}(E_sDAu, E_sAu) \geqslant (\frac{3}{4})\cos\theta\alpha_0|Au|^2_{\phi(s\cos\theta)} \tag{3.3.52}$$

将式(3.3.51)、(3.3.52)代入式(3.3.50)，ϕ 代替 $\phi(s\cos\theta)$ 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|u\|^2_\phi + (\alpha_0\cos\theta)/2|Au|^2_\phi \leqslant |(f, Au)_\phi| + |(R(u), Au)_\phi| \tag{3.3.53}$$

对 $|(f,Au)_\phi|$ 作如引理3.3.1的处理，即得不等式

$$\frac{d}{ds}\|u(se^{i\theta})\|^2_\phi + C_1|Au(se^{i\theta})|^2_\phi \leqslant C_2 + C_3|u(se^{i\theta})|^{2\gamma}_\phi \tag{3.3.54}$$

其中常数 C_2,C_3 仅依赖于初值，与 θ 无关。令

$$y(s) = 1 + |E_sA^{\frac{1}{2}}u(se^{i\theta})|^2 \tag{3.3.55}$$

$$y'(s) \leqslant C_4y^\gamma(s) \tag{3.3.56}$$

可得

$$|E_sA^{\frac{1}{2}}u(se^{i\theta})|^2 \leqslant 2 + 2|A^{\frac{1}{2}}u_0|^2 \tag{3.3.57}$$

区域 $\Delta(\|u_0\|)$ 为

$$0 \leqslant s \leqslant T_1(\|u_0\|) = y(0)^{1-\gamma}(1-(\frac{1}{2})^{\gamma-1})/((\gamma-1)C_4),$$

$$|\theta| \leqslant \min\ (\arctan(\alpha_0/4\|D\|_*), \frac{\pi}{4}) \tag{3.3.58}$$

因此，若 $u_0 \in D(A^{\frac{1}{2}})$，则 $u(se^{i\theta}) \in D(E_sA^{\frac{1}{2}})$ 在角状区域 $\Delta(\|u_0\|)$ 上。如果 $\|u\| \leqslant M, t \in \mathbf{R}_+$，则 $\Delta(\|u_0\|)$ 可延拓为 $\Delta = \bigcup_{t>0}(t + \Delta(M))$。

同样对于任何紧集 $K\subset\Delta$,有以下不等式

$$\sup_{z\in K}\|(\frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d}z^k}(se^{i\theta})\|_\phi\leqslant 2^{\frac{1}{2}}(2/d)^k(k!)(1+\|u_0\|^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$d=\mathrm{dist}\ (K,\partial\Delta) \tag{3.3.59}$$

$$\sup_{z\in K}|Au(se^{i\theta})|_\phi\leqslant T_2(K)<\infty \tag{3.3.60}$$

$$\sup_{z\in K}|A(\frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d}z^k}(se^{i\theta})|_\phi\leqslant 2^k(k!)[d(K,\partial\Delta(u_0)]^{-k}T_2(K') \tag{3.3.61}$$

其中

$$K'\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\{z\in\Delta(u_0)\,|\,d(z,\partial\Delta(u_0))\geqslant\frac{1}{2}d(K,\partial\Delta(u_0))\}$$

附注1. 如果解 u 在 V 中一致有界于(M($\forall t>0$),则从式(3.3.57)有

$$|E_t A^{\frac{1}{2}}u(t)|^2\leqslant 2+2M^2 \tag{3.3.62}$$

特别由 E_t 的定义有

$$|u_j(t)|^2\leqslant(2+2M^2)\lambda_j^{-1}e^{-2|j|\phi(t)} \tag{3.3.63}$$

这表明傅氏系数依指数衰减。

附注2. α 为给定多重指标,则

$$|D^\alpha u|\leqslant(\frac{1}{2\pi})^n\sum_{j\in Z^n}|j^\alpha|^2|u_j|^2$$

$$|u|_\tau^2=(\frac{1}{2\pi})^n\sum_j e^{2\tau|j|}|u_j|^2$$

又存在常数 $M(\alpha,\tau)>0$,使得

$$|j^\alpha|\leqslant e^{2|j|},j\in Z^n,|j|\geqslant M$$

由此可看出,如果 $|u|_\tau<\infty$,(对于某个 $\tau>0$),则 $|D^\alpha u|<\infty$。因此 Gevrey 类函数被包含在 $C^\infty(\Omega)$中。

3.4 二维 Ginzburg-Landau 方程

1996年,郭、王在文献[130]中考虑二维 Ginzburg-Landau 方

程解的时间解析性、Gevrey 正则性以及近似惯性流形。

设有如下的 Ginzburg-Landau 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \rho u + (1 + \mathrm{i}\nu)\Delta u - (1 + \mathrm{i}\mu)|u|^{2\sigma}u + \alpha\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|u|^2 u) +$$

$$\beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u)|u|^2, (x,t) \in \Omega \times \mathbf{R}^+ \tag{3.4.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega \tag{3.4.2}$$

$$u \text{ 为 } \Omega \text{ 周期的}, \Omega = (0,L_1) \times (0,L_2) \tag{3.4.3}$$

其中 u 为未知复值函数，$\sigma \in N$，$\rho > 0$，μ, α, β 为实常数，$\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2$ 为实向量。

在文献[25]中，已经证明：如 $u_0 \in H^2(\Omega)$，且存在 $\delta > 0$，使得

$$2 < \sigma \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\mu - \nu\delta^2}{1 + \delta^2})^2} - 1}, \sigma \in N \tag{3.4.4}$$

其中 N 为自然数。则存在问题(3.4.1)～(3.4.3)的唯一整体解 $u(x,t)$。

$$u(x,t) \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^3(\Omega)), \forall T > 0 \tag{3.4.5}$$

且存在常数 K，它依赖于参数资料$(\sigma,\rho,\nu,\mu,\alpha,\beta,\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2,\delta,\Omega)$，使得

$$\|u(t)\|_{H^1} \leqslant K_1, \forall t \geqslant t_1 \tag{3.4.6}$$

其中 t_1 依赖参数资料$(\sigma,\rho,\nu,\mu,\alpha,\beta,\lambda_1,\lambda_2,\delta,\Omega)$和 $\mathbf{R}$，$\|u_0\|_{H^1} \leqslant \mathbf{R}$。

令 $u(t) = u_1(t) + \mathrm{i}u_2(t)$，$u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 为实函数，则在式(3.4.1)中分别取实部和虚部可得

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \rho u_1 + \Delta u_1 - \nu\Delta u_2 - |u|^{2\sigma}(u_1 - \mu u_2) +$$

$$\alpha\boldsymbol{\lambda}_1 \cot \nabla(|u|^2 u_1) + \beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u_1)|u|^2 \tag{3.4.7}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \rho u_2 + \Delta u_2 + \nu\Delta u_1 - |u|^{2\sigma}(u_2 + \mu u_1) +$$

$$\alpha\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|u|^2 u_2) + \beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u_2)|u|^2 \tag{3.4.8}$$

为简单计，以 $u(t)$ 表示向量$(u_1(t),u_2(t))$，则式(3.4.7)、(3.4.8)

可写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \rho u + D\Delta u - D_1 |u|^{2\sigma} u + \alpha \boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|u|^2 u) +$$

$$\beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u)|u|^2$$

其中

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -\nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ \mu & 1 \end{pmatrix}$$

即有

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + DAu(t) + R(u(t), u(t), u(t)) = 0 \quad (3.4.9)$$

其中 $A = -\Delta$ 为无界自共轭算子，$D(A) = \{u \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$：$u$ 满足(3.4.3)$\}$，

$$R(u, v, w) = -\rho w + D_1(u \cdot v)^\sigma w - \alpha \boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla((u \cdot v)w) -$$

$$\beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla w)(u \cdot v) \quad (3.4.10)$$

$R: D(A) \times D(A) \times D(A) \to \mathscr{H} = H \times H$，对 $R(u, v, w)$ 可作如下估计。

引理3.4.1 设 $u, v, w \in D(A)$，则 $R(u, v, w) \in \mathscr{H}$，且

$$\|R(u, v, w)\| \leqslant \rho \|w\| + C\|u\|_{H^1}^\sigma \|v\|_{H^1}^\sigma \|w\|_{H^1} +$$

$$C\|w\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|Aw\|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} +$$

$$C\|w\|_{H^1} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

于此和今后，用 C 和 $C_i (i = 1, 2, \cdots)$ 表示任何仅依赖于参数 $(\sigma, \rho, \nu, \mu, \alpha, \beta, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \delta, \Omega)$ 的常数。

证明 从式(3.4.10)可得

$$\|R(u, v, w)\| \leqslant \rho \|w\| + \|D_1(u \cdot v)^\sigma w\| +$$

$$\|\alpha \boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla((u, v)w)\| + \|\beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla w)(u \cdot v)\|$$

$$(3.4.11)$$

$$D_1(u \cdot v)^\sigma w\| = \sqrt{1 + \mu^2} \left(\int_\Omega |u|^{2\sigma} |v|^{2\sigma} |w|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\sqrt{1 + \mu^2} \|u\|_{8\sigma}^\sigma \|v\|_{8\sigma}^\sigma \|w\|_4 \leqslant C_1 \|u\|_{H^1}^\sigma |v\|_{H^1}^\sigma \|w\|_{H^1} \quad (3.4.12)$$

$$\|\beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla w)(u\cdot v)\|\leqslant|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|\left(\int_\Omega|\nabla w|^2|u|^2|v|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\beta\boldsymbol{\lambda}_2\|\nabla w\|_4\|u\|_8\|v\|_8\leqslant C\|\nabla w\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla w\|^{\frac{1}{2}}_{H^1}\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}\leqslant$$

$$C\|w\|^{\frac{1}{2}}_{H^1}\|w\|^{\frac{1}{2}}_{H^2}\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}\leqslant$$

$$C\|w\|^{\frac{1}{2}}_{H^1}(\|w\|+\|Aw\|)^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}\leqslant$$

$$C\|w\|^{\frac{1}{2}}_{H^1}(\|w\|^{\frac{1}{2}}+\|Aw\|^{\frac{1}{2}})\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}\leqslant$$

$$C_2\|w\|^{\frac{1}{2}}_{H^1}\|Aw\|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}+$$

$$C_3\|w\|_{H^1}\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}\tag{3.4.13}$$

因 $\alpha\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla((u\cdot v)w)=\alpha(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla w)(u\cdot v)+\alpha(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla u)(v\cdot w)+\alpha(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla v)(u\cdot w)$类似于式(3.4.13)可得

$$\|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla((u\cdot v)w)\|\leqslant$$

$$C_4\|w\|^{\frac{1}{2}}_{H^1}\|Aw\|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}+$$

$$C_5\|u\|^{\frac{1}{2}}_{H^1}\|Au\|^{\frac{1}{2}}\|v\|_{H^1}\|w\|_{H^1}+$$

$$C_6\|v\|^{\frac{1}{2}}_{H^1}\|Av\|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^1}\|w\|_{H^1}+$$

$$C_7\|w\|_{H^1}\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}\tag{3.4.14}$$

引理3.4.1由式(3.4.11)～(3.4.14)推得。作为引理3.4.1的推论，有

$$\|R(u,u,u)\|\leqslant\rho\|u\|_{H^1}+C_1\|u\|^{2\sigma+1}_{H^1}+$$

$$C_8\|u\|^{\frac{5}{2}}_{H^1}\|Au\|^{\frac{1}{2}}+C_9\|u\|^3_{H^1}\tag{3.4.15}$$

由此可得

$$|(R(u,u,u),Au+u)|\leqslant\|R(u)\|\|Au\|$$

$$+\|R(u)\|\|u\|\leqslant\|R(u)\|\|Au\|+\|R(u)\|\|u\|_{H^1}\leqslant$$

$$\rho\|u\|_{H^1}\|Au\|+C_1\|u\|^{2\sigma+1}_{H^1}\|Au\|+C_8\|u\|^{\frac{5}{2}}_{H^1}\|Au\|^{\frac{3}{2}}+$$

$$C_9\|u\|^3_{H^1}\|Au\|+\rho\|u\|^2_{H^1}+C_1\|u\|^{2\sigma+2}_{H^1}+$$

$$C_8\|u\|_{H^1}^{\frac{7}{2}}\|Au\|^{\frac{1}{2}} + C_9\|u\|_{H^1}^4 \leqslant$$

$$\varepsilon\|Au\|^2 + C_{10}(\varepsilon)\|u\|_{H^1}^{4\sigma-2} + C_{11}, \forall \varepsilon > 0 \tag{3.4.16}$$

从式(3.4.16)和式(3.4.6)可得

定理3.4.1 设式(3.4.4)成立。$u \in H^2(\Omega)$，则存在 θ_0 和 T_0 使得问题(3.4.1)、(3.4.2)的解的每一个分量具有 $D(A)$ 值的解析延拓在以下复区域

$$\Delta_1 = \{t + se^{i\theta}: t \geqslant t_1, |\theta| \leqslant \theta_0, 0 \leqslant s \leqslant T_0\}$$

其中：t_1 在式(3.4.6)确定；θ_0 和 T_0 依赖于初值和 $|\theta_0| \leqslant \frac{\pi}{4}$。此外，存在常数 K 依赖于初值，使得

$$\|u(z)\|, \|A^{\frac{1}{2}}u(z)\|, \|Au(z)\| \leqslant K, \quad \forall z \in \Delta_2 \tag{3.4.17}$$

其中 $\Delta_2 = \{z: \mathrm{Re}\ z \geqslant a, |\mathrm{Im}\ z| \leqslant b\}$，$a, b$ 为依赖于初值和 R 的常数，$\|u_0\|_{H^1} \leqslant R$。

证明 注意到式(3.4.16)和式(3.4.6)推出文献[132]中的定理1.1条件满足，则由该定理1.1可得本定理。

由定理3.4.1和 Cauchy 公式可得

命题3.4.1 设式(3.4.4)成立，$u_0 \in H^2(\Omega)$，则有

$$\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\|, \|A^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\|, \|A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\| \leqslant K_2, \quad \forall t \geqslant t_2$$

其中常数 K_2 依赖于初值，$t_2 > t_1$ 依赖于初值和 R，$\|u_0\|_{H^1} \leqslant R$。

以下构造问题(3.4.1)～(3.4.3)的近似惯性流形。首先我们知道，由 $A = -\Delta$ 的特征向量所组成的在 H 中的正交基 $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$，使得

$$Aw_j = \lambda_j w_j, 0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_j \to \infty, j \to \infty$$

给定 m，$P = P_m: H \to$ 子空间 $\{w_1, \cdots, w_m\}$ 的正交投影。$Q = Q_m = I - P_m$。P_m，Q_m 作用于式(3.4.9)，有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + DAp + P_m R(p + q, p + q, p + q) = 0 \tag{3.4.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + DAq + Q_m R(p+q, p+q, p+q) = 0$$

$$(3.4.19)$$

其中 $p=P_m u, q=Q_m u$，且有

$$\|A^\gamma p\| \leqslant \lambda_m^\gamma \|p\|, \gamma > 0, p \in P_m D(A^\gamma) \qquad (3.4.20)$$

$$\|A^\gamma q\| \geqslant \lambda_{m+1}^\gamma \|q\|, \gamma > 0, q \in Q_m D(A^\gamma) \qquad (3.4.21)$$

$$\|A^{\frac{1}{2}} u\| = \|\frac{\partial u}{\partial x}\|, \quad u \in H^1(\Omega) \qquad (3.4.22)$$

$$\|P_m u\| \leqslant \|u\|, \|Q_m u\| \leqslant \|u\|, \quad \forall u \in H \qquad (3.4.23)$$

由式(3.4.7)和命题3.4.1得

$$\|Au(t)\| \leqslant C, \|A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\| \leqslant C, \quad \forall t \geqslant t_* \qquad (3.4.24)$$

于此 C 和 t_* 类似于命题3.4.1，式(3.4.21)、(3.4.23)和式(3.4.24)推出

$$\|q(t)\| \leqslant C\lambda_{m+1}^{-1}, \|A^{\frac{1}{2}} q(t)\| \leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}},$$

$$\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q(t)\| \leqslant C\lambda_{m+1}^{-1}, \quad \forall t > t_* \qquad (3.4.25)$$

现来构造问题(3.4.1)～(3.4.3)的近似惯性流形。为此定义映照 $\Phi: P_m H \to Q_m H$ 使得 $\forall p \in P_m H, \Phi(p) = \Psi$ 由下式给定

$$DA\Psi + Q_m R(p, p, p) = 0 \qquad (3.4.26)$$

令 $\sum = \mathrm{graph}\ (\Phi)$，我们证明 $\sum$ 为一个近似惯性流形。我们有

定理3.4.2 设式(3.4.4)成立，且 $u_0 \in H^2(\Omega)$，则存在常数 K 依赖于初值，使得

$$\mathrm{dist}_H(u(t), \sum) \leqslant K\lambda_{m+1}^{\frac{3}{2}}, t \geqslant t_* \qquad (3.4.27)$$

其中 $u(t)$ 为问题(3.4.1)～(3.4.3)的解，t_* 依赖于初值和 R，$\|u_0\|_{H^1} \leqslant R$。

证明 由式(3.4.19)和式(3.4.26)可得

$$D(A\Psi - Aq) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + Q_m R(u) - Q_m R(p) \quad (3.4.28)$$

$$R(u) - R(p) = -\rho q + D_1|u|^{2\sigma}u - D_1|p|^{2\sigma}p -$$
$$a\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|u|^2u) + a\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|p|^2p) -$$
$$\beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u)|u|^2 + \beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla p)|p|^2 \tag{3.4.29}$$

估计式(3.4.29)中的每一项，$f(s)=s^{2\sigma}$，ξ 在 $|u|$ 和 $|p|$ 之间。

$$\|D_1|u|^{2\sigma}u - D_1|p|^{2\sigma}p\| \leqslant \|D_1(|u|^{2\sigma} - |p|^{2\sigma})u\| +$$
$$\|D_1|p|^{2\sigma}(u-p)\| \leqslant \sqrt{1+\mu^2}\|u\|_\infty\||u|^{2\sigma} -$$
$$|p|^{2\sigma}\| + \sqrt{1+\mu^2}\|p\|_\infty^{2\sigma}\|q\| \leqslant$$
$$\sqrt{1+\mu^2}\|u\|_\infty\|f'(\xi)(|u| - |p|)\| +$$
$$\sqrt{1+\mu^2}\|p\|_\infty^{2\sigma}\|q\| \leqslant \sqrt{1+\mu^2}\|u\|_\infty\|f'(\xi)\|_\infty\|q\| +$$
$$\sqrt{1+\mu^2}\|p\|_\infty^{2\sigma}\|q\| \tag{3.4.30}$$

式(3.4.17)和下式

$$C_1\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant \|u\| + \|\Delta u\| \leqslant C_2\|u\|_{H^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H^2(\Omega)$$

推出

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant C, \quad \forall t \geqslant t_* \tag{3.4.31}$$

其中 t_* 依赖于初值和 R，$\|u_0\|_{H^1} \leqslant R$。由此

$$\|u\|_\infty \leqslant C\|u\|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{H^2(\Omega)} \leqslant C, \quad \forall t \geqslant t_* \tag{3.4.32}$$

类似

$$\|p\|_\infty \leqslant C_2\|p\|^{\frac{1}{2}}\|p\|^{\frac{1}{2}}_{H^2(\Omega)} \leqslant$$
$$C_2\|p\|^{\frac{1}{2}}(\|p\| + \|\Delta p\|)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$C_2\|u\|^{\frac{1}{2}}(\|u\| + \|Au\|)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_3 \tag{3.4.33}$$

由式(3.4.32)和式(3.4.33)得

$$\|\xi\|_\infty \leqslant \|p\|_\infty + \|u\|_\infty \leqslant C, \quad \forall t \geqslant t_* \tag{3.4.34}$$

由式(3.4.30)、(3.4.32)～(3.4.34)推得

$$\|D_1|u|^{2\sigma}u - D_1|p|^{2\sigma}p\| \leqslant C_5\|q\| \tag{3.4.35}$$

$$\|\beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u)|u|^2 - \beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla p)|p|^2\| \leqslant$$

$$\|\beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot(\nabla u-\nabla p)|u|^2\|+$$

$$\|\beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla p)(|u|^2-|p|^2)\|\leqslant$$

$$|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|\|u\|_\infty^2\|\nabla q\|+\|\beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla p)(u+p)(u-p)\|\leqslant$$

$$|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|\|u\|_\infty^2\|\nabla q\|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|\|u+p\|_\infty\left(\int_\Omega(\nabla p)^2|q|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$C_6\|\nabla q\|+C_7\|\nabla p\|_4\|q\|_4\leqslant C_6\|\nabla q\|+$$

$$C_8\|\nabla p\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla p\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}\|q\|_{H^1}\leqslant C_6\|A^{\frac{1}{2}}q\|-$$

$$C_8\|A^{\frac{1}{2}}u\|^{\frac{1}{2}}(\|A^{\frac{1}{2}}p\|+\|Ap\|)^{\frac{1}{2}}(\|q\|+\|A^{\frac{1}{2}}q\|)\leqslant$$

$$C_6\|A^{\frac{1}{2}}q\|+C_8\|A^{\frac{1}{2}}u\|^{\frac{1}{2}}(\|A^{\frac{1}{2}}u\|+$$

$$\|Au\|)^{\frac{1}{2}}(\|q\|+\|A^{\frac{1}{2}}q\|)\leqslant C_9\|q\|+C_{10}\|A^{\frac{1}{2}}q\| \tag{3.4.36}$$

$$\alpha\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u|^2u)=\alpha(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla u)|u|^2+2\alpha(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla u)uu \tag{3.4.37}$$

利用式(3.4.37)，类似于式(3.4.36)，可得

$$\|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u|^2u)-\alpha\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|p|^2p)\|\leqslant$$

$$C_{11}\|q\|+C_{12}\|A^{\frac{1}{2}}q\| \tag{3.4.38}$$

由式(3.4.29)、(3.4.35)、(3.4.36)和式(3.4.38)可知存在常数 C，使得

$$\|R(u)-R(p)\|\leqslant C\|q\|+C\|A^{\frac{1}{2}}q\| \tag{3.4.39}$$

由式(3.4.28)和式(3.4.39)可得

$$\|D(A\Psi-Aq)\|\leqslant\left\|\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right\|+\|R(u)-R(p)\|\leqslant$$

$$C\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}+C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\leqslant C\lambda_2^{-\frac{1}{2}}\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}+C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} \tag{3.4.40}$$

由关系式

$$\|D(A\Psi-Aq)\|=\sqrt{1+\nu^2}\|A\Psi-Aq\|\geqslant$$

$$\sqrt{1+\nu^2}\lambda_{m+1}\|\Psi-q\| \tag{3.4.41}$$

再由式(3.4.40)和式(3.4.41)可知

$$\|\Psi - q\| \leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{3}{2}}, \forall t \geqslant t_* \tag{3.4.42}$$

其中 t_* 如同式(3.4.31),可知

$$d_H(u(t),\Sigma) \leqslant \|u(t) - (p(t) + \Phi(p(t)))\| =$$

$$\|\Psi(t) - q(t)\| \leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{3}{2}}$$

定理3.4.2证毕。

现考虑问题(3.4.1)~(3.4.3)解的Gevrey正则性,用此改善近似惯性流形的收敛速度。设 $\Omega=(0,2\pi)^2$,且

$$\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x = 0, \quad \forall t > 0 \tag{3.4.43}$$

引理3.4.2 设 $u,v,w \in D(\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A)$,$\tau>0$。则对 $R(u,v,w)$ 有如下估计

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}R(u,v,w),\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Ay) \leqslant \rho\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}w\|\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Ay\| + \\
&C\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u\|^\sigma\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}v\|^\sigma\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}w\|\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Ay\| + \\
&C\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u\|\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}v\|\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}w\|^{\frac{1}{2}} \times \\
&\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Aw\|^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Ay\| + \\
&C\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u\|^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Au\|^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}v\| \times \\
&\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}w\|\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Ay\| + \\
&C\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u\|\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}v\|\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Av\|^{\frac{1}{2}} \times \\
&\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}w\|\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Ay\|
\end{aligned}$$

证明 令

$$u = \sum_{j\in Z^2}u_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}, u^* = \mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}u = \sum_{j\in Z^2}u_j^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}, u_j^* = \mathrm{e}^{\tau|j|}u_j \tag{3.4.44}$$

$$v = \sum v_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}, v^* = \mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}v = \sum v_j^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}, v_j^* = \mathrm{e}^{\tau|j|}v_j \tag{3.4.45}$$

$$w = \sum_{j\in Z^2} w_j e^{ijx}, w^* = e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} w = \sum_{j\in Z^2} w_j^* e^{ijx}, w_j^* = e^{\tau|j|} w_j \quad (3.4.46)$$

$$y = \sum_{j\in Z^2} y_j e^{ijx}, y^* = e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} y = \sum_{j\in Z^2} y_j^* e^{ijx}, y_j^* = e^{\tau|j|} y_j \quad (3.4.47)$$

我们有

$$\begin{aligned}(R(u,v,w),y) = & -\rho(w,y) + ((u,v)^\sigma D_1 w, y) - \\ & (\alpha\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(u,v)w, y) - \\ & \beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla w)(u \cdot v), y) \end{aligned} \quad (3.4.48)$$

估计式(3.4.48)中的每一项。

$$-\rho(w,y) = -\rho\int_\Omega \sum_l w_l e^{ilx} \cdot \sum_s \bar{y}_s e^{-isx} dx = 4\pi^2\rho \sum_{l=s} w_l \bar{y}_s \quad (3.4.49)$$

$$((u,v)^\sigma D_1 w, y) =$$

$$\int_\Omega (\sum_{j_1} u_{j_1} e^{ij_1x} \cdot \sum_{k_1} v_{k_1} e^{ik_1x}) \cdots (\sum_{j_\sigma} u_{j_\sigma} e^{ij_\sigma x} \cdot \sum_{k_\sigma} v_{k_\sigma} e^{ik_\sigma x}) \times$$

$$(D_1 \sum_l w_l e^{ilx} \cdot \sum_s \bar{y}_s e^{-isx}) dx =$$

$$4\pi^2 \sum_{j_1+k_1+\cdots+j_\sigma+k_\sigma+l=s} (u_{j_1} \cdot v_{k_1}) \cdots (u_{j_\sigma} \cdot v_{k_\sigma})(D_1 w_l \cdot \bar{y}_s), \quad (3.4.50)$$

$$-(\beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla w)(u,v),y) = -\beta\int_\Omega (u \cdot v)(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla w)\bar{y} dx =$$

$$-\beta\int_\Omega (\sum_j u_j e^{ijx} \cdot \sum_k v_k e^{ikx}) \times$$

$$(\sum_l (\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot il) w_l e^{ilx} \cdot \sum_s \bar{y}_s e^{-isx}) dx =$$

$$-4\pi^2\beta \sum_{j+k+l=s} (u_j \cdot v_k)(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot il)(w_l \cdot \bar{y}_s) \quad (3.4.51)$$

$$\begin{aligned} -\alpha(\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla((u \cdot v)w), y) = & -\alpha((\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla w)(u \cdot v), y) - \\ \alpha((\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla u)w, y) & - \alpha(((\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla v)u)w, y) \end{aligned} \quad (3.4.52)$$

类似于式(3.4.51),可得

$$-\alpha((\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla w)(u \cdot v), y) =$$

$$-4\pi^2\alpha \sum_{j+k+l=s} (u_j \cdot v_k)(\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot il)(w_l \cdot \bar{y}_s) \quad (3.4.53)$$

$$-\alpha(((\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla u)v)w,y)=$$

$$-4\pi^2\alpha\sum_{j+k+l=s}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot \mathrm{i}j)(u_j\cdot v_k)(u_l\cdot \bar{y}_s)=$$

$$-\alpha\int_\Omega\Big(\sum_j(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot \mathrm{i}j)u_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}\cdot\sum_k v_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\Big)\times$$

$$\Big(\sum_l w_l\mathrm{e}^{\mathrm{i}lx}\sum_s\bar{y}_s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}\Big)\mathrm{d}x \qquad (3.4.54)$$

类似地

$$-\alpha((((\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla v)u)w,y)=$$

$$-4\pi^2\alpha\sum_{j+k+l=s}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot \mathrm{i}k)(u_j\cdot v_k)(w_l\cdot\bar{y}_s) \qquad (3.4.55)$$

由式(3.4.48)～(3.4.55)可得

$$((R(u,v,w),y)=-4\pi^2\rho\sum_{l=s}w_l\cdot\bar{y}_s+$$

$$4\pi^2\sum_{j_1+k_1+\cdots+j_\sigma+k_\sigma+l=s}(u_{j_1}\cdot v_{k_1})\cdot(u_{j_\sigma}\cdots v_{k_\sigma})(D_1w_l\cdot\bar{y}_s)-$$

$$4\pi^2\alpha\sum_{j+k+l=s}(u_j\cdot v_k)(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot \mathrm{i}l)(w_l\cdot\bar{y}_s)-$$

$$4\pi^2\alpha\sum_{j+k+l=s}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot \mathrm{i}j)(u_j\cdot v_k)(w_l\cdot y_s)-$$

$$4\pi^2\alpha\sum_{j+k+l=s}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot \mathrm{i}k)(u_j\cdot v_k)(w_l\cdot\bar{y}_s)-$$

$$4\pi^2\beta\sum_{j+k+l=s}(u_j\cdot v_k)(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot \mathrm{i}l)(w_l\cdot\bar{y}_s) \qquad (3.4.56)$$

$$(\mathrm{e}^{\tau A^{\frac12}}R(u,v,w),\mathrm{e}^{\tau A^{\frac12}}Ay)=(R(u,v,w),\mathrm{e}^{2\tau A^{\frac12}}Ay)=$$

$$-4\pi^2\rho\sum_{l=s}(w_l^*\cdot\bar{y}_s^*)|s|^2+$$

$$4\pi^2\sum_{j_1+k_1+\cdots+j_\sigma+k_\sigma+l=s}(u_{j_1}^*\cdot v_{k_1}^*)\cdots(u_{j_\sigma}^*\cdot v_{k_\sigma}^*)\times$$

$$(D_1w_l^*\cdot\bar{y}_s^*)|s|^2\mathrm{e}^{\tau(|s|-|j_1|-|k_1|-\cdots-|j_\sigma|-|k_\sigma|-|l|)}-$$

$$4\pi^2\alpha\sum_{j+k+l=s}(u_j^*\cdot v_k^*)(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot \mathrm{i}l)(w_l^*\cdot\bar{y}_s^*)|s|^2\mathrm{e}^{\tau(|s|-|j|-|k|-|l|)}-$$

$$4\pi^2\alpha\sum_{j+k+l=s}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot \mathrm{i}j)(u_j^*\cdot v_k^*)(w_l^*\cdot\bar{y}_s^*)|s|^2\mathrm{e}^{\tau(|s|-|j|-|k|-|l|)}-$$

$$4\pi^2\alpha\sum_{j+k+l=s}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\mathrm{i}k)(u_j^*\cdot v_k^*)(w_l^*\cdot\overline{y}_s^*)|s|^2\mathrm{e}^{\tau(|s|-|j|-|k|-|l|)}-$$
$$4\pi^2\beta\sum_{j+k+l=s}(u_j^*\cdot v_k^*)(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\mathrm{i}l)(w_l^*\cdot\overline{y}_s^*)|s|^2\mathrm{e}^{\tau(|s|-|j|-|k|-|l|)}$$

(3.4.57)

注意到

$$|s|=|j_1+k_1+\cdots+j_\sigma+k_\sigma+l|\leqslant$$
$$|j_1|+|k_1|+\cdots+|j_\sigma|+|k_\sigma|+|l|$$

因此

$$\mathrm{e}^{\tau(|s|-|j_1|-|k_1|-\cdots-|j_\sigma|-|k_\sigma|-|l|)}\leqslant 1 \tag{3.4.58}$$

类似地，对 $s=j+k+l$，有

$$\mathrm{e}^{\tau(|s|-|j|-|k|-|l|)}\leqslant 1 \tag{3.4.59}$$

则从式(3.4.57)～(3.4.59)有

$$|(\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}R(u,v,w),\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Ay)|\leqslant 4\pi^2\rho\sum_{l=s}|w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2+$$
$$4\pi^2\sqrt{1+\mu^2}\times$$
$$\sum_{j_1+k_1+\cdots+j_\sigma+k_\sigma+l=s}|u_{j_1}^*||v_{k_1}^*|\cdots|u_{j_\sigma}^*||v_{k_\sigma}^*||w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2+$$
$$4\pi^2\alpha|\boldsymbol{\lambda}_1|\sum_{j+k+l=s}|u_j^*||v_k^*||l||w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2+$$
$$4\pi^2\alpha|\boldsymbol{\lambda}_1|\sum_{j+k+l=s}|j||u_j^*||v_k^*||w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2+$$
$$4\pi^2\alpha|\boldsymbol{\lambda}_1|\sum_{j+k+l=s}|u_j^*||k||v_k^*||w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2+$$
$$4\pi^2\beta|\boldsymbol{\lambda}_2|\sum_{j+k+l=s}|u_j^*||v_k^*||l||w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2 \tag{3.4.60}$$

显然

$$4\pi^2\rho\sum_{l=s}|w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2=\rho\int_\Omega\xi(x)\theta(x)\mathrm{d}x \tag{3.4.61}$$

其中

$$\xi(x)=\sum_l|w_l^*|\mathrm{e}^{\mathrm{i}lx},\ \theta(x)=\sum_s|s|^2|\overline{y}_s^*|\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx} \tag{3.4.62}$$

因此

$$4\pi^2\rho\sum_{l=s}|w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2\leqslant\rho\left|\int_\Omega\xi(x)\theta(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant$$

$$\rho\|\xi\|\,\|\theta\|=\rho\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}w\|\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Ay\| \tag{3.4.63}$$

$$4\pi^2\sqrt{1+\mu^2}\sum_{j_1+k_1+\cdots+j_\sigma+k_\sigma+l=s}|u_{j_1}^*||v_{k_1}^*|\cdots$$
$$|u_{j_\sigma}^*||v_{k_\sigma}^*||w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2=$$
$$\sqrt{1+\mu^2}\int_\Omega\varphi_{j_1}(x)\Psi_{k_1}(x)\cdots\varphi_{j_\sigma}(x)\Psi_{k_\sigma}(x)\xi(x)\theta(x)\mathrm{d}x \tag{3.4.64}$$

其中 $\xi(x),\theta(x)$如式(3.4.62)所示。且

$$\varphi_{j_1}(x)=|u_{j_1}^*|\mathrm{e}^{\mathrm{i}j_1x},\ \Psi_{k_1}(x)=|v_{k_1}^*|\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1x}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_{j_\sigma}(x)=|u_{j_\sigma}^*|\mathrm{e}^{\mathrm{i}j_\sigma x},\ \Psi_{k_\sigma}(x)=|v_{k_\sigma}^*|\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\sigma x} \tag{3.4.65}$$

由式(3.4.64)可得

$$4\pi^2\sqrt{1+\mu^2}\times$$
$$\sum_{j_1+k_1+\cdots+j_\sigma+k_\sigma+l=s}|u_{j_1}^*||v_{k_1}^*|\cdots|u_{j_\sigma}^*||v_{k_\sigma}^*||w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2\leqslant$$
$$\sqrt{1+\mu^2}\left|\int_\Omega\varphi_{j_1}(x)\Psi_{k_1}(x)\cdots\varphi_{j_\sigma}(x)\Psi_{k_\sigma}(x)\xi(x)\theta(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant$$
$$\sqrt{1+\mu^2}\|\varphi_{j_1}\|_{4\sigma+2}\|\Psi_{k_1}\|_{4\sigma-2}\cdots\|\varphi_{j_\sigma}\|_{4\sigma+2}\times$$
$$\|\Psi_{k_\sigma}\|_{4\sigma+2}\|\xi\|_{4\sigma+2}\|\theta\|\leqslant$$
$$\sqrt{1+\mu^2}\|\varphi_{j_1}\|_{H^1}\|\Psi_{k_1}\|_{H^1}\cdots\|\varphi_{j_\sigma}\|_{H^1}\|\Psi_{k_\sigma}\|_{H^1}\|\xi\|_{H^1}\|\theta\|\leqslant$$
$$C_1\|A^{\frac{1}{2}}\varphi_{j_1}\|\|A^{\frac{1}{2}}\Psi_{k_1}\|\cdots\|A^{\frac{1}{2}}\varphi_{j_\sigma}\|\|A^{\frac{1}{2}}\Psi_{k_\sigma}\|\|A^{\frac{1}{2}}\xi\|\|\theta\|\leqslant$$
$$C_2\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}y\|^\sigma\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}v\|^\sigma\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}w\|\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Ay\| \tag{3.4.66}$$

由于

$$4\pi^2\alpha|\lambda_1|\sum_{j+k+l=s}|u_j^*||v_k^*||l||w_k^*|\overline{y}_s^*||s|^2=$$

$$\alpha|\lambda_1|\int_\Omega \varphi(x)\Psi(x)\eta(x)\theta(x)\mathrm{d}x \tag{3.4.67}$$

其中 $\theta(x)$ 为式(3.4.62)所定义。且

$$\varphi(x)=|u_j^*|\mathrm{e}^{ijx},\ \Psi(x)=|v_k^*|\mathrm{e}^{ikx},\ \eta(x)=|l||w_l^*|\mathrm{e}^{ilx} \tag{3.4.68}$$

由式(3.4.67)可得

$$\begin{aligned}
&4\pi^2\alpha|\lambda_1|\sum_{j+k+l=s}|u_j^*||v_k^*||l||w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2\leqslant\\
&|\alpha||\lambda_1|\left|\int_\Omega \varphi(x)\Psi(x)\eta(x)\theta(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\\
&|\alpha||\lambda_1|\|\varphi\|_8\|\Psi\|_8\|\eta\|_4\|\theta\|\leqslant\\
&C_3\|\varphi\|_{H^1}\|\Psi\|_{H^1}\|\eta\|^{\frac12}\|\eta\|_{H^1}^{\frac12}\|\theta\|\leqslant\\
&C_4\|A^{\frac12}\varphi\|\|A^{\frac12}\Psi\|\|\eta\|\|A^{\frac12}\eta\|^{\frac12}\|\theta\|\leqslant\\
&C_5\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac12}}A^{\frac12}u\|\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac12}}A^{\frac12}v\|\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac12}}A^{\frac12}w\|^{\frac12}\times\\
&\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac12}}Aw\|^{\frac12}\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac12}}Ay\|
\end{aligned} \tag{3.4.69}$$

类似于式(3.4.69),有

$$\begin{aligned}
&4\pi^2\alpha|\lambda_1|\sum_{j+k+l=s}|j||u_j^*||v_k^*||w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2\leqslant\\
&C_6\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac12}}A^{\frac12}u\|^{\frac12}\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac12}}Au\|^{\frac12}\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac12}}A^{\frac12}v\|\times\\
&\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac12}}A^{\frac12}w\|\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac12}}Ay\|
\end{aligned} \tag{3.4.70}$$

$$\begin{aligned}
&4\pi^2\alpha|\lambda_1|\sum_{j+k+l=s}|u_j^*||k||v_k^*||w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2\leqslant\\
&C_7\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac12}}A^{\frac12}u\|\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac12}}A^{\frac12}v\|^{\frac12}\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac12}}Av\|^{\frac12}\times\\
&\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac12}}A^{\frac12}w\|\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac12}}Ay\|
\end{aligned} \tag{3.4.71}$$

$$\begin{aligned}
&4\pi^2\beta\sum_{j+k+l=s}|u_j^*||v_k^*||l||w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2\leqslant\\
&C_8\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac12}}A^{\frac12}u\|\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac12}}A^{\frac12}v\|\|\mathrm{e}^{\tau A^{\frac12}}A^{\frac12}w\|^{\frac12}\times
\end{aligned}$$

$$\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Aw\|^{\frac{1}{2}}\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Ay\| \tag{3.4.72}$$

由式(3.4.60)、(3.4.63)、(3.4.66)～(3.4.69)，推得引理3.4.2的结论。

由引理3.4.2可得

$$|(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}R(u,u,u),e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Au)| \leqslant \rho\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}u\|\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Au\| +$$
$$C\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u\|^{2\sigma+1}\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Au\| + C\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u\|^{\frac{5}{2}}\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Au\|^{\frac{3}{2}} \leqslant$$
$$\varepsilon\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Au\|^2 + C_1(\varepsilon)\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}u\|^2 +$$
$$C_2(\varepsilon)\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u\|^{4\sigma+2} + C_3(\varepsilon)\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u\|^{10} \leqslant$$
$$\varepsilon\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Au\|^2 + C_4(\varepsilon)\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}u\|^{4\sigma+2} +$$
$$C_5(\varepsilon)\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}u\|^{4\sigma+2} + C_6 \leqslant$$
$$\varepsilon\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Au\|^2 + C_7(\varepsilon)\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u\|^{4\sigma+2} + C_6 \tag{3.4.73}$$

定理3.4.3　设条件(3.4.4)满足，$u_0 \in H^2(\Omega)$，则存在常数k依赖于初值，使得问题(3.4.1)～(3.4.3)解的每一个分量具有值$D(A^{\frac{1}{2}}\exp(kA^{\frac{1}{2}}))$，值的解析延拓在如下复数区域：

$$\Delta = \{t + se^{i\theta}; t \geqslant t_*, |\theta| \leqslant \theta_0, 0 \leqslant s \leqslant T_0\} \tag{3.4.74}$$

且

$$\|e^{kA^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u(z)\| \leqslant K,\ z \in \Delta \tag{3.4.75}$$

其中θ_0、T_0和K依赖于初值，$|\theta_0| \leqslant \pi/4$，$t_*$依赖于初值和$R$，$\|u_0\|_{H^1} \leqslant R$。

证明　由式(3.4.6)和式(3.4.73)可知文献[132]中的定理3.1成立。因此定理得证。

由定理3.4.3和Cauchy公式，可得

$$\|e^{kA^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}u(t)\| \leqslant K_1, \forall t \geqslant t_1 \tag{3.4.76}$$

由式(3.4.75)和式(3.4.76)可得，当t充分大时有

$$\|e^{kA^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}q(t)\| \leqslant K,\ \|e^{kA^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}q(t)\| \leqslant K_1 \tag{3.4.77}$$

其中 $q(t)=Q_m u(t)$，因此当 $t\geqslant t_*$ 时

$$\|A^{\frac{1}{2}}q(t)\| \leqslant K\mathrm{e}^{-k\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}},\ \|q(t)\| \leqslant K\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-k\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}},$$

$$\left\|\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}\right\| \leqslant K_1\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-k\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}} \tag{3.4.78}$$

应用式(3.4.78)代替式(3.4.25)，类似于定理3.4.2，有

定理3.4.4 设式(3.4.4)成立，$u_0\in H^2(\Omega)$。则存在常数 E 依赖于初值，使得

$$\mathrm{dist}_H(\Sigma, u(t)) \leqslant E\lambda_{m+1}^{-1}\mathrm{e}^{-k\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}},\ t\geqslant t_* \tag{3.4.79}$$

其中 $u(t)$ 为问题(3.4.1)～(3.4.3)的解，Σ 为它的近似惯性流形，t_* 依赖于初值和 R，$\|u_0\|_{H^1}\leqslant R$。

3.5 Bernard 对流方程

二维 Newton-Boussinesq 方程描写著名的 Bernard 对流[133]：

$$\begin{cases}\partial_t\xi + u\partial_x\xi + v\partial_y\xi = \Delta\xi - \dfrac{R_a}{P_r}\partial_x\theta \\ \Delta\Psi = \xi,\ u = \partial_y\Psi,\ v = -\partial_x\Psi \\ \partial_t\theta + u\partial_x\theta + v\partial_y\theta = \dfrac{1}{P_r}\Delta\theta\end{cases}$$

其中：$(u,v)\xlongequal{\mathrm{def}}\boldsymbol{u}$ 为速度向量；θ 为温度；Ψ 为流函数；ξ 是涡度；$P_r>0$为 Prandtl 常数；$R_a>0$为 Rayleigh 数。上述方程可改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Psi + J(\Psi,\Delta\Psi) = \Delta^2\Psi - \frac{R_a}{P_r}\frac{\partial\theta}{\partial x} \tag{3.5.1}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + J(\Psi,\theta) = \frac{1}{P_r}\Delta\theta \tag{3.5.2}$$

其中

$$J(u,v) = u_y v_x - u_x v_y$$

上述方程赋予初值

$$\Psi(x,y,0)=\Psi_0(x,y),\ \theta(x,y,0)=\theta_0(x,y) \quad (3.5.3)$$

和周期边界条件

$$\Psi(x+2D,y,t)=\Psi(x,y,t),\ \Psi(x,y+2D,t)=\Psi(x,y,t)$$
$$\theta(x+2D,y,t)=\theta(x,y,t),\ \theta(x,y+2D,t)=\theta(x,y,t) \quad (3.5.4)$$

1987年，Foias C. 等在文献[24]中证明该问题整体吸引子的存在性及维数的有限性，1989年郭在文献[201]中证明谱方法的收敛性和整体光滑解的存在、唯一性，1995年郭在文献[157]中提出了非线性 Galerkin 方法并证明了它的收敛性，1996年郭、王在文献[202]中证明了近似惯性流形的存在性。

为了将该问题简化写成泛函形式，令 $Au=-\Delta u$。它在 $H=L^2(\Omega)$上的内积为$(\cdot,\cdot)$，模为$\|\cdot\|$，$D(A)=\{u\in H^2(\Omega);u$ 满足式(3.5.4)$\}$。令 $\Omega=(0,2D)\times(0,2D)$。于是方程(3.5.1)、(3.5.2)可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\Psi+J(\Psi,A\Psi)+A^2\Psi-\frac{R_a}{P_r}B(\theta)=0 \quad (3.5.5)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta+J(\Psi,\theta)+\frac{1}{P_r}A\theta=0 \quad (3.5.6)$$

其中 $B(\theta)=\frac{\partial\theta}{\partial x}$为线性算子。从文献[157]可知当$(\Psi_0,\theta_0)\in H^2\times H^1$，则问题(3.5.1)～(3.5.4)具有唯一解$(\Psi,\theta)$。

$$\Psi\in L^\infty(\mathbf{R}^+;\mathbf{H}^2(\Omega)),\Delta\Psi\in\mathbf{L}^2(0,\mathbf{T};\mathbf{H}^1(\Omega)),\quad\forall\mathbf{T}>0$$
$$\theta\in L^\infty(\mathbf{R}^+;\mathbf{H}^1(\Omega)),\Delta\theta\in\mathbf{L}^2(\mathbf{0},\mathbf{T};\mathbf{H})$$

方程(3.5.2)性质之一是解的平均值是守恒的($t>0$)。

$$m(\theta(t))=\frac{1}{\Omega}\iint_\Omega\theta(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega\theta_0(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=m(\theta_0)$$

因此，在全空间 H 上不存在有界吸收集。我们引入 H 的子集：

$$H_\alpha=\{\theta\in H:|m(\theta)|\leqslant\alpha\},\alpha\text{ 为固定数}$$

引理3.5.1[80] 一致 Gronwall 引理：设 g,h,y 为三个正的在$[t_0,\infty)$上局部可积函数，设 y' 也在$[t_0,\infty)$上局部可积。且设 g,h,y满足不等式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\leqslant gy+h,\ t\geqslant t_0$$

$$\int_t^{t+r}g(s)\mathrm{d}s\leqslant a_1,\ \int_t^{t+r}h(s)\mathrm{d}s\leqslant a_2,$$

$$\int_t^{t+r}y(s)\mathrm{d}s\leqslant a_3,\ \forall t\geqslant t_0$$

其中 r,a_1,a_2,a_3为正常数。则有

$$y(t+r)\leqslant(\frac{a_3}{r}+a_2)\exp\ (a_1),\ t\geqslant t_0$$

引理3.5.2 设 $\Psi_0\in H^4$，$\theta_0\in H_a\cap H^2$，则对问题(3.5.2)～(3.5.4)的解(Ψ,θ)，有如下估计

$$\|A\Psi\|,\|A^{\frac{3}{2}}\Psi\|,\|\theta\|,\|A^{\frac{1}{2}}\theta\|,\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta\|\leqslant M_0,\quad \forall t\geqslant t_*$$

其中：M_0表示依赖于参数(α,Ω,P_r,R_a)的常数；t_*依赖于(α,Ω,P_r,R_a)和 R，$\|\Psi_0\|_{H^4}\leqslant R$，$\|\theta_0\|_{H^2}\leqslant R$。

证明 类似于文献[157]中的引理2.3，容易看到存在常数 C 仅依赖于初值，使得

$$\|A\Psi\|,\|\theta\|,\|A^{\frac{1}{2}}\theta\|,\int_t^{t+1}\|A^{\frac{3}{2}}\Psi\|^2\mathrm{d}t\leqslant C,\quad \forall t\geqslant t_0 \tag{3.5.7}$$

其中 t_0依赖于初值和 R，$\|\Psi_0\|_{H^4}\leqslant R$，$\|\theta_0\|\leqslant R$，$C$ 在这里及以后均表示仅依赖于参数的常数。

作式(3.5.5)和 $A^2\Psi$ 的内积得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^{\frac{3}{2}}\Psi\|^2+(J(\Psi,A\Psi),A^2\Psi)+\|A^2\Psi\|^2-\frac{R_a}{P_r}(B(\theta),A^2\Psi)=0 \tag{3.5.8}$$

$$|(J(\Psi,A\Psi),A^2\Psi)|\leqslant|J(\Psi,A\Psi)\|A^2\Psi\||\leqslant$$

$$C\|A^{\frac{3}{2}}\Psi\|^2\|A^2\Psi\| \leqslant \frac{1}{4}\|A^2\Psi\|^2 + C\|A^{\frac{3}{2}}\Psi\|^4 \qquad (3.5.9)$$

$$|(B(\theta), A^2\Psi)| \leqslant \|B(\theta)\|\|A^2\Psi\| \leqslant \|A^{\frac{1}{2}}\theta\|\|A^2\Psi\| \leqslant$$

$$C\|A^2\Psi\| \leqslant \frac{1}{4}\|A^2\Psi\|^2 + C \qquad (3.5.10)$$

从式(3.5.8)～(3.5.10)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^{\frac{3}{2}}\Psi\|^2 + \|A^2\Psi\|^2 \leqslant C\|A^{\frac{3}{2}}\Psi\|^4 + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^{\frac{3}{2}}\Psi\|^2 \leqslant C\|A^{\frac{3}{2}}\Psi\|^4 + C$$

为了应用一致 Gronwall 引理，令

$$y = \|A^{\frac{3}{2}}\Psi\|^2,\ g = C\|A^{\frac{3}{2}}\Psi\|^2,\ h = C$$

则由式(3.5.7)可知引理3.5.1的条件满足，因此有

$$\|A^{\frac{3}{2}}\Psi\|^2 \leqslant C,\ \forall t \geqslant t_0 + 1 \qquad (3.5.11)$$

其中 t_0类似于式(3.5.7)中的。

式(3.5.5)、(3.5.6)对 t 微分得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\Psi_t + J(\Psi_t, A\Psi) + J(\Psi, A\Psi_t) + A^2\Psi_t - \frac{R_a}{P_r}B(\theta_t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_t + J(\Psi_t, \theta) + J(\Psi, \theta_t) + \frac{1}{P_r}A\theta_t = 0$$

因

$$\Psi_0 \in H^4,\ \theta_0 \in H^2$$

则由式(3.5.5)、(3.5.6)推得

$$A\Psi_t(0) \in H,\ \theta_t(0) \in H$$

重复如在文献[157]中所证，可得

$$\|A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi\| \leqslant C,\ \|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta\| \leqslant C,\ \forall t \geqslant t'_0$$

其中 t'_0依赖于初值和 R，$\|\Psi_0\|_{H^4} \leqslant R$，$\|\theta_0\|_{H^2} \leqslant R$。令 $t_* = \max\{t'_0, t_0+1\}$，则当 $t \geqslant t_*$，由上面不等式(3.5.7)和(3.5.11)即

得引理。

设$\{w_j(x,y)\}(j=1,2,\cdots)$为$A$的周期特征向量，满足

$$Aw_j = \lambda_j w_j, j = 1,2,\cdots,$$
$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 < \cdots, \lambda_j \to +\infty, j \to \infty$$

固定正整数m，令$P=P_m$为H到子空间span $\{w_1,w_2,\cdots,w_m\}$的投影。$Q=Q_m=I-P_m$，以P,Q作用于式(3.5.5)、(3.5.6)，可得$\Psi_1=P\Psi$，$\Psi_2=Q\Psi$，$\theta_1=P\theta$，$\theta_2=Q\theta$的耦合方程组。

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\Psi_1 + P_m J(\Psi,A\Psi) + A^2\Psi_1 - \dfrac{R_a}{P_r}P_m B(\theta) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\Psi_2 + Q_m J(\Psi,A\Psi) + A^2\Psi_2 - \dfrac{R_a}{P_r}Q_m B(\theta) = 0\end{cases} \tag{3.5.12}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_1 + P_m J(\Psi,\theta) + \dfrac{1}{P_r}A\theta_1 = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_2 + Q_m J(\Psi,\theta) + \dfrac{1}{P_r}A\theta_2 = 0\end{cases} \tag{3.5.13}$$

今后，我们经常应用如下不等式：

$$|J(u,v)| \leqslant C\|A^{\frac{3}{2}}u\|\|A^{\frac{1}{2}}v\|, \quad \forall u \in H^3, v \in H^1 \tag{3.5.14}$$

式(3.5.14)的证明是显然的，因为

$$\begin{aligned}|J(u,v)| &= \left(\iint_\Omega (u_y v_x - u_x v_y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \\ &(\|u_y\|_\infty + \|u_x\|_\infty)\|\nabla v\| \leqslant \\ &C(\|u_y\|^{\frac{1}{2}}\|\Delta u_y\|^{\frac{1}{2}} + \|u_x\|^{\frac{1}{2}}\|\Delta u_x\|^{\frac{1}{2}})\|\nabla v\| \leqslant \\ &C\|\nabla u\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\Delta u\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla v\| \leqslant \\ &C\|A^{\frac{1}{2}}u\|^{\frac{1}{2}}\|A^{\frac{3}{2}}u\|^{\frac{1}{2}}\|A^{\frac{1}{2}}v\| \leqslant C\|A^{\frac{3}{2}}u\|\|A^{\frac{1}{2}}v\|\end{aligned}$$

即得式(3.5.14)。

现给出Ψ_2,θ_2及其导数长时间的估计。

引理3.5.3 设$\Psi_0 \in H^4, \theta_0 \in H_s \cap H^2$，则存在常数$M$依赖

于参数，t_*和 R，$\|\Psi_0\|_{H^1}\leqslant R$，$\|\theta_0\|_{H^2}\leqslant R$，使得

$$\|A^{\frac{3}{2}}\Psi_2(t)\| \leqslant M\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}, \ \|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\Psi_2\| \leqslant M\lambda_{m+1}^{-1}$$

$$\|A^{\frac{3}{2}}\theta_2(t)\| \leqslant M\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}, \ \|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_2\| \leqslant M\lambda_{m+1}^{-1}$$

证明 式(3.5.12)和 $A^2\Psi_2$在 H 中作内积得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A^{\frac{3}{2}}\Psi_2|^2 + (J(\Psi,A\Psi),A^2\Psi_2) + |A^2\Psi_2|^2 - \frac{R_a}{P_r}(B(\theta) - A^2\Psi_2) = 0 \qquad (3.5.15)$$

由式(3.5.14)有

$$|(J(\Psi,A\Psi),A^2\Psi_2)| \leqslant \|J(\Psi,A\Psi)\|\|A^2\Psi_2\| \leqslant C\|A^{\frac{3}{2}}\Psi\|^2\|A^2\Psi_2\| \leqslant C\|A^2\Psi_2\|$$

$$|(B(\theta),A^2\Psi_2)| \leqslant \|A^{\frac{1}{2}}\theta\|\cdot\|A^2\Psi_2\| \leqslant C\|A^2\Psi_2\|$$

因此从式(3.5.15)得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^{\frac{3}{2}}\Psi_2\|^2 + \|A^2\Psi_2\|^2 \leqslant C\|A^2\Psi_2\| \leqslant \frac{1}{2}\|A^2\Psi_2\|^2 + C$$

因$\|A^2\Psi_2\|^2\geqslant\lambda_{m+1}\|A^{\frac{3}{2}}\Psi_2\|^2$得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^{\frac{3}{2}}\Psi_2\|^2 + \lambda_{m+1}\|A^{\frac{3}{2}}\Psi_2\|^2 \leqslant C$$

由 Gronwall 引理知

$$\|A^{\frac{3}{2}}\Psi_2(t)\|^2 \leqslant \|A^{\frac{3}{2}}\Psi_2(t_*)\|^2\mathrm{e}^{-\lambda_{m+1}(t-t_*)} + C\lambda_{m+1}^{-1}, \ t \geqslant t_*$$

其中 t_*类似于引理3.5.2。

因

$$\|A^{\frac{3}{2}}\Psi_2(t_*)\| \leqslant \|A^{\frac{3}{2}}\Psi(t_*)\| \leqslant M$$

有

$$\|A^{\frac{3}{2}}\Psi_2(t)\|^2 \leqslant M^2\mathrm{e}^{-\lambda_{m+1}(t-t_*)} + C\lambda_{m+1}^{-1} \leqslant C\lambda_{m+1}^{-1}, \quad \forall t \geqslant t_* \qquad (3.5.16)$$

其中 $t'_* = \sup_m \max\ \{t_*, t_* + \frac{1}{\lambda_{m+1}} \lg \frac{M^2 \lambda_{m+1}}{C}\}$。

作式(3.5.13)和 $A\theta_2$ 在 H 中的内积得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^{\frac{1}{2}}\theta_2\|^2 + (Q_m J(\Psi,\theta), A\theta_2) + \frac{1}{P_r}\|A\theta_2\|^2 = 0$$

则有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^{\frac{1}{2}}\theta_2\|^2 + \frac{1}{P_r}\|A\theta_2\|^2 \leqslant |J(\Psi,\theta)||A\theta_2| \leqslant$$

$$C\|A^{\frac{3}{2}}\Psi\|\|A^{\frac{1}{2}}\theta\|\|A\theta_2\| \leqslant C\|A\theta_2\| \leqslant \frac{1}{2P_r}\|A\theta_2\|^2 + C$$

由此推得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^{\frac{1}{2}}\theta_2\|^2 + \frac{1}{P_r}\|A\theta_2\|^2 \leqslant C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^{\frac{1}{2}}\theta_2\|^2 + \frac{\lambda_{m+1}}{P_r}\|A^{\frac{1}{2}}\theta_2\|^2 \leqslant C$$

由 Gronwall 引理得

$$\|A^{\frac{1}{2}}\theta_2(t)\|^2 \leqslant \|A^{\frac{1}{2}}\theta_2(t_*)\|^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{P_r}\lambda_{m-1}(t-t_*)} + C\lambda_{m+1}^{-1} \leqslant$$

$$M^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{P_r}\lambda_{m+1}(t-t_*)} + C\lambda_{m+1}^{-1},\ \forall t \geqslant t_*$$

其中 t_* 类似于引理3.5.2中的。这就证明了

$$\|A^{\frac{1}{2}}\theta_2(t)\|^2 \leqslant C\lambda_{m-1}^{-1}, \forall t \geqslant t'_* \tag{3.5.17}$$

其中 $t'_* = \sup_m \max\ \{t_*, t_* + \frac{P_r}{\lambda_{m+1}} \lg \frac{M^2 \lambda_{m+1}}{C}\}$

式(3.5.12)和式(3.5.13)对 t 微分，应用上面的类似方法可得，当 t 充分大时

$$\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\Psi_2(t)\| \leqslant M\lambda_{m-1}^{-1},\ \|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_2(t)\| \leqslant M\lambda_{m-1}^{-1} \tag{3.5.18}$$

当然，此时 J 中不仅含有 Ψ,θ，还有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi$、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta$，因此还要利用引理3.5.2。由式(3.5.16)～(3.5.18)即得引理3.5.3。

因 $\Psi_2, \theta_2 \in Q_m H$，由引理3.5.3推出

$$\|A\Psi_2\| \leqslant M\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}},\ \|\theta_2\| \leqslant M\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}},\ t \geqslant t_*$$

我们现构造二维 Newton-Boussinesq 方程一种显式近似惯性流形。

在文献[157]中,作者引入如下的非线性 Galerkin 方法,并得到它的收敛性。这些格式在于寻求近似解$(\Psi_1,\theta_1)\in P_mH\times P_mH$,它们满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\Psi_1+PJ(\Psi_1,A\Psi_1)+PJ(\varphi_1,A\Psi_1)+\\ PJ(\Psi_1,A\varphi_1)+A^2\Psi_1-\dfrac{R_a}{P_r}PB(\theta_1)=0\\ A^2\varphi_1+QJ(\Psi_1,A\Psi_1)-\dfrac{R_a}{P_r}QB(\theta_1)=0\end{cases}\tag{3.5.19}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_1+PJ(\Psi_1,\theta_1)+PJ(\varphi_1,\theta_1)+\\ PJ(\Psi_1,\varphi_2)+\dfrac{1}{P_r}A\theta_1=0\\ \dfrac{1}{P_r}A\varphi_2+\alpha J(\Psi_1,\theta_1)=0\\ \Psi_1(0,x,y)=P\Psi_0(x,y),\theta_1(0,x,y)=P\theta_0(x,y)\end{cases}\tag{3.5.20}$$

其中$\varphi_1,\varphi_2\in Q_mH$。我们注意到非线性 Galerkin 方法中有一个非线性映照F。我们以下证明$\Sigma_1=\mathrm{graph}\ (F)$为一个近似惯性流形。其中映照$F:P_mH\times P_mH\to Q_mH\times Q_mH$,使得$F(\Psi_1,\theta_1)=(\varphi_1,\varphi_2)$对任何$(\Psi_1,\theta_1)\in P_mH\times P_mH$成立。其中$\varphi_1,\varphi_2$为式(3.5.19)、(3.5.20)所决定。

定理3.5.1 存在常数M仅依赖于参数,使得

$$\mathrm{dist}_{H^2\times H}((\Psi,\theta),\Sigma_1)\leqslant M\lambda_{m+1}^{-\frac{3}{2}},t\geqslant t_*$$

其中t_*依赖于参数和R,$\|\Psi_0\|_{H^4}\leqslant R$,$\|\theta_0\|_{H^2}\leqslant R$,$(\Psi,\theta)$为问题(3.5.1)~(3.5.4)的解。

证明 式(3.5.19)减去式(3.5.12)得

$$A^2(\varphi_1-\Psi_2)+QJ(\Psi_1,A\Psi_1)-QJ(\Psi,A\Psi)-$$

$$\frac{R_a}{P_r}QB(\theta_1)+\frac{R_a}{P_r}QB(\theta)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\Psi_2=0$$

由 $J(u,v)$的双线性有

$$A^2(\varphi_1-\Psi_2)+QJ(-\Psi_2,A\Psi_1)+QJ(\Psi_1,-A\Psi_2)+$$

$$\frac{R_a}{P_r}QB(\theta_2)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\Psi_2=0 \qquad (3.5.21)$$

$$|J(-\Psi_2,A\Psi_1)|\leqslant C\|A^{\frac{3}{2}}\Psi_2\|\|A^{\frac{3}{2}}\Psi_1\|\leqslant$$

$$C\|A^{\frac{3}{2}}\Psi_2\|\|A^{\frac{3}{2}}\Psi\|\leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} \qquad (3.5.22)$$

$$J(\Psi_1,-A\Psi_2)|\leqslant C\|A^{\frac{3}{2}}\Psi\|\|A^{\frac{3}{2}}\Psi_2\|\leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} \qquad (3.5.23)$$

$$|B(\theta_2)|\leqslant\|A^{\frac{1}{2}}\theta_2\|\leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} \qquad (3.5.24)$$

从式(3.5.21)～(3.5.24)和引理3.5.1可得

$$\|A^2\varphi_1-A^2\Psi_2\|\leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}$$

因此得

$$\|A\varphi_1-A\Psi_2\|\leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{3}{2}} \qquad (3.5.25)$$

式(3.5.20)减去式(3.5.13)得

$$\frac{1}{P_r}(A\varphi_2-A\theta_2)+QJ(\Psi_1,\theta_1)-QJ(\Psi_1,\theta)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_2=0$$

即

$$\frac{1}{P_r}(A\varphi_2-A\theta_2)+QJ(-\Psi_2,\theta_1)+QJ(\Psi,-\theta_2)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_2=0$$

可得

$$\|A\varphi_2-A\theta_2\|\leqslant C\|A^{\frac{3}{2}}\Psi_2\|\|A^{\frac{1}{2}}\theta_1\|+$$

$$C\|A^{\frac{3}{2}}\Psi\|\|A^{\frac{1}{2}}\theta_2\|+\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_2\|\leqslant C\lambda_{m-1}^{-\frac{1}{2}}+C\lambda_{m+1}^{-1}\leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}$$

这就表明

$$\|\varphi_2 - \theta_2\| \leqslant C\lambda_{m+1}^{\frac{3}{2}} \tag{3.5.26}$$

对于问题(3.5.1)～(3.5.4)的任何解$(\Psi(t),\theta(t)) = (\Psi_1+\Psi_2,\theta_1+\theta_2)$有

$$\begin{aligned}&\mathrm{dist}_{H^2\times H}((\Psi,\theta),\Sigma_1) \leqslant \|\Psi - (\Psi_1 + \varphi_1)\|_{H^2} + \\ &\|\theta - (\theta_1 + \varphi_2)\| \leqslant \|\Psi_2 - \varphi_1\|_{H^2} + \|\theta_2 - \varphi_2\| \leqslant \\ &C\|A\Psi_2 - A\varphi_1\| + \|\theta_2 - \varphi_2\| \leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{3}{2}}, \quad \forall t \geqslant t_*\end{aligned}$$

其中t_*如同引理3.5.2、引理3.5.3中取定的。定理3.5.1证毕。

现考虑另一种隐式的近似惯性流形。这种流形为压缩映照所确定,并提供整体吸引子在Σ_1上的高阶近似。

引入球:

$$B_m = \{\Psi_1 \in P_mH : \|A^{\frac{3}{2}}\Psi_1\| \leqslant 2M_0\},$$

$$O_m = \{\theta_1 \in P_mH : \|A^{\frac{1}{2}}\theta_1\| \leqslant 2M_0\}$$

$$B_m^{\perp} = \{g \in Q_mH : \|A^{\frac{3}{2}}g\| \leqslant 2M_0\},$$

$$O_m^{\perp} = \{h \in Q_mH : \|A^{\frac{1}{2}}h\| \leqslant 2M_0\}$$

其中M_0如同引理3.5.2中的常数。

定义映照$G: B_m\times O_m \to B_m^{\perp}\times O_m^{\perp}$,使得$G(\Psi_1,\theta_1)=(g,h)$对任何$(\Psi_1,\theta_1)\in B_m\times O_m$,$(g,h)$由以下确定:

$$A^2g + QJ(\Psi_1 + g, A\Psi_1 + Ag) - \frac{R_a}{P_r}QB(\theta_1 + h) = 0 \tag{3.5.27}$$

$$\frac{1}{P_r}Ah + QJ(\Psi_1 + g, \theta_1 + h) = 0 \tag{3.5.28}$$

首先证明,(g,h)由式(3.5.27)、(3.5.28)是确定的。即有

引理3.5.4 存在整数m_0仅依赖于参数,使得当$m\geqslant m_0$,方程组(3.5.27)、(3.5.28)具有唯一解$(g,h)\in B_m^{\perp}\times O_m^{\perp}$, $\forall(\Psi_1,\theta_1)\in B_m\times O_m$。

证明 利用不动点原理,设$(\Psi_1,\theta_1)\in B_m\times O_m$,定义$\tilde{G}: B_m^{\perp}\times$

$B_m^{\perp} \to Q_m H \times Q_m H$：对于$(g_1, h_1) \in B_m^{\perp} \times B_m^{\perp}$，$(g, h) = \widetilde{G}(g_1, h_1)$，由如下方程组决定：

$$A^2 g + QJ(\Psi_1 + g_1, A\Psi_1 + Ag_1) - \frac{R_a}{P_r} QB(\theta_1 + h_1) = 0 \tag{3.5.29}$$

$$\frac{1}{P_r} Ah + QJ(\Psi_1 + g_1, \theta_1 + h_1) = 0 \tag{3.5.30}$$

显然 $\widetilde{G}$ 的不动点即为方程组(3.5.27)、(3.5.28)的解。

(1) 当 m 充分大时，$\widetilde{G}$ 映照 $B_m^{\perp} \times O_m^{\perp}$ 为它自己。

由式(3.5.29)得

$$\|A^2 g\| \leqslant \|J(\Psi_1 + g_1, A\Psi_1 + Ag_1)\| + \frac{R_a}{P_r}\|B(\theta_1 + h_1)\| \leqslant C\|A^{\frac{3}{2}}\Psi_1 + A^{\frac{3}{2}}g_1\|^2 + \frac{R_a}{P_r}\|A^{\frac{1}{2}}\theta_1 + A^{\frac{1}{2}}h_1\| \leqslant C$$

由上面可得

$$\|A^{\frac{3}{2}} g\| \leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}$$

因 $\lambda_{m+1} \to \infty$。因此存在 k_1 依赖于参数，使得当 $m \geqslant k_1$ 时，$g \in B_m \perp$。

由式(3.5.28)得

$$\frac{1}{P_r}\|Ah\| \leqslant \|J(\Psi_1 + g_1, \theta_1 + h_1)\| \leqslant C\|A^{\frac{3}{2}}\Psi_1 + A^{\frac{3}{2}}g_1\|\|A^{\frac{1}{2}}\theta_1 + A^{\frac{1}{2}}h_1\| \leqslant C((\Psi_1, \theta_1) \in B_m \times O_m, ((g_1, h_1) \in B_m^{\perp} \times O_m^{\perp})$$

因此

$$\|A^{\frac{1}{2}} h\| \leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}$$

于是存在 k_2 仅依赖于参数，使得 $m \geqslant k_2$，$h \in O_m^{\perp}$

(2) $\widetilde{G}$ 是压缩的。

设(g_1, h_1)，$(g_2, h_2) \in B_m^{\perp} \times O_m^{\perp}$，由式(3.5.29)有

$$A^2g(g_1,h_1) - A^2g(g_2,h_2) + QJ(\Psi_1 + g_1, A\Psi_1 + Ag_1) -$$

$$QJ(\Psi_1 + g_2, A\Psi_1 + Ag_2) - \frac{R_a}{P_r}QB(\theta_1 + h_1) +$$

$$\frac{R_a}{P_r}QB(\theta_1 + h_2) = 0$$

即有

$$A^2g(g_1,h_1) - A^2g(g_2,h_2) + QJ(g_1 - g_2, A\Psi_1 + Ag_1) +$$

$$QJ(\Psi_1 + g_2, Ag_1 - Ag_2) - \frac{R_a}{P_r}QB(h_1 - h_2) = 0$$

于是

$$\|A^2g(g_1,h_1) - A^2g(g_2,h_2)\| \leqslant$$

$$\|QJ(g_1 - g_2, A\Psi_1 + Ag_1)\| +$$

$$\|QJ(\Psi_1 + g_2, Ag_1 - Ag_2)\| + \frac{R_a}{P_r}\|QB(h_1 - h_2)\| \leqslant$$

$$C\|A^{\frac{3}{2}}g_1 - A^{\frac{3}{2}}g_2\|\|A^{\frac{3}{2}}\Psi_1 + A^{\frac{3}{2}}g_1\| +$$

$$C\|A^{\frac{3}{2}}g_1 - A^{\frac{3}{2}}g_2\|\|A^{\frac{3}{2}}\Psi_1 + A^{\frac{3}{2}}g_2\| + C\|A^{\frac{1}{2}}(h_1 - h_2)\| \leqslant$$

$$C\|A^{\frac{3}{2}}g_1 - A^{\frac{3}{2}}g_2\| + C\|A^{\frac{1}{2}}h_1 - A^{\frac{1}{2}}h_2\|$$

这就推出

$$\|A^{\frac{3}{2}}g(g_1,h_1) - A^{\frac{3}{2}}g(g_2,h_2)\| \leqslant$$

$$C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\|A^{\frac{3}{2}}g_1 - A^{\frac{3}{2}}g_2\| + C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\|A^{\frac{1}{2}}h_1 - A^{\frac{1}{2}}h_2\| \tag{3.5.31}$$

由式(3.5.30)得

$$\frac{1}{P_r}Ah(g_1,h_1) - \frac{1}{P_r}Ah(g_2,h_2) + QJ(\Psi_1 + g_1, \theta_1 + h_1) -$$

$$QJ(\Psi_2 + g_2, \theta_2 + h_2) = 0$$

即有

$$\frac{1}{P_r}Ah(g_1,h_1) - \frac{1}{P_r}Ah(g_2,h_2) + QJ(g_1 - g_2, \theta_1 + h_1) +$$

$$QJ(\Psi_1 + g_2, h_1 - h_2) = 0$$

因此

$$\frac{1}{P_r}\|Ah(g_1,h_1)-Ah(g_2,h_2)\|\leqslant$$

$$\|QJ(g_1-g_2,\theta_1+h_1)\|+\|QJ(\Psi_1+g_2,h_1-h_2)\|\leqslant$$

$$C\|A^{\frac{3}{2}}g_1-A^{\frac{3}{2}}g_2\|\|A^{\frac{1}{2}}\theta_1+A^{\frac{1}{2}}h_1\|+$$

$$C\|A^{\frac{3}{2}}\Psi_1+A^{\frac{3}{2}}g_2\|\|A^{\frac{1}{2}}h_1-A^{\frac{1}{2}}h_2\|\leqslant$$

$$C\|A^{\frac{3}{2}}g_1-A^{\frac{3}{2}}g_2\|+C\|A^{\frac{1}{2}}h_1-A^{\frac{1}{2}}h_2\|$$

这就表明

$$\|A^{\frac{1}{2}}h(g_1,h_1)-A^{\frac{1}{2}}h(g_2,h_2)\|\leqslant$$

$$C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\|A^{\frac{3}{2}}g_1-A^{\frac{3}{2}}g_2\|+C\lambda_{m-1}^{-\frac{1}{2}}\|A^{\frac{1}{2}}h_1-A^{\frac{1}{2}}h_2\| \tag{3.5.32}$$

由于 $\lambda_{m+1}\to\infty$，由式(3.5.31)、(3.5.32)可知，存在 $m_0\geqslant k_0$ 使得 $m\geqslant m_0$，$\widetilde{G}$ 是压缩的。

由前可知，$\widetilde{G}$ 在 $B_m^{\perp}\times O_m^{\perp}$ 中具有唯一不动点。引理3.5.4得证。

令 $\Sigma_2=\mathrm{Graph}\ (G)$，则 Σ_2 为近似惯性流形。即

定理3.5.2 存在 m_0 仅依赖于参数，使得对 $m\geqslant m_0$，存在常数 M，有

$$\mathrm{dist}_{H^2\times H}((\Psi(t),\theta(t)),\Sigma_2)\leqslant M\lambda_{m+1}^{-2},\quad \forall t\geqslant t_*$$

其中 $(\Psi(t),\theta(t))$ 为问题(3.5.1)～(3.5.4)的任何解，M 依赖于参数；t_* 依赖于参数和 R，$\|\Psi_0\|_{H^4}\leqslant R$，$\|\theta_0\|_{H^2}\leqslant R$。

证明 式(3.5.27)～(3.5.12)得

$$A^2g-A^2\Psi_2+QJ(\Psi_1+g,A\Psi_1+Ag)-QJ(\Psi_1,A\Psi)-$$

$$\frac{R_a}{P_r}QB(\theta_1+h)+\frac{R_a}{P_r}QB(\theta)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\Psi_2=0$$

即有

$$A^2g-A^2\Psi_2+QJ(g-\Psi_2,A\Psi_1+Ag)+$$

$$QJ(\Psi,Ag-A\Psi_2)-\frac{R_a}{P_r}QB(h-\theta_2)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\Psi_2=0$$

于是

$$\|A^2g-A^2\Psi_2\|\leqslant\|J(g-\Psi_2,A\Psi_1+Ag)\|+$$

$$\|J(\Psi,Ag-A\Psi_2)\|+\frac{R_a}{P_r}\|B(h-\theta_2)\|+\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\Psi_2\|\leqslant$$

$$C\|A^{\frac{3}{2}}g-A^{\frac{3}{2}}\Psi_2\|\|A^{\frac{3}{2}}\Psi_1+A^{\frac{3}{2}}g\|+$$

$$C\|A^{\frac{3}{2}}\Psi\|\|A^{\frac{3}{2}}g-A^{\frac{3}{2}}\Psi_2\|+C|A^{\frac{1}{2}}h-A^{\frac{1}{2}}\theta_2\|+$$

$$\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\Psi_2\|\leqslant C\|A^{\frac{3}{2}}g-A^{\frac{3}{2}}\Psi_2\|+C\|A^{\frac{1}{2}}h-A^{\frac{1}{2}}\theta_2\|+$$

$$C\lambda_{m+1}^{-1}\leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\|A^2g-A^2\Psi_2\|+C\|A^{\frac{1}{2}}h-A^{\frac{1}{2}}\theta_2\|+C\lambda_{m+1}^{-1}$$

因此存在 m_0 仅依赖于参数,使得对 $m\geqslant m_0$ 有

$$\|A^2g-A^2\Psi_2\|\leqslant C\|A^{\frac{1}{2}}h-A^{\frac{1}{2}}\theta_2\|+C\lambda_{m+1}^{-1}\leqslant$$

$$C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\|Ah-A\theta_2\|+C\lambda_{m+1}^{-1}\quad(3.5.33)$$

式(3.5.28)减去式(3.5.13)得

$$\frac{1}{P_r}(Ah-A\theta_2)+QJ(\Psi_1+g,\theta_1+h)-QJ(\Psi_1,\theta)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_2=0$$

即

$$\frac{1}{P_r}(Ah-A\theta_2)+QJ(g-\Psi_2,\theta_1+h)+$$

$$QJ(\Psi,h-\theta_2)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_2=0$$

由此得

$$\|Ah-A\theta_2\|\leqslant C\|A^{\frac{3}{2}}g-A^{\frac{3}{2}}\Psi_2\|\|A^{\frac{1}{2}}\theta_1+A^{\frac{1}{2}}h\|+$$

$$C\|A^{\frac{3}{2}}\Psi\|\|A^{\frac{1}{2}}h-A^{\frac{1}{2}}\theta_2\|+C\lambda_{m+1}^{-1}\leqslant$$

$$C\|A^{\frac{3}{2}}g-A^{\frac{3}{2}}\Psi_2\|+C\|A^{\frac{1}{2}}h-A^{\frac{1}{2}}\theta_2\|+C\lambda_{m+1}^{-1}\leqslant$$

$$C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\|A^2g-A^2\Psi_2\|+C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\|Ah-A\theta_2\|+C\lambda_{m+1}^{-1}$$

$$(3.5.34)$$

由式(3.5.33)和式(3.5.34)推出,当 $m\geqslant m_0$ 时

$$\|A^2g-A^2\Psi_2\|+\|Ah-A\theta_2\|\leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\|A^2g-A^2\Psi_2\|+$$

$$C\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}\|Ah - A\theta_2\| + C\lambda_{m+1}^{-1}$$

因 $\lambda_{m+1} \to \infty$ 知∃ $k_0 \geqslant m_0$，使得 $m \geqslant k_0$ 有

$$\|A^2 g - A^2 \Psi_2\| + \|Ah - A\theta_2\| \leqslant C\lambda_{m+1}^{-1}$$

因此

$$\|Ag - A\Psi_2\| \leqslant C\lambda_{m+1}^{-2}$$

$$\|h - \theta_2\| \leqslant C\lambda_{m+1}^{-2}$$

则对问题(3.5.1)～(3.5.4)的任何解$(\Psi(t),\theta(t))$有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{dist}_{H^2\times H}((\Psi,\theta),\Sigma_2) \leqslant \|\Psi(t) - (\Psi_1 + g)\|_{H^2} + \\
&\|\theta(t) - (\theta_1 + h)\| \leqslant \|\Psi_2 - g\|_{H^2} + \|\theta_2 - h\| \leqslant \\
&C\|A\Psi_2 - Ag\| + \|\theta_2 - h\| \leqslant C\lambda_{m+1}^{2}
\end{aligned}$$

定理3.5.2证毕。

最后我们引入逼近于近似惯性流形 Σ_2 的非线性 Galerkin 方法：寻求近似解 $\Psi_m,\theta_m \in P_m H$，它们由以下方程组决定：

$$\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\Psi_m + PJ(\Psi_m, A\Psi_m) + PJ(g, A\Psi_m) + \\
PJ(\Psi_m, Ag) + A^2\Psi_m - \dfrac{R_a}{P_r}PB(\theta_m) = 0 \\
\dfrac{\mathrm{d}\theta_m}{\mathrm{d}t} - PJ(\Psi_m, \theta_m) + PJ(g, \theta_m) + \\
PJ(\Psi_m, h) + \dfrac{1}{P_r}A\theta_m = 0 \\
\Psi_m(0,x,y) = P_m\Psi_0(x,y), \theta_m(0,x,y) = P_m\theta_0(x,y)
\end{cases} \tag{3.5.35}$$

其中$(g,h) \in Q_m H$，由式(3.5.27)、(3.5.28)决定。于此(Ψ_1,θ_1)置换为 Ψ_m,θ_m。由文献[157]中所提供的方法可证明上述格式的近似解的收敛性。

定理3.5.3 设 $\Psi_0(x,y) \in H^2$，$\theta_0(x,y) \in H^1$，且为 x、y 的周期函数。则由式(3.5.35)所确定的近似解(Ψ_m,θ_m)当 $m \to \infty$ 时收敛于问题(3.5.1)～(3.5.4)的广义解(Ψ,θ)。

3.6 长短波(LS)方程

1977 年,Djordjevic,Redekopp 等在文献[28]中在研究毛细管重力波二维波包运动时,首次提出了长短波相互作用方程。Grimshaw 在文献[135]中和 Denney 在文献[136]中相继研究了长短波相互作用的一般理论。1987 年,郭在文献[137]中研究更为广泛 LS 方程组整体光滑解的存在性、唯一性。1991 年,郭在文献[138]研究更为广泛 LS 方程的初值和周期初值问题。1994 年 Tsutsumi M 和 Hatano S 在文献[139]中证明了 H^1 解的存在、唯一性,1996 年,郭、苗在文献[140]中考虑更广泛的 LS 方程并进一步改进文献[139]中的结果和在文献[139]中提出的一个公开问题。1996 年,郭、陈在文献[141]中证明 LS 方程孤立波的稳定性。1996 年,郭、王在文献[142]中研究了广泛一类具耗散 LS 方程组的长时间行为。

考虑如下的广义具耗散的 LS 方程组

$$iu_t + u_{xx} - nu + i\alpha u - \beta g(|u|^2)u + h_1(x) = 0 \quad (3.6.1)$$

$$n_t + |u|_x^2 + \delta n + \gamma f(|u|^2) + h_2(x) = 0 \quad (3.6.2)$$

具初始条件

$$u|_{t=0} = u_0(x), n|_{t=0} = n_0(x), x \in \Omega = (-D, D), D > 0 \quad (3.6.3)$$

和周期边界条件

$$u(x-D,t) = u(x+D,t),\ n(x-D,t) = n(x+D,t),\quad \forall x \in \mathbf{R}, t \geqslant 0 \quad (3.6.4)$$

其中:$u = (u_1(x,t), \cdots, u_N(x,t))$为未知复值向量;$n(x,t)$为未知实值函数;$g(s)$和 $f(s)$($0 \leqslant s < \infty$)为已知实值函数;$h_1(x)$和 $h_2(x)$分别为已给的复值函数向量和实值函数;α, β, γ 和 δ 为实常数,$\alpha > 0$。为了构造问题(3.6.1)~(3.6.4)的近似惯性流形,我们证明问题(3.6.1)~(3.6.4)整体光滑解的存在、唯一性。

引理 3.6.1 设 $u_0(x)$，$h_1(x)$和 $h_2(x)\in L^2(\Omega)$，则对问题(3.6.1)～(3.6.4)的解$(u(t),n(t))$，有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|\leqslant M_1,\ \forall T>0$$

其中$M_1=M_1(\alpha,\beta,\gamma,\delta,f,g,h_1,h_2,T)$为正常数，$\forall\ T>0$

证明 作式(3.6.1)和 u 在 H 中的内积，得

$$(\mathrm{i}u_t+u_{xx}-nu+\mathrm{i}\alpha u+\beta g(|u|^2)u+h_1(x),u)=0 \tag{3.6.5}$$

取式(3.6.5)的虚部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|^2+\alpha\|u(t)\|^2+\mathrm{Im}(h,u)=0 \tag{3.6.6}$$

由 Gronwall 引理，即得引理 3.6.1。

引理 3.6.2 假设

(1) $\rho g(s)\leqslant B_1s^{2-\sigma}+C_1,\ s>0,B_1>0,\ C_1>0,\sigma>0$;

(2) $|f(s)|\leqslant B_2s^{\frac{3}{2}}+C_2,\ s>0,B_2>0,C_2>0$;

(3) $h_1(x),h_2(x)\in L^2(\Omega)$;

(4) $u_0(x)\in H^1(\Omega)$，$n_0(x)\in L^2(\Omega)$。则有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_x(t)\|+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|n(t)\|\leqslant M_2,\ \forall T>0$$

其中$M_2=M_2(T,\|u_0\|_{H^1},\|n_0\|)$为正常数。

证明 作式(3.6.1)和 u_t 在 H 中的内积，得

$$(\mathrm{i}u_t+u_{xx}-nu+\mathrm{i}\alpha u+\beta g(|u|^2)u+h_1(x),u_t)=0 \tag{3.6.7}$$

取式(3.6.7)的实部得

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_x\|^2-\frac{1}{2}\int n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|^2\mathrm{d}x+\mathrm{Re}(\mathrm{i}\alpha u,u_t)$$
$$+\frac{1}{2}\beta\int g(|u|^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|^2\mathrm{d}x+\mathrm{Re}(h_1,u_t)=0$$

因

$$\int n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|^2\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int n|u|^2\mathrm{d}x-\int|u|^2n_t\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int n|u|^2\mathrm{d}x+\delta\int n|u|^2\mathrm{d}x$$

$$+\gamma\int f(|u|^2)|u|^2\mathrm{d}x+\int h_2|u|^2\mathrm{d}x$$

令

$$G(s)=\int_0^s g(\tau)\mathrm{d}\tau$$

由此得

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_x\|^2-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int n|u|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\delta\int n|u|^2\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{2}\gamma\int f(|u|^2)|u|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int h_2|u|^2\mathrm{d}x$$

$$+\frac{1}{2}\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int G(|u|^2)\mathrm{d}x+\mathrm{Re}(\mathrm{i}\alpha u,u_t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}(h_1,u)=0$$

(3.6.8)

式(3.6.8)对 $t\in(0,T)$ 积分得

$$\|u_x\|^2+\int n|u|^2\mathrm{d}x+\delta\int_0^t\int n|u|^2\mathrm{d}x+$$

$$\gamma\int_0^t\int f(|u|^2)|u|^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int h_2|u|^2\mathrm{d}x-\beta\int G(|u|^2)\mathrm{d}x-$$

$$2\int_0^t\mathrm{Re}(\mathrm{i}\alpha u,u_t)\mathrm{d}t-2\mathrm{Re}(h_1,u)=$$

$$\|u_x(0)\|^2+\int n(0)|u(0)|^2\mathrm{d}x-$$

$$\beta\int G(|u(0)|^2)\mathrm{d}x-2\mathrm{Re}(h_1,u(0)) \qquad (3.6.9)$$

现估计式(3.6.9)中的每一项。$\forall\rho>0$ 有

$$\left|\int n|u|^2\mathrm{d}x\right|\leqslant\rho\|n\|^2+C\|u\|_4^4\leqslant\rho\|n\|^2+\rho\|u_x\|^2+M$$

(3.6.10)

类似地有

$$\left|\delta\int n|u|^2\mathrm{d}x\right|\leqslant\rho\|n\|^2+\rho\|u_x\|^2+M \qquad (3.6.11)$$

$$|\gamma\int f(|u|^2)|u|^2\mathrm{d}x| \leqslant |\gamma|\int B_2|u|^5\mathrm{d}x + C_2|\gamma|\int|u|^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant M\|u\|_{H_1}^{\frac{5}{2}} + M \leqslant M\|u_x\|^2 + M \tag{3.6.12}$$

$$|\int h_2|u|^2\mathrm{d}x| \leqslant \rho\|u_x\|^2 + M \tag{3.6.13}$$

利用假设(1)，有

$$\beta G(s) \leqslant \frac{1}{3}B_1 s^{3-\sigma} + C_1 s, \forall s > 0$$

则

$$\beta\int G(|u|^2)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{3}B_1\int|u|^{6-2\sigma}\mathrm{d}x + C_1\int|u|^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant M\|u_x\|^{2-\sigma} + M \leqslant \rho\|u_x\|^2 + M \tag{3.6.14}$$

$$|2\mathrm{Re}\ (h_1,u)| \leqslant 2\|h_1\|\|u\| \leqslant M \tag{3.6.15}$$

式(3.6.5)的共轭取实部可得

$$-\mathrm{Re}\ (\mathrm{i}u,u_t) = \|u_x\|^2 + \int n|u|^2\mathrm{d}x -$$

$$\beta\int g(|u|^2)|u|^2\mathrm{d}x - \mathrm{Re}\ (u,h_1)$$

由假设(1)，有

$$\beta\int g(|u|^2)|u|^2\mathrm{d}x \leqslant B_1\int|u|^{6-2\sigma}\mathrm{d}x + C_1\int|u|^2\mathrm{d}x \leqslant \|u_x\|^2 + M$$

由此可得

$$-\mathrm{Re}\ (\mathrm{i}u,u_t) \geqslant \int n|u|^2\mathrm{d}x - M$$

即

$$-2\alpha\mathrm{Re}(\mathrm{i}u,u_t) \geqslant 2\alpha\int n|u|^2\mathrm{d}x - M \tag{3.6.16}$$

由式(3.6.9)～(3.6.16)可得

$$\|u_x\|^2 \leqslant \rho\|n\|^2 + 2\rho\|u_x\|^2 + (2\alpha+1)\rho\int_0^t\|n\|^2\mathrm{d}t +$$

$$(2\alpha\rho + 2\rho + M)\int_0^t\|u_x\|^2\mathrm{d}t + Mt + M \tag{3.6.17}$$

方程(3.6.2)和 n 在 H 中作内积得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|n\|^2+\int n|u|_x^2\mathrm{d}x+\delta\|n\|^2+$$
$$\gamma\int f(|u|^2)n\mathrm{d}x+\int h_2n\mathrm{d}x=0 \tag{3.6.18}$$

由于

$$\int n|u|_x^2\mathrm{d}x=\int nu_x\bar{u}+\int nu\bar{u}_x\mathrm{d}x=\mathrm{i}\int(u_t\bar{u}_x-\bar{u}_tux)\mathrm{d}x+$$
$$2\mathrm{Re}\int\mathrm{i}\alpha u\bar{u}_x\mathrm{d}x+2\mathrm{Re}\int h_1\bar{u}_x\mathrm{d}x \tag{3.6.19}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int(\mathrm{i}u\bar{u}_x-\mathrm{i}u_x\bar{u})\mathrm{d}x=\mathrm{i}\int(u_t\bar{u}_x+u\bar{u}_{xt}-u_{xt}\bar{u}-u_x\bar{u}_t)\mathrm{d}x=$$
$$\mathrm{i}\int(u_t\bar{u}_x-\bar{u}_tu_x+u_t\bar{u}_x-\bar{u}_tu_x)\mathrm{d}x=$$
$$2\mathrm{i}\int(u_t\bar{u}_x-\bar{u}_tu_x)\mathrm{d}x \tag{3.6.20}$$

从式(3.6.18)～(3.6.20)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|n\|^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int(\mathrm{i}u\bar{u}_x-\mathrm{i}u_x\bar{u})\mathrm{d}x+2\mathrm{Re}\int\mathrm{i}\alpha u\bar{u}_x\mathrm{d}x+$$
$$2\mathrm{Re}\int h_1\bar{u}_x\mathrm{d}x+\delta\|n\|^2+\gamma\int f(|u|^2)n\mathrm{d}x+\int h_2n\mathrm{d}x=0$$
$$\tag{3.6.21}$$

式(3.6.21)对 $t\in(0,t)$ 积分可得

$$\|n\|^2+\int\mathrm{i}u\bar{u}_x\mathrm{d}x-\int\mathrm{i}u_x\bar{u}\mathrm{d}x+4\mathrm{Re}\int_0^t\int\mathrm{i}\alpha u\bar{u}_x\mathrm{d}x+$$
$$4\mathrm{Re}\int_0^t\int h_1\bar{u}_x\mathrm{d}x+2\delta\int_0^t\|n\|^2\mathrm{d}t+2\gamma\int_0^t\int f(|u|^2)n\mathrm{d}x\mathrm{d}t+$$
$$2\int_0^t\int h_2n\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\|n(0)\|^2+$$
$$\mathrm{i}\int u(0)\bar{u}_x(0)\mathrm{d}x-\mathrm{i}\int u_x(0)\bar{u}(0)\mathrm{d}x$$
$$\tag{3.6.22}$$

由于

$$\left|\mathrm{i}\int(u\bar{u}_x-u_x\bar{u})\right|\mathrm{d}x\leqslant\rho\|u_x\|^2+M \tag{3.6.23}$$

$$|4\mathrm{Re}\int \mathrm{i}\alpha u\,\bar{u}_x \mathrm{d}x| \leqslant 4\alpha\int |u||u_x|\mathrm{d}x \leqslant \rho\|u_x\|^2 + M \tag{3.6.24}$$

$$|4\mathrm{Re}\int h_1\,\bar{u}_x \mathrm{d}x| \leqslant 4\int |h_1||u_x|\mathrm{d}x \leqslant \rho\|u_x\|^2 + M \tag{3.6.25}$$

$$|2\gamma\int f(|u|^2)n\mathrm{d}x| \leqslant C\int |u|^3|n|\mathrm{d}x + C\int |n|\mathrm{d}x \leqslant \|n\|^2 + M\|u_x\|^2 + M \tag{3.6.26}$$

由式(3.6.22)～(3.6.26)可得

$$\|n\|^2 \leqslant \rho\|u_x\|^2 + (2\rho + M)\int_0^t \|u_x\|^2\mathrm{d}x + 2(1 + |\delta|)\int_0^t \|n\|^2\mathrm{d}t + Mt + M \tag{3.6.27}$$

从方程(3.6.17)和(3.6.27)可得

$$\|u_x\|^2 + \|n\|^2 \leqslant \rho\|n\|^2 + 3\rho\|u_x\|^2 + (2\alpha\rho + 4\rho + M)\int \|u_x\|^2\mathrm{d}t + (2\alpha\rho + \rho + 2 + 2|\delta|)\int_0^t \|n\|^2\mathrm{d}t + Mt + M$$

选取 $\rho = \frac{1}{4}$，上式可得

$$\|u_x\|^2 + \|n\|^2 \leqslant M\int_0^t (\|u_x\|^2 + \|n\|^2)\mathrm{d}t + M,\ \forall 0 \leqslant t \leqslant T$$

由 Gronwall 引理可得

$$\|u_x\|^2 + \|n\|^2 \leqslant M,\ \forall 0 \leqslant t \leqslant T$$

引理 3.6.2 证毕。

引理 3.6.1 和引理 3.6.2 推出

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u\|_{H^1} \leqslant M,\ \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u\|_{\infty} \leqslant M \tag{3.6.28}$$

引理 3.6.3 设引理 3.6.2 条件满足。且 $g \in C^1[0, +\infty)$，

$u_0 \in H^2$，则有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \| n_t \| + \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \| u_t \| \leqslant M_3, \forall T > 0$$

其中 $M_3 = M_3(T, \| u_0 \|_{H^2}, \| n_0 \|)$为正常数。

证明 从方程(3.6.2)得到

$$\| n_t \| \leqslant \| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u \bar{u}) \| + |\delta| \| n \| +$$

$$\| \gamma f(|u|^2) \| + \| h_2 \| \leqslant \| u_x \bar{u} + u \bar{u}_x \| +$$

$$|\delta| \| n \| + \| \gamma f(|u|^2) \| + \| h_2 \| \tag{3.6.29}$$

由不等式(3.6.28)可得

$$\| n_t \| \leqslant M$$

方程(3.6.1)对 t 微分得

$$\mathrm{i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_t + u_{xxt} - n_t u - n u_t + \mathrm{i}\alpha u_t + \beta g'(|u|^2)|u|^2 u_t +$$

$$\beta g'(|u|^2) u^2 \bar{u}_t + \beta g(|u|^2) u_t = 0 \tag{3.6.30}$$

式(3.6.30)和 u_t 在 H 上作内积再取虚部得

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u_t \|^2 + \alpha \| u_t \|^2 - \mathrm{Im}\int n_t u \bar{u}_t \mathrm{d}x +$$

$$\mathrm{Im}\int \beta g'(|u|^2) u^2 \bar{u}_t^2 \mathrm{d}x = 0$$

由上式可得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \| u_t \| \leqslant M$$

引理 3.6.4 设引理 3.6.3 的条件满足，且 $f \in C^1[0, +\infty)$，$n_0, h_2 \in H^1$，则有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \| n_x \| \leqslant M_4$$

其中 $M_4 = M_4(T, \| u_0 \|_{H^2}, \| n_0 \|_{H^1})$为正常数。

证明 方程(3.6.2)对 x 微分，得

$$n_{xt} + u_{xx} \bar{u} + 2u_x \bar{u}_x + u \bar{u}_{xx} + \delta n_x + \gamma f'(|u|^2)|u|^2_x + h'_2 = 0 \tag{3.6.31}$$

作式(3.6.31)和 n_x 在 H 上的内积,得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|n_x\|^2+\int u_{xx}\bar{u}n_x\mathrm{d}x+2\int u_x\bar{u}_xn_x\mathrm{d}x+$$

$$\int u\bar{u}_{xx}n_x\mathrm{d}x+\delta\|n_x\|^2+\gamma\int f'(|u|^2)u_x\bar{u}n_x\mathrm{d}x+$$

$$\gamma\int f'(|u|^2)u\bar{u}_xn_x\mathrm{d}x+\int h'_2n_x\mathrm{d}x=0$$

经过详细的计算可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|n_x\|^2\leqslant M\|n_x\|^2+M$$

由 Gronwall 引理,即得引理 3.6.4 的结论。

引理 3.6.5 设引理 3.6.4 的条件满足,且设 $g\in C^2[0,+\infty)$,$h_1,n_0\in H^1$,$u_0\in H^3$,则有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|n_{tx}\|+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_{tx}\|\leqslant M_5$$

其中 $M_5=M_5(T,\|u_0\|_{H^3},\|n_0\|_{H^1})$为正常数。

证明 由方程(3.6.31)可得

$$\|n_{xt}\|\leqslant\|u_{xx}\bar{u}\|+2\|u_x\bar{u}_x\|+\|u\bar{u}_{xx}\|+$$

$$\|\delta n_x\|+\|\gamma f'(|u|^2)|u|_x^2\|+\|h'_2\|\leqslant M\quad(3.6.32)$$

方程(3.6.1)对 x 和 t 微分可得

$$\mathrm{i}u_{ttx}+u_{xxxt}-n_{xt}u-n_xu_t-n_tu_x-nu_{xt}+\mathrm{i}\alpha u_{xt}+$$

$$\beta g''(|u|^2)|u|_t^2|u|_x^2u+\beta g'(|u|^2)|u|_{tx}^2u+\beta g'(|u|^2)|u|_x^2u_t+$$

$$\beta g'(|u|^2)|u|_t^2u_x+\beta g(|u|^2)u_{xt}=0$$

上式和 u_{xt}在 H 上作内积,再取虚部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{tx}\|^2+\alpha\|u_{tx}\|^2\leqslant$$

$$\int|n_{xt}u\bar{n}_{xt}|\mathrm{d}x+\int|n_xu_t\bar{u}_{xt}|\mathrm{d}x+\int|n_tu_x\bar{u}_{xt}|\mathrm{d}x+$$

$$\int|\beta g''(|u|^2)u\bar{u}_x(u_xu_t\bar{u}^2+\bar{u}_xu_t|u|^2+$$

$$u_t\bar{u}_t|u|^2+\bar{u}_x\bar{u}_tu^2)\mathrm{d}x+$$

$$\int|\beta g'(|u|^2)u\,\bar{u}_{xt}(u_{tx}\bar{u}-\bar{u}_x u_t+u_x\bar{u}_t+u\,\bar{u}_{tx})|\mathrm{d}x+$$

$$\int|\beta g'(|u|^2)(u_x\bar{u}+u\,\bar{u}_x)u_t\bar{u}_{tt}|\mathrm{d}x+$$

$$\int|\beta g'(|u|^2)(u_t\bar{u}+u\,\bar{u}_t)u_x\bar{u}_{xt}|\mathrm{d}x\leqslant M\|u_{xt}\|^2+M$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{xt}\|^2\leqslant M\|u_{xt}\|^2+M \tag{3.6.33}$$

引理 3.6.5 得证。

引理 3.6.6 设引理 3.6.5 条件满足，且设 $u_0\in H^4$，$n_0\in H^2$，则有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|n_{tt}\|+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_{tt}\|\leqslant M_6$$

其中 $M_6=M_6(T,\|u_0\|_{H^4},\|n_0\|_{H^2})$ 为正常数。

证明 式(3.6.2)对 t 微分，得

$$\begin{aligned}\|n_{tt}\|\leqslant&\|u_{xt}\bar{u}\|+\|u_x\bar{u}_t\|+\|u_t\bar{u}_x\|+\|u\,\bar{u}_{xt}\|+\\&\|\delta n_t\|+\|\gamma f'(|u|^2)(u_t\bar{u}-u\,\bar{u}_t)\|\leqslant\\&2\|u\|_\infty\|u_{xt}\|+2\|u_x\|_\infty|u_t|+\|\delta n_t\|+\\&2\|\gamma f'(|u|^2)\|_\infty\|u\|_\infty\|u_t\|\leqslant M\end{aligned} \tag{3.6.34}$$

方程(3.6.1)对 t 微分两次，得

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}u_{ttt}+u_{xxtt}-n_{tt}u-n_tu_t-nu_{tt}+\mathrm{i}\alpha u_{tt}+\\&\beta g''(|u|^2)|u|^2|u|_t^2u+\beta g'(|u|^2)|u|_{tt}^2u+\beta g'(|u|^2)|u|_t^2u_t+\\&\beta g(|u|^2)u_{tt}=0\end{aligned}$$

上式和 u_{tt} 在 H 上作内积，再取虚部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{tt}\|^2+\alpha\|u_{tt}\|^2-\mathrm{Im}\int n_{tt}u\,\bar{u}_{tt}\mathrm{d}x-2\mathrm{Im}\int n_tu_t\bar{u}_{tt}\mathrm{d}x+$$

$$\mathrm{Im}\int\beta g''(|u|^2)u\,\bar{u}_{tt}(u_t\bar{u}+u\,\bar{u}_t)^2\mathrm{d}x+$$

$$\mathrm{Im}\int\beta g'(|u|^2)u\,\bar{u}_{tt}|u|_{tt}^2\mathrm{d}x+$$

$$2\mathrm{Im}\int\beta g'(|u|^2)u_t\bar{u}_{tt}(u_t\bar{u}+u\bar{u}_t)\mathrm{d}x=0$$

由此可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{tt}\|^2+\alpha\|u_{tt}\|^2\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\|u\|_{\infty}(\|n_{tt}\|^2+\|u_{tt}\|^2)+\|u_t\|_{\infty}(\|n_t\|^2+\|u_{tt}\|^2)+$$

$$2\|\beta g''(|u|^2)\|_{\infty}\|u\|_{\infty}^2\|u_t\|_{\infty}^2(\|u\|^2+\|u_{tt}\|^2)+$$

$$\|\beta g'(|u|^2)\|_{\infty}\|u\|_{\infty}^2\|u_{tt}\|^2+$$

$$3\|\beta g'(|u|^2)\|_{\infty}\|u_t\|_{\infty}^2(\|u\|^2+\|u_{tt}\|^2)\leqslant$$

$$M\|u_{tt}\|^2+M$$

由 Gronwall 不等式，得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_{tt}\|\leqslant M,\ \forall T>0 \tag{3.6.35}$$

引理 3.6.7 设引理 3.6.6 条件满足，且设

(1)$g(s)\in C^{2k-2}$, $f(s)\in C^{2k-3}$, $0\leqslant s<\infty$, $k\geqslant 2$。

(2)$h_1\in H^{2k-2}$, $h_2\in H^{2k-3}$。

(3)$u_0\in H^{2k}$, $n_0\in H^{2k-2}$。则有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}(\|D_t^{k-1}D_xn\|+\|D_t^{k-1}D_xu\|+\|D_t^ku\|+\|D_t^kn\|)\leqslant M_7$$

其中 $M_7=M_7(T,\|u_0\|_{H^{2k}},\|n_0\|_{H^{2k-2}})$为正常数。

证明 我们能用归纳法证明引理成立。其证明类似于文献[138]中的引理 9。

由在文献[138]中所使用的 Galerkin 方法及其技巧，以及上述引理所作先验估计可得

定理 3.6.1 设

(1) $g(s)\in C^{2k-2}[0,\infty)$, $\beta g(s)\leqslant B_1s^{2-\sigma}+C_1$, $s>0$, $B_1>0$, $C_1>0$, $\sigma>0$

(2) $f(s)\in C^{2k-3}[0,\infty)$, $|f(s)|\leqslant B_2s^{\frac{3}{2}}+C_2$, $s>0$, $B_2>0$, $C_2>0$

(3) $h_1 \in H^{2k-2}$, $h_2 \in H^{2k-3}$

(4) $u_0 \in H^{2k}$, $n_0 \in H^{2k-2}$, $k \geqslant 2$

则存在问题(3.6.1)~(3.6.4)的整体唯一光滑解$(u(x,t), n(x,t))$,

$$u(x,t) \in L^\infty(0,T;H^{2k}(\Omega)),\ D_t^j u \in L^\infty(0,T;H^{2k-2j}(\Omega))$$

$$n(x,t) \in L^\infty(0,T;H^{2k-2}(\Omega)), D_t^3 n \in L^\infty(0,T;H^{2k-2j}(\Omega))$$

类似地,由引理3.6.1~3.6.4,可得我们在描述近似惯性流形中特别关心的情况。

定理 3.6.2 设引理3.6.2的条件满足,$u_0 \in H^2(\Omega)$,$n_0 \in H^1(\Omega)$,则存在问题(3.6.1)~(3.6.4)唯一的整体解$(u(x,t), n(x,t))$,

$$u(x,t) \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)), n(x,t) \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$$

我们注意到,如果 f 满足

$$|f(s)| \leqslant B_2 s^{\frac{3}{2}},\ s > 0, B_2 > 0$$

则所有上述先验估计是一致的,均与$\Omega=(-D,D)$无关。再应用文献[138]中的技巧,在问题(3.6.1)~(3.6.4)中令$D \to \infty$,可得

定理 3.6.3 设定理3.6.1条件满足。则存在唯一的整体光滑解$(u(x,t), n(x,t))$,使得

$$u(x,t) \in L^\infty(0,T;H^{2k}(\mathbf{R}),\ n(x,t) \in L^\infty(0,T;H^{2k-2}(\mathbf{R}))$$

为简单计,我们考虑较简单的如下LS方程组

$$\mathrm{i}u_t + u_{xx} - nu + \mathrm{i}\alpha u + h_1(x) = 0 \qquad (3.6.36)$$

$$n_t + |u|_x^2 + \delta n + \gamma f(|u|^2) + h_2(x) = 0 \qquad (3.6.37)$$

具初值

$$u|_{t=0} = u_0(x),\ n|_{t=0} = n_0(x),\ x \in \Omega = (-D, D), D > 0 \qquad (3.6.38)$$

和周期边界条件

$$u(x-D,t) = u(x+D,t),\ n(x-D,t) = n(x+D,t),\quad \forall x \in \mathbf{R}, t \geqslant 0 \qquad (3.6.39)$$

现构造问题(3.6.36)～(3.6.39)的近似惯性流形。为此设

(H_1)　$\alpha>0$，$\delta>0$；

(H_2)　$f(s)\in C^2[0,\infty)$，$|f(s)|\leqslant B_1 s^{\frac{3}{2}-\nu}+C_1$，$B_1>0$，$C_1>0$，$\nu>0$；

(H_3)　$h_1,h_2\in H^1(\Omega)$；

(H_4)　$u_0\in H^3(\Omega)$，$n_0\in H^1(\Omega)$。

注意到如满足条件(H_1)～(H_4)，则由定理 3.6.2 可知问题(3.6.36)～(3.6.39)存在唯一整体解$(u(x,t),n(x,t))$，而且有如下引理：

引理 3.6.8　设(H_1)～(H_4)成立，则有

$$\|n_x\|+\|n_{tx}\|\leqslant C_1,\ \forall t\geqslant t_1$$

其中：C_1 仅依赖于初值；t_1 依赖于初值和 R，$\|(u_0,n_0)\|_{H^2\times H^1}\leqslant R$。

引理 3.6.9　在假设(H_1)～(H_4)之下，有

$$\|u_{xx}\|+\|u_{xxx}\|\leqslant C_2,\ \forall t\geqslant t_2$$

其中：C_2 仅依赖于初值；t_2 依赖于初值和 R，$\|(u_0,n_0)\|_{H^3\times H^1}\leqslant R$。

为了构造问题(3.6.36)～(3.6.39)的近似惯性流形，我们写式(3.6.36)～(3.6.37)为抽象微分方程形式：

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-Au-B(u,n)+\mathrm{i}\alpha u+h_1=0 \qquad (3.6.40)$$

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}+H(u)+\delta n+\gamma f(|u|^2)+h_2=0 \qquad (3.6.41)$$

其中 $B(u,n)=nu$ 为双线性算子：$H^1\times H\to H$，$H(u)=|u|_x^2$ 为非线性算子：$H^1\to H$，$A=-\partial_{xx}$为无界自共轭算子，

$$D(A)=\{u\in H^2:u(x+2D)=u(x),n(x+2D)=n(x)\}$$

于是存在由 A 的特征向量组成的正交基$\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$，使得

$$Aw_j=\lambda_j w_j$$

$$0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_j\to+\infty,\ j\to\infty$$

$\forall m$，令 $P=P_m: H\to$ 子空间 $\{w_1,\cdots,w_m\}$ 的投影。$Q=Q_m=I-P_m$。

P_m 和 Q_m 作用方程(3.6.40)、(3.6.41)，可得

$$\begin{cases} \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-Ay-P_mB(u,n)+\mathrm{i}\alpha y+P_mh_1=0 \\ \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}-Az-Q_mB(u,n)+\mathrm{i}\alpha z+Q_mh_1=0 \end{cases} \tag{3.6.42}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+P_mH(u)+\delta p+\gamma P_mf(|u|^2)+P_mh_2=0 \\ \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+Q_mH(u)+\delta q+\gamma Q_mf(|u|^2)+Q_mh_2=0 \end{cases} \tag{3.6.43}$$

其中

$$y=P_mu,\ z=Q_mu,\ p=P_mn,\ q=Q_mn$$

由引理6.8和6.9，可得

$$\|A^{\frac{1}{2}}z\|,\|A^{\frac{1}{2}}z_t\|,\|A^{\frac{1}{2}}q\|,\|A^{\frac{1}{2}}q_t\|\leqslant C,\ \forall t\geqslant t_*$$

$$\|z\|,\|z_t\|,\|q\|,\|q_t\|\leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}},\ \forall t\geqslant t_*$$

定义映照 $\Phi: P_mH\times P_mH\to Q_mH\times Q_mH$，使得对任何 $(y,p)\in P_mH\times P_mH$，$\Phi(y,p)=(\Psi_1,\Psi_2)$，满足

$$-A\Psi_1-Q_mB(y,p)+Q_mh_1=0 \tag{3.6.44}$$

$$\delta\Psi_2+Q_mH(y+\Psi_1)+\gamma Q_mf(|y|^2)+Q_mh_2=0 \tag{3.6.45}$$

令 $\Sigma_1=\mathrm{graph}\,(\Phi)$，我们证明 Σ_1 为问题(3.6.36)～(3.6.39)的近似惯性流形。即有

定理3.6.4 设(H_1)～(H_4)成立。则存在常数 K，它依赖于初值，使得

$$\mathrm{dist}_{H^2\times H}((u(t),n(t)),\Sigma_1)\leqslant K\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}},\ \forall t\geqslant t_*$$

其中$(u(t),n(t))$为问题(3.6.36)～(3.6.39)的整体解；t_*仅依赖于初值和 R，$\|(u_0,n_0)\|_{H^3\times H^1}\leqslant R$。

证明 式(3.6.44)减去式(3.6.42)得

$$A\Psi_1 - Az = Q_m B(u,n) - Q_m B(y,p) - \mathrm{i}\alpha z - \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} =$$

$$Q_m B(u-y,n) + Q_m B(y,n-p) - \mathrm{i}\alpha z - \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} =$$

$$Q_m B(z,n) + Q_m B(y,q) - \mathrm{i}\alpha z - \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$\| A\Psi_1 - Az \| \leqslant \| B(z,n) \| + \| B(z,q) \| +$$

$$\alpha \| z \| + \| \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \| \leqslant \| n \|_\infty \| z \| + \| y \|_\infty \| q \| +$$

$$\alpha \| z \| + \| \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \| \leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} \tag{3.6.46}$$

式(3.6.43)减去式(3.6.45)得

$$\delta\Psi_2 - \delta q = Q_m H(n) - Q_m H(y+\Psi_1) +$$

$$\gamma Q_m f(|u|^2) - \gamma Q_m f(|y|^2) + \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{3.6.47}$$

因

$$H(u) - H(u+\Psi_1) = |u|_x^2 - |y+\Psi|_x^2 =$$

$$(u_x - y_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi_1)\bar{u} + (y_x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Psi_1)(\bar{u} - \bar{y} - \bar{\Psi}_1) +$$

$$u(\bar{u}_x - \bar{y}_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bar{\Psi}_1) - (u - y - \Psi_1)(\bar{y}_x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bar{\Psi}_1)$$

因此

$$\| H(u) - H(u+\Psi_1) | \leqslant 2 \| u \|_\infty \| A^{\frac{1}{2}}\Psi_1 - A^{\frac{1}{2}}z \| +$$

$$2 \| \Psi_1 - z \|_\infty \| A^{\frac{1}{2}}y + A^{\frac{1}{2}}\Psi_1 \| \tag{3.6.48}$$

由式(3.6.44)有

$$\| A\Psi_1 \| \leqslant \| B(y,p) \| + \| h_1 \| \leqslant \| y \|_\infty \| p \| + \| h_1 \| \leqslant$$

$$C \| y \|_{H^1} \| n \| + \| h_1 \| \leqslant C$$

于是

$$\| A^{\frac{1}{2}}\Psi_1 \| \leqslant C \tag{3.6.49}$$

从式(3.6.48)、(3.6.49)有

$$\|H(u)-H(y+\Psi_1)\|\leqslant C\|A^{\frac{1}{2}}\Psi_1-A^{\frac{1}{2}}z\|+$$
$$C(\|A^{\frac{1}{2}}y\|+\|A^{\frac{1}{2}}\Psi_1)\|\Psi_1-z\|_{H^1}\leqslant$$
$$C\|A^{\frac{1}{2}}\Psi_1-A^{\frac{1}{2}}z\|\leqslant C\lambda_{m+1}^{-1} \tag{3.6.50}$$
$$\|f(|u|^2)-f(|y|^2)\|=\|f'(\xi)(|u|^2-|y|^2)\|\leqslant$$
$$C\|2(u+y)\|\|z\|\leqslant C(\|u\|_\infty+\|y\|_\infty)\|z\|\leqslant$$
$$C\|z\|\leqslant C\lambda_{m+1}^{-1}\|Az\|\leqslant C\lambda_{m+1}^{-1} \tag{3.6.51}$$

由方程(3.6.47),不等式(3.6.50)和式(3.6.51)得

$$\|\Psi_2-q\|\leqslant C\lambda_{m+1}^{-1}+\left\|\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right\|\leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} \tag{3.6.52}$$

因此

$$\mathrm{dist}_{H^2\times H}((u(t),n(t)),\Sigma)\leqslant\|u(t)-(y(t)+\Psi_1)\|_{H^2}+$$
$$\|n(t)-(p(t)+\Psi_2)\|\leqslant\|A\Psi_1-Az\|+$$
$$\|\Psi_2-q\|\leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}$$

定理3.6.4证毕。

3.7 一维铁磁链方程

考虑如下一维铁磁链方程

$$\partial_t\mathbf{u}=-\alpha\mathbf{u}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{u}_{xx})+\beta(\mathbf{u}\times\mathbf{u}_{xx})(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}^+ \tag{3.7.1}$$

具初值条件

$$\mathbf{u}(x,0)=\mathbf{u}_0(x),|\mathbf{u}_0(x)|=1,x\in\Omega=(-D,D),D>0 \tag{3.7.2}$$

和周期边界条件

$$\mathbf{u}(x-D,t)=\mathbf{u}(x+D,t),\ \forall x\in\mathbf{R},t\geqslant 0 \tag{3.7.3}$$

其中:"×"表示在$\mathbf{R}^3$中向量的叉积;$\mathbf{u}=(u^1,u^2,u^3):\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^3$为旋矢量场;$\alpha,\beta$为常数。$\alpha>0$为Gilbert阻尼常数,1995年,郭、

王在文献[143]中研究问题(3.7.1)～(3.7.3)近似惯性流形的存在性。在文献[77]中我们知道如 $\mathbf{u}_0\in H^2(\Omega)$，$|\mathbf{u}_0(x)|=1$，则问题(3.7.1)～(3.7.3)具有唯一整体光滑解 $\mathbf{u}(x,t)$，使得

$$\mathbf{u}(x,t)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;H^2(\Omega))$$

为了构造近似惯性流形，我们需作对 t 一致的先验估计。

引理 3.7.1 设 $|\mathbf{u}_0(x)|=1$，$x\in\mathbf{R}$，则对问题(3.7.1)～(3.7.3)的光滑解有

$$|\mathbf{u}(x,t)|^2=1,\ (x,t)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+ \tag{3.7.4}$$

$$\|\mathbf{u}_x(t)\|^2\leqslant\|\mathbf{u}_x(0)\|^2,\ t\in\mathbf{R}^+ \tag{3.7.5}$$

证明 点乘式(3.7.1)以 $\mathbf{u}$，得

$$\frac{\partial}{\partial t}|\mathbf{u}(x,t)|^2=0,\ (x,t)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+$$

因而式(3.7.4)成立。作方程(3.7.1)和 $\mathbf{u}_{xx}$ 的内积，得

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{u}_x\|^2=-\alpha\int_\Omega(\mathbf{u}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{u}_{xx}))\cdot\mathbf{u}_{xx}\mathrm{d}x=$$

$$-\alpha\int_\Omega(\mathbf{u}_{xx}\times\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{u}_{xx})\mathrm{d}x=\alpha\int_\Omega|\mathbf{u}\times\mathbf{u}_{xx}|^2\mathrm{d}x$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{u}_x\|^2\leqslant 0$$

这就推出式(3.7.5)。

引入 H 的子空间 H_ρ

$$H_\rho=\{\mathbf{u}\in H:|\mathbf{u}(x)|=1,\|\mathbf{u}_x\|\leqslant\rho\}$$

引理 3.7.1 表明 H_ρ 为 H 的不变子空间。今后设 $\mathbf{u}_0\in H_\rho$。

引理 3.7.2 设引理 3.7.1 的条件满足，则 $\mathbf{u}$ 为问题(3.7.1)～(3.7.3)的光滑解当且仅当 $\mathbf{u}$ 为如下问题的光滑解：

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}=\alpha\mathbf{u}_{xx}+\beta\mathbf{u}\times\mathbf{u}_{xx}+\alpha|\mathbf{u}_x|^2\mathbf{u} \tag{3.7.6}$$

$$\mathbf{u}(x,0)=\mathbf{u}_0(x),|\mathbf{u}_0(x)|=1,x\in\Omega \tag{3.7.7}$$

$$\mathbf{u}(x-D,t)=\mathbf{u}(x+D,t),\ x\in\mathbf{R},t\in\mathbf{R}^+ \tag{3.7.8}$$

证明 见文献[77,引理 2]。

基于引理 3.7.2,今后我们仅需研究问题(3.7.6)~(3.7.8)。

引理 3.7.3 设 $\mathbf{u}_0 \in H^2 \cap H_\rho$,则问题(3.7.6)~(3.7.8)的解有

$$\| \mathbf{u}_{xx}(t) \| \leqslant C_1, \int_t^{t+1} \| \mathbf{u}_{xxx} \|^2 \mathrm{d}t \leqslant C_1, \ \forall\, t \geqslant t_1$$

其中:C_1 为依赖于参数$(\alpha,\beta,\rho,\Omega)$的常数;$t_1$ 依赖于参数$(\alpha,\beta,\rho,\Omega)$和 R, $\| \mathbf{u}_0 \|_{H^2} \leqslant R$。

为方便计,今后以 C 表示任何仅依赖于参数$(\alpha,\beta,\rho,\Omega)$的常数。

证明 由$|\mathbf{u}(x,t)|=1$ 可知,如$|\mathbf{u}_x| \neq 0$,$\mathbf{u}$,$\mathbf{u}_x$ 和 $\mathbf{u} \times \mathbf{u}_x$ 组成 $\mathbf{R}^3$的一组正交基。令 $\mathbf{u}_{xx} = \alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{u}_x + \alpha_3 \mathbf{u} \times \mathbf{u}_x$。简单计算可得

$$\alpha_1 = -|\mathbf{u}_x|^2,\ \alpha_2 = \frac{\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_{xx}}{|\mathbf{u}_x|^2},\ \alpha_3 = \frac{(\mathbf{u} \times \mathbf{u}_x) \cdot \mathbf{u}_{xx}}{|\mathbf{u}_x|^2}$$

式(3.7.6)对 x 微分 2 次,再和 $\mathbf{u}_{xx}$作内积可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| \mathbf{u}_{xx} \|^2 = \int_\Omega \mathbf{u}_{xx} \cdot (\alpha \mathbf{u}_{xx} + \beta \mathbf{u} \times \mathbf{u}_{xx} + \alpha |\mathbf{u}_x|^2 \mathbf{u})_{xx} \mathrm{d}x =$$

$$-\alpha \| \mathbf{u}_{xxx} \|^2 - \beta \int_\Omega (\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_{xx}) \cdot \mathbf{u}_{xxx} \mathrm{d}x -$$

$$\alpha \int_\Omega \mathbf{u}_{xxx} \cdot (|\mathbf{u}_x|^2 \mathbf{u}_x + 2\mathbf{u}(\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_{xx})) \mathrm{d}x \tag{3.7.9}$$

式(3.7.4)对 x 微分 3 次,可得

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_{xxx} = -\frac{3}{2}(|\mathbf{u}_x|^2)_x \tag{3.7.10}$$

利用式(3.7.10),估计式(3.7.9)右端的每一项:

$$\int_\Omega \mathbf{u}_{xxx} \cdot (|\mathbf{u}_x|^2 \mathbf{u}_x) \mathrm{d}x =$$

$$-\int_\Omega |\mathbf{u}_x|^2 |\mathbf{u}_{xx}|^2 \mathrm{d}x - 2\int_\Omega |\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_{xx}|^2 \mathrm{d}x \tag{3.7.11}$$

$$\int_\Omega \mathbf{u}_{xxx} \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_{xx})) \mathrm{d}x = \int_\Omega (\mathbf{u}_{xxx} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_{xx}) \mathrm{d}x =$$

$$-3\int|\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{u}_{xx}|^2\mathrm{d}x \tag{3.7.12}$$

$$\int_\Omega(\mathbf{u}_x\times\mathbf{u}_{xx})\cdot\mathbf{u}_{xxx}\mathrm{d}x=$$

$$\int_\Omega\left[\mathbf{u}_x\times\left(-|\mathbf{u}_x|^2\mathbf{u}+\frac{(\mathbf{u}\times\mathbf{u}_x)\cdot\mathbf{u}_{xx}}{|\mathbf{u}_x|^2}(\mathbf{u}\times\mathbf{u}_x)\right]\cdot\mathbf{u}_{xxx}\mathrm{d}x=$$

$$\int_\Omega|\mathbf{u}_x|^2(\mathbf{u}\times\mathbf{u}_x)\cdot\mathbf{u}_{xxx}\mathrm{d}x+$$

$$\int_\Omega\frac{(\mathbf{u}\times\mathbf{u}_x)\cdot\mathbf{u}_{xx}}{|\mathbf{u}_x|^2}(\mathbf{u}_x\times(\mathbf{u}\times\mathbf{u}_x))\cdot\mathbf{u}_{xxx}\mathrm{d}x=$$

$$\int_\Omega|\mathbf{u}_x|^2(\mathbf{u}\times\mathbf{u}_x)\cdot\mathbf{u}_{xxx}\mathrm{d}x-\frac{3}{2}\int_\Omega(|u_x|^2)_x(\mathbf{u}\times\mathbf{u}_x)\cdot\mathbf{u}_{xx}\mathrm{d}x=$$

$$\int_\Omega|\mathbf{u}_x|^2(\mathbf{u}\times\mathbf{u}_x)\cdot\mathbf{u}_{xxx}\mathrm{d}x+\frac{3}{2}\int_\Omega|\mathbf{u}_x|^2(\mathbf{u}\times\mathbf{u}_x)\cdot\mathbf{u}_{xx}\mathrm{d}x+$$

$$\frac{3}{2}\int_\Omega|\mathbf{u}_x|^2(\mathbf{u}\times\mathbf{u}_x)\cdot\mathbf{u}_{xxx}\mathrm{d}x=$$

$$\frac{5}{2}\int_\Omega|\mathbf{u}_x|^2(\mathbf{u}\times\mathbf{u}_x)\cdot\mathbf{u}_{xxx}\mathrm{d}x \tag{3.7.13}$$

由式(3.7.9)、(3.7.11)～(3.7.13)得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{u}_{xx}\|^2+\alpha\|\mathbf{u}_{xxx}\|^2=\alpha\int_\Omega|\mathbf{u}_x|^2|\mathbf{u}_{xx}|^2\mathrm{d}x+$$

$$8\alpha\int_\Omega|\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{u}_{xx}|^2\mathrm{d}x-\frac{5}{2}\beta\int_\Omega|\mathbf{u}_x|^2(\mathbf{u}\times\mathbf{u}_x)\times\mathbf{u}_{xxx}\mathrm{d}x$$

$$\cdot \tag{3.7.14}$$

另外，

$$\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\mathbf{u}_x|^4\mathrm{d}x=$$

$$\int_\Omega|\mathbf{u}_x|^2\mathbf{u}_x\cdot(\alpha\mathbf{u}_{xx}+\beta\mathbf{u}\times\mathbf{u}_{xx}+\alpha|\mathbf{u}_x|^2\mathbf{u})_x\mathrm{d}x=$$

$$\int_\Omega|\mathbf{u}_x|^2\mathbf{u}_x(\alpha\mathbf{u}_{xxx}+\beta\mathbf{u}_x\times\mathbf{u}_{xx}+\beta\mathbf{u}\times\mathbf{u}_{xxx}+$$

$$\alpha\,\mathbf{u}_x|^2\mathbf{u}_x+2\alpha\mathbf{u}(\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{u}_{xx}))\mathrm{d}x=$$

$$-\alpha\int_{\Omega}|\mathbf{u}_x|^2|\mathbf{u}_{xx}|^2\mathrm{d}x-2\alpha\int_{\Omega}|\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{u}_{xx}|^2\mathrm{d}x+$$

$$\alpha\int_{\Omega}|\mathbf{u}_x|^6\mathrm{d}x-\beta\int_{\Omega}|\mathbf{u}_x|^2(\mathbf{u}\times\mathbf{u}_x)\cdot\mathbf{u}_{xxx}\mathrm{d}x$$

即有

$$-\beta\int_{\Omega}|\mathbf{u}_x|^2(\mathbf{u}\times\mathbf{u}_x)\cdot\mathbf{u}_{xxx}\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}|\mathbf{u}_x|^4\mathrm{d}x+\alpha\int_{\Omega}|\mathbf{u}_x|^2|\mathbf{u}_{xx}|^2\mathrm{d}x+\tag{3.7.15}$$

$$2\alpha\int_{\Omega}|\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{u}_{xx}|^2\mathrm{d}x-\alpha\int_{\Omega}|\mathbf{u}_x|^6\mathrm{d}x$$

将式(3.7.15)代入式(3.7.14)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{u}_{xx}\|^2-\frac{5}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}|\mathbf{u}_x|^4\mathrm{d}x+2\alpha\|\mathbf{u}_{xxx}\|^2+5\alpha\int_{\Omega}|\mathbf{u}_x|^6\mathrm{d}x=$$

$$7\alpha\int_{\Omega}|\mathbf{u}_x|^2|\mathbf{u}_{xx}|^2\mathrm{d}x+26\alpha\int_{\Omega}|\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{u}_{xx}|^2\mathrm{d}x\tag{3.7.16}$$

由于

$$7\alpha\int_{\Omega}|\mathbf{u}_x|^2|\mathbf{u}_{xx}|^2\mathrm{d}x+26\alpha\int_{\Omega}|\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{u}_{xx}|^2\mathrm{d}x\leqslant$$

$$33\alpha\int_{\Omega}|\mathbf{u}_x|^2|\mathbf{u}_{xx}|^2\mathrm{d}x\leqslant5\alpha\int_{\Omega}|\mathbf{u}_x|^6\mathrm{d}x+$$

$$C\int_{\Omega}|\mathbf{u}_{xx}|^3\mathrm{d}x\leqslant5\alpha\int_{\Omega}|\mathbf{u}_x|^6\mathrm{d}x+C\|\mathbf{u}_x\|^{\frac{5}{4}}\|\mathbf{u}_{xxx}\|^{\frac{7}{4}}\leqslant$$

$$5\alpha\int_{\Omega}|\mathbf{u}_x|^6\mathrm{d}x+\frac{\alpha}{2}\|\mathbf{u}_{xxx}\|^2+C$$

于是由式(3.7.16)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{u}_{xx}\|^2-\frac{5}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}|\mathbf{u}_x|^4\mathrm{d}x+\frac{3}{2}\alpha\|\mathbf{u}_{xxx}\|^2\leqslant C,\tag{3.7.17}$$

由 $\mathbf{u}_x$ 是周期的，$\int_{\Omega}\mathbf{u}_{xx}(x)\mathrm{d}x=0$。利用 Poincare 不等式得

$$\frac{\alpha}{2}\|\mathbf{u}_{xxx}\|^2\geqslant K\|\mathbf{u}_{xx}\|^2\tag{3.7.18}$$

因而从式(3.7.17)推得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\mathbf{u}_{xx}\|^2-\frac{5}{4}\int_\Omega|\mathbf{u}_x|^4\mathrm{d}x)+$$
$$K(\|\mathbf{u}_{xx}\|^2-\frac{5}{4}\int_\Omega|\mathbf{u}_x|^4\mathrm{d}x)+\alpha\|\mathbf{u}_{xxx}\|^2\leqslant C \quad (3.7.19)$$

即有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\mathbf{u}_{xx}\|^2-\frac{5}{4}\int_\Omega|\mathbf{u}_x|^4\mathrm{d}x)+K(\|\mathbf{u}_{xx}\|^2-$$
$$\frac{5}{4}\int_\Omega|\mathbf{u}_x|^4\mathrm{d}x)\leqslant C$$

由 Gronwall 引理得

$$\|\mathbf{u}_{xx}(t)\|^2-\frac{5}{4}\int_\Omega|\mathbf{u}_x|^4\mathrm{d}x\leqslant$$
$$(\|\mathbf{u}_{xx}(0)\|^2-\frac{5}{4}\int_\Omega|\mathbf{u}_x(0)|^4\mathrm{d}x)\mathrm{e}^{-Kt}+\frac{C}{K}\leqslant$$
$$\|\mathbf{u}_{xx}(0)\|^2\mathrm{e}^{-Kt}+C\leqslant R^2\mathrm{e}^{-Kt}+C,t\geqslant 0\leqslant 2C,t\geqslant t_* \quad (3.7.20)$$

其中 $t_*=\frac{1}{K}\ln\frac{R^2}{C}$。基于插值不等式

$$\|\mathbf{u}_x\|_4\leqslant C\|\mathbf{u}_x\|^{\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_{xx}\|^{\frac{1}{4}}\frac{5}{4}\|\mathbf{u}_x\|_4^4\leqslant$$

$$C\|\mathbf{u}_x\|^3\|\mathbf{u}_{xx}\|\leqslant C\|\mathbf{u}_{xx}\|\leqslant\frac{1}{2}\|\mathbf{u}_{xx}\|^2+C \quad (3.7.21)$$

由式(3.7.20)、(3.7.21)得

$$\|\mathbf{u}_{xx}(t)\|\leqslant C,\ \forall\ t\geqslant t_* \quad (3.7.22)$$

由式(3.7.22),(3.7.19)对 t 积分,$t\in(t,t+1)$得

$$\int_t^{t+1}\|\mathbf{u}_{xxx}\|^2\mathrm{d}t\leqslant C,\ \forall\ t\geqslant t_*$$

引理 3.7.3 得证。

引理 3.7.4 设 $u_0\in H^{k+1}\cap H_p,k\geqslant 1$,则有

$$\|D_x^{k+1}\mathbf{u}(t)\|^2\leqslant C_k,\ t\geqslant t_k$$

$$\int_t^{t+1}\|D_x^{k+2}\mathbf{u}(t)\|^2\mathrm{d}t\leqslant C_k,\ t\geqslant t_k$$

其中:常数 C_k 仅依赖于参数和 k;t_k 依赖于参数 k 和 R;$\|\mathbf{u}_0\|_{H^2}\leqslant R$。

证明 用归纳法证明,$k\geqslant 1$

(1)$k=1$,由引理 3.7.4 归结为引理 3.7.3,已证。

(2)设引理直至 $k-1$ 阶成立。现证 k 阶成立($k\geqslant 2$),对式(3.7.6)对 x 微分($k+1$)次,再与 $D_x^{k+1}\mathbf{u}$ 作内积,得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D_x^{k+1}\mathbf{u}\|^2+\alpha\|D_x^{k+2}\mathbf{u}\|^2=$$

$$\beta\sum_{i=0}^{k-1}C_{k+1}^i\int_\Omega(D_x^{k+1-i}\mathbf{u}\times D_x^i\mathbf{u}_{xx})\cdot D_x^{k+1}\mathbf{u}\mathrm{d}x+$$

$$\alpha\sum_{i=0}^{k+1}C_{k+1}^i\int_\Omega D_x^i|\mathbf{u}_0|^2(D_x^{k+1-i}\mathbf{u}\cdot D_x^{k+1}\mathbf{u})\mathrm{d}x \qquad (3.7.23)$$

简单计算可得

$$\beta\sum_{i=0}^{k-1}C_{k+1}^i\int_\Omega(D_x^{k-1-i}\mathbf{u}\times D_x^i\mathbf{u}_{xx})\cdot D_x^{k+1}\mathbf{u}\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C\|D_x^{k+1}\mathbf{u}\|\|D_x^{k+2}\mathbf{u}\|+C\|D_x^{k+1}\mathbf{u}\|^2\leqslant$$

$$\frac{\alpha}{4}\|D_x^{k+2}\mathbf{u}\|^2+C\|D_x^{k+1}\mathbf{u}\|^2 \qquad (3.7.24)$$

$$\alpha\sum_{i=0}^{k-1}C_{k+1}^i\int_\Omega D_x^i|\mathbf{u}_0|^2(D_x^{k+1-i}\mathbf{u}\cdot D_x^{k+1}\mathbf{u})\mathrm{d}x\leqslant\|D_x^{k+1}\mathbf{u}\|^2+$$

$$C\|D_x^{k+1}\mathbf{u}\|^2\|D_x^k\mathbf{u}\|^2+C\|D_x^{k+1}\mathbf{u}\|\ \|D_x^{k+2}\mathbf{u}\|\leqslant$$

$$\frac{\alpha}{4}\|D_x^{k+2}\mathbf{u}\|^2+C\|D_x^{k+1}\mathbf{u}\|^2 \qquad (3.7.25)$$

由式(3.7.23)～(3.7.25)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D_x^{k+1}\mathbf{u}\|^2+\alpha\|D_x^{k+2}\mathbf{u}\|^2\leqslant C\|D_x^{k+1}\mathbf{u}\|^2\leqslant$$

$$\frac{\alpha}{2}\|D_x^{k+2}\mathbf{u}\|^2+C \qquad (3.7.26)$$

由此推出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D_x^{k+1}\mathbf{u}\|^2+\frac{\alpha}{2K}\|D_x^{k+1}\mathbf{u}\|^2\leqslant C \qquad (3.7.27)$$

其中

$$\| D_x^{k+1}\mathbf{u} \| \leqslant K \| D_x^{k+2}\mathbf{u} \| \ (\int D_x^{k-1}\mathbf{u}\mathrm{d}x = 0)$$

于是可得

$$\| D_x^{k-1}\mathbf{u} \|^2 \leqslant C,\ t \geqslant t_* \qquad (3.7.28)$$

$$\int_t^{t+1} \| D_x^{k+1}\mathbf{u} \| \mathrm{d}t \leqslant C,\ t \geqslant t_* \qquad (3.7.29)$$

引理 3.7.4 得证。

引理 3.7.5 设 $\mathbf{u}_0 \in H^{k+2} \cap H_p, k \geqslant 0$,则存在常数 C_k 仅依赖于参数和 k,使得

$$\| D_x^k \mathbf{u}_t \| \leqslant C_k, t \geqslant t_k$$

其中:t_k 依赖于参数;k 和 R,$\| \mathbf{u}_0 \|_{H^2} \leqslant R$。

证明 式(3.7.6)对 x 微分 k 次。应用引理 3.7.4,易得引理的结论。

现构造铁磁链方程组周期初值问题的近似惯性流形。为此,写式(3.7.6)~(3.7.8)为抽象方程形式:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} + \alpha A\mathbf{u} + B(\mathbf{u},\mathbf{u}) + R(\mathbf{u}) = 0 \qquad (3.7.30)$$

其中 $A = -\partial_{xx}$,为无界自共轭算子。$D(A) = \{\mathbf{u} \in H^2 : \mathbf{u}$ 满足式(3.7.8)$\}$

$B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\beta \mathbf{u} \times \mathbf{v}_{xx}$为双线性算子。$R(\mathbf{u}) = -\alpha |\mathbf{u}_x|^2$ 为非线性算子:$D(A) \to H$。设$\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$为 H 的正交基,它由 A 的特征向量组成:

$$Aw_j = \lambda_j w_j, 0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_j \to +\infty, j \to \infty$$

给定 m,令 $P = P_m : H \to \mathrm{span}\ \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$的投影,$Q = Q_m = I - P_m$,$P_m$ 和 Q_m 作用于式(3.7.30)得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \alpha Ap + P_m B(p+q, p+q) + P_m R(p+q) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \alpha Aq + Q_m B(p+q, p+q) + Q_m R(p+q) = 0 \end{cases} \qquad (3.7.31)$$

其中 $p=P_m\mathbf{u}$，$q=Q_m\mathbf{u}$。

由引理 3.7.1,引理 3.7.4 和引理 3.7.5,有

$$\|\mathbf{u}\|, \|A^{\frac{3}{2}}\mathbf{u}\| \leqslant C, t \geqslant t_* \qquad (3.7.32)$$

$$\|A^k\mathbf{u}\|, \|A^{k+1}\mathbf{u}\|, \|A^{k+\frac{3}{2}}\mathbf{u}\|, \|A^k\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\| \leqslant C_k, t \geqslant t_* \qquad (3.7.33)$$

其中常数 C_k,t_k 如前。注意到

$$\|A^{\frac{1}{2}}\mathbf{u}\| = \|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\|, \mathbf{u} \in H^1$$

$$\|P_m\mathbf{u}\| \leqslant \|\mathbf{u}\|, \|Q_m\mathbf{u}\| \leqslant \|\mathbf{u}\|, \mathbf{u} \in H \qquad (3.7.34)$$

$$\|A^{\alpha}\mathbf{u}\| \geqslant \lambda_{m+1}^{\alpha}\|\mathbf{u}\|, \alpha > 0, \mathbf{u} \in Q_m D(A^{\alpha})$$

由式(3.7.33)、(3.7.34)推出

$$\|q\|, \|Aq\|, \|A^{\frac{3}{2}}q\|, \|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q\| \leqslant C_k\lambda_{m+1}^{-k}, t \geqslant t_k \qquad (3.7.35)$$

定义映照 $\Phi: P_mH \to Q_mH$,使得对 $p \in P_mH$,$\Phi(p)=\Psi$ 为如下所确定

$$\alpha A\Psi + Q_mB(p,p) + Q_mR(p) = 0 \qquad (3.7.36)$$

令 $\Sigma=\mathrm{Guaph}\ (\Phi)$,可证 Σ 为问题(3.7.6)～(3.7.8)的近似惯性流形。

定理 3.7.1 设 $\mathbf{u}_0 \in H^{k+2} \cap H_p$,则对任何整数 k,存在常数 C_k 依赖于参数和 k,使得

$$\mathrm{dist}_{H^2}(\mathbf{u}(t), \Sigma) \leqslant C_k\lambda_{m+1}^{-k}, t \geqslant t_k$$

其中:$\mathbf{u}(t)$为问题(3.7.6)～(3.7.8)的解;t_k 依赖于参数;k 和 R,$\|\mathbf{u}_0\|_{H^2} \leqslant R$。

证明 式(3.7.36)减去式(3.7.31)得

$$\alpha A\Psi - \alpha Aq = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + Q_mB(p+q, p+q) - Q_mB(p,q) +$$

$$Q_mR(p+q)-Q_mR(p)=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+Q_mB(q,p+q)+$$
$$Q_mB(p,q)+Q_mR(p-q)-Q_mR(p) \tag{3.7.37}$$

由于

$$\|B(q,p+q)-B(p,q)\|\leqslant\beta\|q\times A\mathbf{u}\|+$$
$$\beta\|p\times Aq\|\leqslant\beta\|A\mathbf{u}\|_{\infty}\|q\|+\beta\|p\|\,|Aq\|_{\infty}\leqslant$$
$$\beta\|A^{\frac{3}{2}}\mathbf{u}\|\|q\|+\beta\|p\|\|A^{\frac{3}{2}}q\|\leqslant C_k\lambda_{m+1}^{-k} \tag{3.7.38}$$
$$\|R(p+q)-R(p)\|=\alpha\||\mathbf{u}_x|^2\mathbf{u}-|p_x|^2p\|\leqslant$$
$$\alpha\|(|\mathbf{u}_x|^2-|p_x|^2)\mathbf{u}\|+\alpha\||p_x|^2(\mathbf{u}-p)\|\leqslant$$
$$\alpha(|\mathbf{u}_x|+|p_x|)(|\mathbf{u}_x|-|p_x|)\mathbf{u}\|+\alpha\||p_x|^2q\|\leqslant$$
$$\alpha(\|\mathbf{u}_x\|_{\infty}+\|p_x\|_{\infty})\|q_x\|_{\infty}\|\mathbf{u}\|+\alpha\|p_x\|_{\infty}^2\|q\|\leqslant$$
$$2\alpha\|A\mathbf{u}\|\|Aq\|\|\mathbf{u}\|+\alpha\|A\mathbf{u}\|\|q\|\leqslant C_k\lambda_{m+1}^{k} \tag{3.7.39}$$

由式(3.7.37)～(3.7.39)得

$$\|A\Psi-Aq\|\leqslant C_k\lambda_{m+1}^{-k},\ t\geqslant t_k$$

因此

$$\mathrm{dist}_{H^2}(\mathbf{u}(t),\Sigma)\leqslant\|\mathbf{u}(t)-(p(t)+\Phi(p(t))\|_{H^2}\leqslant$$
$$\|\Phi(p(t))-q(t)\|_{H^2}\leqslant$$
$$\|A\Psi-Aq\|\leqslant C_k\lambda_{m+1}^{-k},\qquad t\geqslant t_k$$

定理 3.7.1 证毕。

3.8 非线性 Schrödinger 方程

1988 年，Ghidaglia 在文献[13]中研究一类具阻尼的非线性 Schrödinger 方程的整体吸引子的存在性及其维数估计。1996 年，郭、王在文献[144]中进一步构造了它的两类近似惯性流形。

考虑如下的非线性 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(|u|^2)u+\mathrm{i}\alpha u+h=0 \tag{3.8.1}$$

具初值条件

$$u(x,0)=u_0(x), x\in\Omega=(-D,D) \qquad (3.8.2)$$

和以下边界条件之一：

Dirichlet $u(-D,t)=u(D,t)=0 \qquad t\in\mathbf{R}$

Neumann $\frac{\partial u}{\partial x}(-D,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(D,t)=0 \qquad t\in\mathbf{R}$

周期 $u(x+2D,t)=u(x,t), \qquad x\in\mathbf{R}, t\in\mathbf{R}^+$

(3.8.3)

其中：u 为未知复值函数；$\alpha>0$ 为常数。$h(x)\in L^2(\Omega)$，$g(s)$ $(0\leqslant s<\infty)$ 为实值光滑函数满足

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{G_+(s)}{s^3}=0 \qquad (3.8.4)$$

和∃ $w>0$，使得

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{f(s)-wG(s)}{s^3}\leqslant 0 \qquad (3.8.5)$$

其中 $f(s)=sg(s)$，$G(s)=\int_0^s g(\tau)\mathrm{d}\tau$，$G_+(s)=\max\{G(s),0\}$。在文献[13]中已证明在条件(3.8.4)、(3.8.5)之下，对于任何 $u_0\in H^1(\Omega)$，问题(3.8.1)～(3.8.3)具有唯一整体解 $u(x,t)$，使得

$$u(x,t)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;H^1(\Omega))$$

而且，如 $u_0(x)\in H^2(\Omega)$，则 $u(x,t)$ 满足

$$\|u\|,\|u_x\|,\|u_{xx}\|,\|u_t\|,\|u\|_\infty,\|u_x\|_\infty\leqslant K,$$
$$0\leqslant t\leqslant T \qquad (3.8.6)$$

和

$$\|u\|,\|u_x\|,\|u_{xx}\|,\|u_t\|,\|u\|_\infty,\|u_x\|_\infty\leqslant C, t\geqslant t_* \qquad (3.8.7)$$

其中：K 表示为依赖于参数(α,Ω,g)和 T,R 的常数；$\|u_0\|_{H^2}\leqslant R$；t_* 依赖于参数(α,Ω,g)和 R，$\|u_0\|_{H^2}\leqslant R$，C 在这里以及以后均表示仅依赖参数(α,Ω,g)的常数。

为了构造近似惯性流形。我们需要作更高阶的一致的先验估

计。

引理 3.8.1 设条件(3.8.4)、(3.8.5)成立。且 $u_0\in H^3(\Omega)$，$h(x)\in H^1(\Omega)$。则对问题(3.8.1)～(3.8.3)的解 $u(x,t)$有估计

$$\| u_{xxx}(\cdot,t)\| \leqslant C,\ t\geqslant t_*$$

其中：常数 C 仅依赖于参数(α,Ω,g)；t_*依赖于参数(α,Ω,g)和 R；$\| u_0\|_{H^2}\leqslant R$。

证明 式(3.8.1)对 x 微分得

$$\mathrm{i}u_{tx}+u_{xxx}+\mathrm{i}\alpha u_x+g'(|u|^2)|u|_x^2u+g(|u|^2)u_x+h'(x)=0 \tag{3.8.8}$$

作式(3.8.8)和 $u_{xxxt}+\alpha u_{xxx}$的内积得

$$(\mathrm{i}u_{tx}+u_{xxx}+\mathrm{i}\alpha u_x+g'(|u|^2)|u|_x^2u+$$
$$g(|u|^2)u_x+h'(x),u_{xxxt}+\alpha u_{xxx})=0$$

上式取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{xxx}\|^2+\alpha\|u_{xxx}\|^2+\mathrm{Re}\,(h',u_{xxxt}+\alpha u_{xxx})+$$
$$\mathrm{Re}(g'(|u|^2)|u|_x^2u+g(|u|^2)u_x,u_{xxxt}+\alpha u_{xxx})=0 \tag{3.8.9}$$

由于

$$|(g'(|u|^2)|u|_x^2u+g(|u|^2)u_x,\alpha u_{xxx})|\leqslant$$
$$C\|g'(|u|^2)\|_\infty\|(u_x\bar{u}+u\bar{u}_x)\|_\infty\|u_{xxx}\|+$$
$$C\|g(|u|^2)\|_\infty\|u_x\|_\infty\|u_{xxx}\|\leqslant C\|u_{xxx}\| \tag{3.8.10}$$

$$\mathrm{Re}(h',u_{xxxt}+\alpha u_{xxx})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\int h'\bar{u}_{xxx}\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\,(h',\alpha u_{xxx}) \tag{3.8.11}$$

$$|\mathrm{Re}\,(h',\alpha u_{xxx})|\leqslant C\|h'\|\|u_{xxx}\|\leqslant C\|u_{xxx}\| \tag{3.8.12}$$

由式(3.8.11)、(3.8.12)有

$$\mathrm{Re}\,(h',u_{xxxt}+\alpha u_{xxx})\geqslant\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\int h'\bar{u}_{xxx}\mathrm{d}x-C\|u_{xxx}\| \tag{3.8.13}$$

再由式(3.8.9)、(3.8.10)和(3.8.13)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{xxx}\|^2+\alpha\|u_{xxx}\|^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\int h'\,\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x+$$
$$\mathrm{Re}\,(g'(|u|^2)|u|_x^2u+g(|u|^2)u_x,u_{xxxt})\leqslant C\|u_{xxx}\| \tag{3.8.14}$$

显然

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\,(g'(|u|^2)|u|_x^2u+g(|u|^2)u_x,u_{xxxt})=\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\int(g'(|u|^2)|u|_x^2u+g(|u|^2)u_x)\,\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x-\\
&\mathrm{Re}\int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g'(|u|^2)|u|_x^2u+g(|u|^2)u_x)\,\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x=\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\int(g'(|u|^2)|u|_x^2u+g(|u|^2)u_x)\,\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x-\\
&\mathrm{Re}\int g''(|u|^2)|u|_t^2|u|_x^2u\cdot\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x-\\
&\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)|u|_{xt}^2u\cdot\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x-\\
&\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)|u|_x^2u_t\cdot\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x-\\
&\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)|u|_t^2u_x\cdot\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x-\\
&\mathrm{Re}\int g(|u|^2)u_{xt}\cdot\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{3.8.15}$$

由式(3.8.14)、(3.8.15)得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{xxx}\|^2+\alpha\|u_{xxx}\|^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\int h'\cdot\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x+\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\int(g'(|u|^2)|u|_x^2u+g(|u|^2)u_x)\cdot\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x\leqslant\\
&C\|u_{xxx}\|+\mathrm{Re}\int g''(|u|^2)|u|_t^2|u|_x^2u\cdot\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x+\\
&\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)|u|_{xt}^2u\cdot\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x+\\
&\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)|u|_x^2u_t\cdot\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x+
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)|u|_t^2 u_x \cdot \overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x +$$

$$\mathrm{Re}\int g(|u|^2)u_{xt} \cdot \overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x \tag{3.8.16}$$

现估计式(3.8.16)右端各项：

$$\left|\int g''(|u|^2)|u|_t^2|u|_x^2 u \cdot \overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x\right| \leqslant$$

$$\left|\int g''(|u|^2)(u_t\overline{u} + u\overline{u}_t)(u_x\overline{u} + u\overline{u}_x)u \cdot \overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x\right| \leqslant$$

$$4\|g''(|u|^2)\|_\infty\|u\|_\infty^3\|u_x\|_\infty\int|u_t\overline{u}_{xxx}|\mathrm{d}x \leqslant$$

$$C\|u_t\|\|u_{xxx}\| \leqslant C\|u_{xxx}\| \tag{3.8.17}$$

$$\left|\int g'(|u|^2)|u|_x^2 u_t \cdot \overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x\right| \leqslant$$

$$\left|\int g'(|u|^2)(u_x\overline{u} + u\overline{u}_x)u_t\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x\right| \leqslant$$

$$2\|g'(|u|^2)\|_\infty\|u\|_\infty\|u_x\|_\infty\int|u_t\overline{u}_{xxx}|\mathrm{d}x \leqslant$$

$$C\|u_t\|\|u_{xxx}\| \leqslant C\|u_{xxx}\| \tag{3.8.18}$$

$$\left|\int g'(|u|^2)|u|_t^2 u_x \cdot \overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x\right| \leqslant$$

$$2\|g'(|u|^2)\|_\infty\|u\|_\infty\|u_x\|_\infty\int|u_t\overline{u}_{xxx}|\mathrm{d}x \leqslant$$

$$C\|u_{xxx}\| \tag{3.8.19}$$

$$\mathrm{Re}\int g(|u|^2)u_{xt}\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x =$$

$$-\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)|u|_x^2 u_{xt}\overline{u}_{xx} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int g(|u|^2)|u_{xx}|^2\mathrm{d}x +$$

$$\frac{1}{2}\int g'(|u|^2)|u|_t^2|u_{xx}|^2\mathrm{d}x \leqslant$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int g(|u|^2)|u_{xx}|^2\mathrm{d}x +$$

$$2\|g'(|u|^2)\|_\infty\|u\|_\infty\|u_x\|_\infty\int|u_{xt}\overline{u}_{xx}|\mathrm{d}x+$$

$$\|g'(|u|^2)\|_\infty\|u\|_\infty\|u_{xx}\|_\infty\int|u_t u_{xxx}|\mathrm{d}x\leqslant$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int g(|u|^2)|u_{xt}|^2\mathrm{d}x+C\|u_{xxx}\|-C \tag{3.8.20}$$

$$\operatorname{Re}\int g'(|u|^2)u|u|^2_{xt}u\,\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x=$$

$$-\operatorname{Re}\int g''(|u|^2)|u|^2_x|u|^2_{xt}u\,\overline{u}_{xx}\mathrm{d}x-$$

$$\operatorname{Re}\int g'(|u|^2)|u|^2_{xxt}u\,\overline{u}_{xx}\mathrm{d}x-$$

$$\operatorname{Re}\int g'(|u|^2)|u|^2_{xt}u_x\,\overline{u}_{xx}\mathrm{d}x \tag{3.8.21}$$

$$\left|\int g''(|u|^2)|u|^2_x|u|^2_{xt}u\,\overline{u}_{xx}\mathrm{d}x\right|\leqslant$$

$$\left|\int g''(|u|^2)(u_x\overline{u}+u\,\overline{u}_x)\times\right.$$

$$\left.(u_{xt}\overline{u}+u_x\overline{u}_t+u_t\overline{u}_x+u\,\overline{u}_{xt})u\,\overline{u}_{xx}\mathrm{d}x\right|\leqslant$$

$$C\|u_{xt}\|\|u_{xx}\|+C\|u_t\|\|u_{xx}\|\leqslant$$

$$C\|u_{xxx}\|+C \tag{3.8.22}$$

类似地，有

$$\left|\int g'(|u|^2)|u|^2_{xt}u_x\,\overline{u}_{xx}\mathrm{d}x\right|\leqslant C\|u_{xxx}\|+C \tag{3.8.23}$$

由于

$$-\operatorname{Re}\int g'(|u|^2)|u|^2_{xxt}u\,\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x=$$

$$-\operatorname{Re}\int g'(|u|^2)u\,\overline{u}_{xx}(u_{xxt}\overline{u}+u_{xx}\overline{u}_t+2u_{xt}\overline{u}_x+$$

$$2u_x\overline{u}_{xt}+u_t\overline{u}_{xx}+u\,\overline{u}_{xxt})\mathrm{d}x \tag{3.8.24}$$

现对式(3.8.24)右端各项作估计

$$\left|\int g'(|u|^2)u\,\overline{u}_{xx}(u_{xx}\overline{u}_t+2u_{xt}\overline{u}_x+2u_x\overline{u}_{xt}+u_t\overline{u}_{xx})\mathrm{d}x\right|\leqslant$$

$$2\|g'(|u|^2)\|_\infty\|u\|_\infty\|u_{xx}\|_\infty\int|u_t\bar{u}_{xx}|\mathrm{d}x+$$

$$4\|g'(|u|^2)\|_\infty\|u\|_\infty\|u_x\|_\infty\int|\bar{u}_{xx}u_{xt}|\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C\|u_x\|_{H^1}\|u_t\|\|u_{xx}\|+C\|u_{xt}\|\|u_{xx}\|\leqslant C\|u_{xxx}\|+C \tag{3.8.25}$$

$$-\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)|u|^2\bar{u}_{xx}u_{xxt}\mathrm{d}x=$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int g'(|u|^2)|u|^2|u_{xx}|^2\mathrm{d}x+$$

$$\frac{1}{2}\int g''(|u|^2)|u|_t^2|u|^2|u_{xx}|^2\mathrm{d}x+$$

$$\frac{1}{2}\int g'(|u|^2)|u|_t^2|u_{xx}|^2\mathrm{d}x\leqslant$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int g'(|u|^2)|u|^2|u_{xx}|^2\mathrm{d}x+$$

$$\|g''(|u|^2)\|_\infty\|u\|_\infty^3\|u_{xx}\|_\infty\int|u_tu_{xx}|\mathrm{d}x+$$

$$\|g'(|u|^2)\|_\infty\|u\|_\infty\|u_{xx}\|_\infty\int|u_tu_{xx}|\mathrm{d}x\leqslant$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int g'(|u|^2)|u|^2|u_{xx}|^2\mathrm{d}x+C\|u_{xx}\|_{H^1}\|u_t\|\|u_{xx}\|\leqslant$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int g'(|u|^2)|u|^2|u_{xx}|^2\mathrm{d}x+C\|u_{xxx}\|+C \tag{3.8.26}$$

$$-\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)u^2\bar{u}_{xx}\bar{u}_{xxt}\mathrm{d}x=$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)u^2\bar{u}_{xx}^2\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int g''(|u|^2)|u|_t^2u^2\bar{u}_{xx}^2\mathrm{d}x+$$

$$\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)2uu_t\bar{u}_{xx}^2\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)u^2\bar{u}_{xxt}\bar{u}_{xx}\mathrm{d}x$$

于是

$$-\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)u^2\bar{u}_{xx}\bar{u}_{xxt}\mathrm{d}x=$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)u^2\overline{u}_{xx}^2\mathrm{d}x+$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int g''(|u|^2)|u|_t^2u^2\overline{u}_{xx}^2\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)uu_t\overline{u}_{xx}\mathrm{d}x\leqslant$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)u^2\overline{u}_{xx}^2\mathrm{d}x+$$

$$\|g''(|u|^2)\|_\infty\|u\|_\infty^3\|u_{xx}\|_\infty\int|u_t\overline{u}_{xx}|\mathrm{d}x+$$

$$\|g'(|u|^2)\|_\infty\|u\|_\infty\int|u_t\overline{u}_{xx}|\mathrm{d}x\leqslant$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)u^2\overline{u}_{xx}^2\mathrm{d}x+C\|u_{xx}\|_{H^1}\|u_t\|\|u_{xx}\|\leqslant$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)u^2\overline{u}_{xx}^2\mathrm{d}x+C\|u_{xxx}\|+C \tag{3.8.27}$$

从式(3.8.21)～(3.8.27)可得

$$\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)|u|_{tt}^2u\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x\leqslant$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int g'(|u|^2)|u|^2|u_{xx}|^2-$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)u^2\overline{u}_{xx}^2\mathrm{d}x+C\|u_{xxx}\|+C \tag{3.8.28}$$

从式(3.8.16)～(3.8.20)和式(3.8.28)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{xxx}\|^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}2\mathrm{Re}\int h'\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int g'(|u|^2)|u|^2|u_{xx}|^2\mathrm{d}x+$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}2\mathrm{Re}\int(g'(|u|^2)|u|_x^2u+g(|u|^2)u_x)\overline{u}_{xxx}\mathrm{d}x+$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)u^2\overline{u}_{xx}^2\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\int g(|u|^2)|u_{xx}|^2\mathrm{d}x+2\alpha\|u_{xxx}\|^2\leqslant$$

$$C\|u_{xxx}\|+C\leqslant\frac{\alpha}{2}\|u_{xxx}\|^2+C \tag{3.8.29}$$

令

$$E(t) = \|u_{xxx}\|^2 + 2\mathrm{Re}\int h' \bar{u}_{xxx}\mathrm{d}x +$$

$$2\mathrm{Re}\int (g'(|u|^2)|u|_x^2 u + g(|u|^2)u_x)\bar{u}_{xxx}\mathrm{d}x +$$

$$\int g'(|u|^2)|u|^2|u_{xx}|^2\mathrm{d}x +$$

$$\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)u^2\bar{u}_{xx}^2\mathrm{d}x + \int g(|u|^2)|u_{xx}|^2\mathrm{d}x \quad (3.8.30)$$

则从式(3.8.29)可得

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} - \alpha E + \frac{\alpha}{2}\|u_{xxx}\|^2 \leqslant 2\alpha\mathrm{Re}\int h' \bar{u}_{xxx}\mathrm{d}x +$$

$$2\alpha\mathrm{Re}\int (g'(|u|^2)|u|_x^2 u + g(|u|^2)u_x)\bar{u}_{xxx}\mathrm{d}x +$$

$$\alpha\int g'(|u|^2)|u|^2|u_{xx}|^2\mathrm{d}x + \alpha\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)u^2\bar{u}_{xx}^2\mathrm{d}x +$$

$$\alpha\int g(|u|^2)|u_{xx}|^2\mathrm{d}x + C \quad (3.8.31)$$

我们同样估计式(3.8.31)右端各项:

$$2|\mathrm{Re}\int h' \bar{u}_{xxx}\mathrm{d}x| \leqslant 2\|h'\|\|u_{xxx}\| \leqslant C\|u_{xxx}\| \quad (3.8.32)$$

$$|2\mathrm{Re}\int (g'(|u|^2)|u|_x^2 u + g(|u|^2)u_x)\bar{u}_{xxx}\mathrm{d}x| \leqslant$$

$$C\|u_x\|\|u_{xxx}\| \leqslant C\|u_{xxx}\| \quad (3.8.33)$$

$$|\int g'(|u|^2)|u|^2|u_{xx}|^2\mathrm{d}x| \leqslant \|g'(|u|^2)\|_\infty\|u\|_\infty^2\|u_{xx}\|^2 \leqslant C$$

$$(3.8.34)$$

类似有

$$|\mathrm{Re}\int g'(|u|^2)u^2\bar{u}_{xx}\mathrm{d}x| \leqslant C \quad (3.8.35)$$

$$|\int g(|u|^2)|u_{xx}|^2\mathrm{d}x| \leqslant C \quad (3.8.36)$$

由式(3.8.31)～(3.8.36)可得

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}+\alpha E+\frac{\alpha}{2}\|u_{xxx}\|^2\leqslant C\|u_{xxx}\|+C\leqslant\frac{\alpha}{2}\|u_{xxx}\|^2+C$$

即有

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}+\alpha E\leqslant C \tag{3.8.37}$$

由 Gronwall 引理得

$$E(t)\leqslant E(t_*)\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_*)}+\frac{C}{\alpha},\ t\geqslant t_* \tag{3.8.38}$$

类似地，以式(3.8.6)代替式(3.8.7)，同样可得

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}+\alpha E\leqslant K,\ 0\leqslant t\leqslant T \tag{3.8.39}$$

其中：常数 K 依赖于参数(α,Ω,g)、T 和 R：$\|u_0\|_{H^3}\leqslant R$。于是可得

$$E(t_*)\leqslant E(0)\mathrm{e}^{-\alpha t_*}+\frac{K}{\alpha}\leqslant C(R) \tag{3.8.40}$$

其中 $C(R)$依赖于参数(α,Ω,g)和 R，$\|u_0\|_{H^3}$。

由式(3.8.38)和式(3.8.40)可得

$$E(t)\leqslant\begin{cases}C(R)\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_*)}+\dfrac{C}{\alpha}, & t\geqslant t_*\\[2ex] \dfrac{2C}{\alpha} & t\geqslant t'_*\end{cases} \tag{3.8.41}$$

其中 $t'_*=\max\left\{t_*,t_*+\dfrac{1}{\alpha}\ln\dfrac{\alpha C(R)}{C}\right\}$。

基于式(3.8.30)和式(3.8.32)～(3.8.36)可得

$$\|u_{xxx}\|^2\leqslant C\|u_{xxx}\|+C\leqslant\frac{1}{2}\|u_{xxx}\|^2+C,\ t\geqslant t'_*$$

由此即得引理

引理 3.8.2 在引理 3.8.1 条件下，有估计

$$\|u_{tt}\|\leqslant C,\ t\geqslant t_*$$

证明 由式(3.8.8)可得

$$\|u_{tt}\|\leqslant\|u_{xxx}\|+$$

$$\alpha\|u_x\| + 2\|g'(|u|^2)\|_\infty\|u\|_\infty^2\|u_x\| +$$
$$\|g(|u|^2)\|_\infty\|u_x\| + \|h\|_{H^1} \leqslant C$$

引理 3.8.2 证毕。

现来构造问题(3.8.1)～(3.8.3)的近似惯性流形。写方程(3.8.1)为抽象微分方程形式：

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - Au + g(|u|^2)u + \mathrm{i}\alpha u + h = 0 \qquad (3.8.42)$$

其中 $A=-\partial_{xx}$ 为无界自共轭算子

$$D(A) = \{u \in H^2 : u \text{ 满足边界条件}(3.8.3)\}$$

设 $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ 为 H 的正交基，它由 A 的特征向量所组成，即有

$$Aw_j = \lambda_j w_j$$
$$0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_j \to +\infty, j \to \infty$$

给定 m，令 $P=P_m : H \to \mathrm{span}\ \{\mathrm{w}_1, \cdots, \mathrm{w}_m\}$ 的投影。$Q=Q_m=I-P_m$。P_m, Q_m 作用式(3.8.42)得

$$\begin{cases}\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} - Ap + P_m(g(|u|^2)u) + \mathrm{i}\alpha p + P_m h = 0 \\[2ex] \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} - Aq + Q_m(g(|u|^2)u) + \mathrm{i}\alpha q + Q_m h = 0\end{cases} \qquad (3.8.43)$$

其中 $p=P_m u, q=Q_m u$

注意到

$$\begin{cases}\|A^{\frac{1}{2}}u\| = \|\dfrac{\partial u}{\partial x}\|, u \in H^1 \\[1ex] \|P_m u\| \leqslant \|u\|, \|Q_m u\| \leqslant \|u\|, u \in H \\[1ex] \|A^\alpha u\| \geqslant \lambda_{m+1}^\alpha \|u\|, \alpha > 0, u \in Q_m D(A^\alpha)\end{cases} \qquad (3.8.44)$$

由式(3.8.7)和引理 3.8.2，推出

$$\begin{cases}\|A^{\frac{1}{2}}q\|, \|A^{\frac{1}{2}}q_t\| \leqslant C, t \geqslant t_* \\[1ex] \|q\|, \|q_t\| \leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}, t \geqslant t_*\end{cases} \qquad (3.8.45)$$

现定义映照 $\Phi: P_mH\to Q_mH$，使得对任何 $p\in P_mH$，$\Phi(p)=\Psi$，由下式给出

$$-A\Psi+Q_mg(|p|^2)p+\mathrm{i}\alpha\Psi+Q_mh=0 \quad (3.8.46)$$

我们首先证明式(3.8.46)唯一解 $\Psi\in Q_mH$ 的存在性。

引理 3.8.3 存在整数 m_0 依赖于 α 和 Ω，使得当 $m\geqslant m_0$ 时，式(3.8.46)对任何 $p\in P_mH$，存在唯一解 $\Psi\in Q_mH$。

证明 用不动点原理证明。设 $p\in P_mH$ 为固定，引入映照 G：$Q_mH\to Q_mH$ 使得对任何 $\varphi\in Q_mH$，$G(\varphi)=\Psi$ 由下式给定

$$-A\Psi+Q_mg(|p|^2)p+\mathrm{i}\alpha\varphi+Q_mh=0 \quad (3.8.47)$$

显然，G 的不动点就是式(3.8.46)的一个解。

以下证明存在整数 m_0，依赖于 α 和 Ω，使得当 $m\geqslant m_0$ 时，$G:Q_mH\to Q_mH$ 为压缩映照。令 $\varphi_1,\varphi_2\in Q_mH$，则由式(3.8.47)有

$$A\Psi_1-A\Psi_2=\mathrm{i}\alpha(\varphi_1-\varphi_2)$$

因此

$$\|A\Psi_1-A\Psi_2\|=\alpha\|\varphi_1-\varphi_2\| \quad (3.8.48)$$

由式(3.8.44)和式(3.8.48)有

$$\|\Psi_1-\Psi_2\|\leqslant\alpha\lambda_{m+1}^{-1}\|\varphi_1-\varphi_2\|$$

因 $\lambda_{m+1}\to\infty$，故可找到 m_0 仅依赖于 α 和 Ω 使得当 $m\geqslant m_0$ 时，Ψ 是压缩的。因而 G 在 Q_mH 中具有唯一的不动点。引理证毕。

令 $\Sigma_1=\mathrm{Graph}(\Phi)$，可证 Σ_1 为问题(3.8.1)～(3.8.3)的近似惯性流形。事实上，有

定理 3.8.1 设条件(3.8.4)、(3.8.5)成立，$u_0\in H^3$，$h\in H^1$，则存在正整数 m_0 依赖于参数(α,Ω,g)，使得当 $m\geqslant m_0$，有

$$\mathrm{dist}_{H^2}(u(t),\Sigma_1)\leqslant K\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}},\ t\geqslant t_*$$

其中：常数 K 依赖于参数(α,Ω,g)；$u(t)$为问题(3.8.1)～(3.8.3)的解。t_*依赖于参数(α,Ω,g)和 R，$\|u_0\|_{H^2}\leqslant R$。

证明 式(3.8.43)减去式(3.8.46)得

$$A\Psi-Aq=Q_mg(|p|^2)p-Q_mg(|u|^2)u+\mathrm{i}\alpha(\Psi-q)-\mathrm{i}q_t \quad (3.8.49)$$

进一步有

$$\|g(|p|^2)p - g(|u|^2)u\| \leqslant$$
$$\|(g(|p|^2) - g(|u|^2))p\| + \|g(|u|^2)q\| \leqslant$$
$$\|g'(\xi)(|p|^2 - |u|^2)p\| + \|g(|u|^2)q\| \leqslant$$
$$\|g'(\xi)(p\bar{p}q - p\bar{q}u)\| + \|g(|u|^2)q\| \leqslant$$
$$\|g'(\xi)\|_\infty \|p\|_\infty^2 \|q\| + \|g'(\xi)\|_\infty \|p\|_\infty \|u\|_\infty \|q\| +$$
$$\|g(|u|^2)\|_\infty \|q\| \leqslant C\|q\| \leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} \tag{3.8.50}$$

由于式(3.8.49)、(3.8.50)得

$$\|A\Psi - Aq\| \leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} + \alpha\|\Psi - q\| + \|q_t\| \leqslant$$
$$C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} + \alpha\lambda_{m+1}^{-1}\|A\Psi - Aq\|$$

由于 $\lambda_{m+1}\to\infty$，因此可找到正整数 m_0 仅依赖于参数(α,Ω,g)，使得当 $m\geqslant m_0$ 时，有

$$\|A\Psi - Aq\| \leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}},\ t\geqslant t_*$$

因此

$$\mathrm{dist}_{H^2}(u(t),\Sigma_1) \leqslant \|u(t) - (p(t) + \Psi(t))\|_{H^2} \leqslant$$
$$\|\Psi(t) - q(t)\|_{H^2} = \|A\Psi(t) - Aq\| \leqslant$$
$$C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}},\ t\geqslant t_*$$

定理 3.8.1 得证。

注意到，若 $u_0\in H^2$，由式(3.8.7)有

$$\|q\|,\ \|q_t\| \leqslant C,\ t\geqslant t_* \tag{3.8.51}$$

由此可得

定理 3.8.2 设式(3.8.4)、(3.8.5)成立，$u_0\in H^2$，$h\in L^2$，则存在 m_0 仅依赖于参数(α,Ω,g)，使得当 $m\geqslant m_0$ 时，有

$$\mathrm{dist}_{H^2}(u(t),\Sigma_1) \leqslant K\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}},\ t\geqslant t_*$$

其中：K 依赖于参数(α,Ω,g)；t_* 依赖于参数(α,Ω,g)和 R；$\|u_0\|_{H^2}\leqslant R$。$u(t)$为问题(3.8.1)～(3.8.3)的解。

以下，我们引入一个更简单的显式惯性流形 $\Sigma_2 = \text{Graph}(\Phi^*)$，其中 Φ^* 为映照：$P_m H \to Q_m H$，使得对任何 $p \in P_m H$，$\Phi^*(p) = \varphi$，由下式给定：

$$-A\varphi + Q_m g(|p|^2)p + Q_m h = 0$$

我们能证明：

定理 3.8.3　设式(3.8.4)、(3.8.5)成立，$u_0 \in H^3$，$h \in H^1$。则存在常数 K 仅依赖于参数 (α, Ω, g)使得

$$\text{dist}_{H^2}(u(t), \Sigma_2) \leqslant K\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}},\ t \geqslant t_*$$

其中 $u(t)$为问题(3.8.1)～(3.8.3)的解。t_*依赖于参数(α, Ω, g)和 R，$\|u_0\|_{H^3} \leqslant R$。

定理 3.8.4　设式(3.8.4)、(3.8.5)成立，$u_0 \in H^2$，$h \in L^2$。则存在常数 K 仅依赖于参数(α, Ω, g)，使得

$$\text{dist}_{H^1}(u(t), \Sigma_2) \leqslant K\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}},\ t \geqslant t_*$$

其中：$u(t)$为问题(3.8.1)～(3.8.3)的解；t_*依赖于参数(α, Ω, g)和 R；$\|u_0\|_{H^2} \leqslant R$。

3.9　近似惯性流形的收敛性

近似惯性流形在逼近计算中发挥了很大的作用，但能否由构造的近似惯性流形证明惯性流形的存在性？这一问题较长时间未得到解决。1994 Debussche A. 和 Temam R. 在文献[121]中构造了一列近似惯性流形，证明了它收敛于惯性流形。当然，谱间隙条件还要求满足。

设在 Banach 空间 $\mathscr{E}$ 中一类非线性发展方程为

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.9.1}$$

其中：A 为在 $\mathscr{E}$ 中的线性稠定算子；$f \in C^1$ 为非线性算子：$E \to F$，E 和 F 为两个 Banach 空间，

$$E \subset F \subset \mathscr{E}$$

且设映射是连续的。在 $\mathscr{E}$,E,F 中的模以 $|\cdot|_{\mathscr{E}}$,$|\cdot|_E$,$|\cdot|_F$ 表示。假设函数 f 为整体 Lipschitz 的:$E \to F$。

设 M_1 为正常数,使得对一切 $x, y \in E$:

$$\begin{cases} |f(x) - f(y)|_F \leqslant M_1 |x - y|_E \\ |f(x)|_F \leqslant M_1 (1 + |x|_E) \end{cases} \tag{3.9.2}$$

对于算子 A,设线性方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

在 $\mathscr{E}$ 上定义一个强连续线性半群 $(\mathrm{e}^{-At})_{t \geqslant 0}$,使得

$$\mathrm{e}^{-At} F \subset E, \forall\, t > 0$$

设存在 A 的特征向量序列 $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ 和两个数列 $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$,$(\Lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ 满足

$$\Lambda_n \geqslant \lambda_n \geqslant 0,\ \forall\, n \geqslant 0 \tag{3.9.3a}$$

$$\lambda_n \to \infty,\ n \to \infty \tag{3.9.3b}$$

$$\frac{\Lambda_n}{\lambda_n} \text{ 为有界的},\ n \to \infty \tag{3.9.3c}$$

使得如 $Q_n = I - P_n$ 有

(*) $P_n \mathscr{E}$ 和 $Q_n \mathscr{E}$ 在 e^{-At} 作用下是不变的,$\forall t \geqslant 0$;

(* *) $(\mathrm{e}^{-At})_{t \geqslant 0}$ 能扩张到 $P_n \mathscr{E}$ 上的一个群 $(\mathrm{e}^{-At})_{t \in \mathbf{R}}$,这些投影能定义 $(\mathrm{e}^{-At})_{t \geqslant 0}$ 的指数二分法:存在 $K_1, K_2 > 0$,$\alpha \in (0,1)$,与 n 无关,使得

(H_1) 对 $t \leqslant 0$:

$$|\mathrm{e}^{-At} P_n|_{\mathscr{L}(E)} \leqslant K_1 \mathrm{e}^{-\lambda_n t}$$

$$|\mathrm{e}^{-At} P_n|_{\mathscr{L}(F,E)} \leqslant K_1 \lambda_n^{\alpha} \mathrm{e}^{-\lambda_n t}$$

(H_2) 对 $t > 0$:

$$|\mathrm{e}^{-At} Q_n|_{\mathscr{L}(F,E)} \leqslant K_2 \left(\frac{1}{t^{\alpha}} + \Lambda_n^{\alpha}\right) \mathrm{e}^{-\Lambda_n t}$$

$$|A^{-1}e^{-A\tau}Q_n|_{\mathscr{L}(F,E)} \leqslant K_2\Lambda_n^{\alpha-1}e^{-\Lambda_n t}$$

最后，设方程(3.9.1)在 E 上定义一个连续半群$(S(t))_{t\geqslant 0}$。

以下构造一列近似惯性流形。这一列近似惯性流形是由近似 Lyapunov-Perron 方法构造惯性流形作为由积分方程所定义的映照的不动点的想法得到的。如所周知，Lyapunov-Perron 方法在于寻求 Ψ 作为映照 $\mathscr{J}$

$$\mathscr{J}\Psi(y_0) = \int_{-\infty}^{0} e^{As}Q_n f(y(s) + \Psi(y(s)))ds \quad (3.9.4)$$

的不动点，其中 y 满足

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay = P_n(y + \Psi(y)), \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.9.5)$$

现选取时间步长 τ 和正整数 N。作式(3.9.5)、(3.9.4)的如下近似：

$$y_{k+1} = R_\tau y_k + S_\tau P_n f(y_k + \Psi(y_k)) \quad (3.9.6)$$

其中 $k=0,\cdots,N-1$，R_τ 和 S_τ 为线性算子，且满足

$$(H_3)\quad \begin{aligned} &|R_\tau P_n|_{\mathscr{L}(E)} \leqslant e^{\tau\lambda_n} \\ &|S_\tau P_n|_{\mathscr{L}(F,E)} \leqslant K_3\lambda_n^{\alpha-1}(e^{\tau\lambda_n}-1) \end{aligned}$$

这里正常数 K_3 不依赖于 n。定义映照 T_N^τ：

$$T_N^\tau\Psi(y) = A^{-1}(I - e^{-A\tau})\Sigma_{k=0}^{N-1}e^{-kA\tau}Q_n f(y_k + \Phi(y_k)) + A^{-1}e^{-NA\tau}Q_n f(y_N + \Psi(y_N))$$

其中$(y_k)_{k=0,1,\cdots,N}$由式(3.9.6)计算得到。

对于任何 $\Psi \in \mathscr{F}_{l,b}$

$$\mathscr{F}_{l,b} = \{\Psi: P_n E \to Q_n E \mid \text{Lip } \Psi < l, \sup_{y\in P_n E}\frac{|\Psi(y)|_E}{1+|y|_E} \leqslant b\} \quad (3.9.7)$$

$y_0 \in P_n E$，y 为式(3.9.5)的解，$\tilde{y}_k = y(-k\tau)$。设

$$(H_4)\quad \begin{cases} \tilde{y}_{k+1} = R_\tau\tilde{y}_k + S_\tau P_n f(\tilde{y}_k + \Psi(\tilde{y}_k)) + \varepsilon_k \\ |\varepsilon_k|_E \leqslant \alpha_1(\lambda_n)\tau^2(1+|y_0|_E)e^{\tau(k+1)(\lambda_n - K_4\lambda_n^\alpha)} \end{cases}$$

且设 y 对时间的导数不增加太快，即有

$$(H_5) \quad \left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_E \leqslant \alpha_2(\lambda_n)(1+|y_0|_E)\mathrm{e}^{(\lambda_n+K_5\lambda_n^{\alpha})t},$$

$$t \in (-\infty, 0]$$

其中：K_4, K_5 不依赖于 N, τ 或 n；$\alpha_1(\lambda_n), \alpha_2(\lambda_n)$ 仅依赖于 λ_n，但与 N, τ 无关。

对于许多具耗散的偏微分方程，由方程(3.9.1)定义的半群具有整体吸引子 $\mathscr{A}$。一般来说它嵌入于一个小于 E 的 Banach 空间。从吸引子的定义可知，$u_0 \in \mathscr{A}$。则方程(3.9.1)的解定义在 $\mathbf{R}$ 上且仍在 $\mathscr{A}$ 中。因此 u 为一致有界，且它对时间的导数也是一致有界的。对于这样的数域，可置换(H_4)为

$$(H_4)' \quad \begin{cases} \tilde{y}_{k+1} = R_\tau \tilde{y}_k + S_\tau P_n f(u(-k\tau)) + \varepsilon_k \\ |\varepsilon_k|_E \leqslant \tau^2 \beta_1, \forall k \leqslant \mathbf{N} \end{cases}$$

$$(H_5)' \quad \left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_E \leqslant \beta_2, \forall\ t \leqslant 0$$

其中 $y = P_n u$ 为在 $\mathscr{A}$ 上(3.9.1)方程的解在 $P_n E$ 上的投影。$\tilde{y}_k = y(-k\tau) = Pu(-k\tau)$，$\beta_1, \beta_2$ 不依赖于 N, τ 和 n。

现对我们构造的近似惯性流形，取一列严格为正的数列 $(\tau_N)_{N \in \mathbf{N}}$，

定义一系列$(\Phi_N)_{N \in \mathbf{N}}$，使得

$$\begin{cases} \Phi_0 = 0, \\ \Phi_{N+1} = T_N^{\tau N}(\Phi_N),\ N \geqslant 0 \end{cases} \tag{3.9.8}$$

其中 T_0^τ 定义为

$$T_0^\tau \Phi(y_0) = A^{-1} Q_n f(y_0 + \Phi(y_0))$$

graph (Φ_1)为近似惯性流形。令 $M_1 = \text{graph}\ (\Phi_N)$，现对 y_k, T_N^τ 进行估计。

引理 3.9.1　设(H_3)成立

(i)设 $\Psi \in F_{l,b}$，$y_0 \in P_n E$，由式(3.9.6)定义$(y_k)_{k=0,\cdots,N}$则有

$$|y_k|_E \leqslant \mathrm{e}^{k\tau(\lambda_n + K_3 M_1(1+b)\lambda_n^{\alpha})}(|y_0|_E + 1),\ \forall\ k \in \mathbf{N}$$

且 $\lambda_n^{1-\alpha} \geqslant K_3 M_1 (1+b)$。

(ii)$\Psi' \in F_{l,b}$，$y_0' \in P_n E$，由式(3.9.6)定义，式(3.9.6)定义

$(y_k^i)_{k=0,\cdots,N}$，$y_0=y_0^i$，$i=1,2$。则有

$$|y_k^1-y_k^2|\leqslant$$
$$\mathrm{e}^{k\tau(\lambda_n+K_3M_1(1+l)\lambda_n^a)}|y_0^1-y_0^2|_E+$$
$$\lambda_n^a k\tau\mathrm{e}^{k\tau(\lambda_n-K_6\lambda_n^a)}K_3M_1|\Psi^1-\Psi^2|_\infty(1+|y_0|_E)$$

其中 $K_6=K_3M_1\max(1+l,1+b)$。

证明 从(H_3)，式(3.9.2)、(3.9.7)可得

$$|y_{k+1}|_E\leqslant\mathrm{e}^{\tau\lambda_n}|y_k|_E+$$
$$K_3\lambda_n^{a-1}(\mathrm{e}^{\tau\lambda_n}-1)(M_1(1+b)(1+|y_k|_E))\leqslant$$
$$\mathrm{e}^{\tau(\lambda_n+K_3M_1(1+b)\lambda_n^a)}|y_k|_E+K_3\lambda_n^{a-1}M_1(1+b)(\mathrm{e}^{\tau\lambda_n}-1)$$

其中用到了基本不等式：

$$\mathrm{e}^{\tau\lambda_n}-1\leqslant\tau\lambda_n\mathrm{e}^{\tau\lambda_n}$$
$$1+\tau K_3M_1(1+b)\lambda_n^a\leqslant\mathrm{e}^{\tau K_3M_1(1+b)\lambda_n^a}$$

由循环迭代可得

$$|y_k|_E\leqslant\mathrm{e}^{k\tau(\lambda_n+K_3M_1(1+b)\lambda_n^a)}(|y_0|_E+K_3M_1(1+b)\lambda_n^{a-1})$$

因此(i)已得证。取$(y_k^i)_{k=0,\cdots,N}$，$(i=1,2)$，如(ii)。写 $y_k=y_k^1-y_k^2$，则有

$$|y_{k+1}|_E\leqslant\mathrm{e}^{\tau\lambda_n}|y_k|_E+$$
$$K_3\lambda_n^{a-1}(\mathrm{e}^{\tau\lambda_n}-1)(|y_k|_E+|\Psi^1(y_k^1)-\Psi^2(y_k^2)|_E)\leqslant$$
$$\mathrm{e}^{\tau\lambda_n}|y_k|_E+K_3M_1\lambda_n^{a-1}(\mathrm{e}^{\tau\lambda_n}-1)\times$$
$$((1+l)|y_k|_E+|\Psi^1-\Psi^2|_\infty(1+|y_k^1|_E));$$

应用(i)到$(y_k^i)_{k=0,\cdots,N}$：

$$|y_{k+1}|_E\leqslant\mathrm{e}^{\tau(\lambda_n+K_3M_1(1+l)\lambda_n^a)}|y_k|_E+\tau K_3M_1\lambda_n^a|\Psi^1-$$
$$\Psi^2|_\infty(1+|y_0^1|_E)\mathrm{e}^{(k-1)\tau(\lambda_n-K_3M_1(1+b)\lambda_n^a)}$$

再由循环原理即得(ii)。用同样方法易证。

引理 3.9.2 设(H_3)成立。$\Psi\in F_{l,b}$，$y_0\in P_nE$，$(\mathrm{e}_k)_{k=0,\cdots,N}$为在 P_nE 中的一个序列。$(y_k)_{k=0,\cdots,N}$为式(3.9.6)所定义。$(\tilde{y}_k)_{k=0,\cdots,N}$

为下式确定。

$$\tilde{y}_{k+1} = R_\tau \tilde{y}_k + S_\tau P_n f(\tilde{y}_k + \Psi(\tilde{y}_k)) + e_k,$$

$$\tilde{y}_0 = y_0$$

则有

$$|\tilde{y}_k - y_k|_E \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} e^{(k-j)\tau(\lambda_n + K_3 M_1 (1+l)\lambda_n^\alpha)} |e_j|_E,$$

$$k = 0, \cdots, N$$

设 ρ 为有界的，$M_0 = \sup_{u \in E} |f(u)|_F$，用 $\tilde{\mathscr{F}}_{l,b}$ 代替 $\mathscr{F}_{l,b}$：

$$\tilde{\mathscr{F}}_{l,b} = \{\Psi: P_n E \to Q_n E \,|\, |\Psi(y)|_E \leqslant b,\ \forall\, y \in P_n E,$$

$$|\Psi(x) - \Psi(y)|_E \leqslant l|x - y|_E, \forall\, x, y \in P_n E\} \qquad (3.9.9)$$

它导致更简单的计算。

命题 3.9.1 设 (H_2)，(H_3) 成立。则存在两个常数 C_1 和 C_2，使得如果

$$(N+1)\tau \leqslant \frac{C_1}{\lambda_n^\alpha},\ \lambda_n \geqslant C_2$$

则存在 l, b_0 使得 $\mathscr{T}_N^\tau: \tilde{\mathscr{F}}_{l,b} \to \tilde{\mathscr{F}}_{l,b}$，$\forall\, b \geqslant b_0$。

证明 $\Psi \in \tilde{\mathscr{F}}_{l,b}$，$y_0 \in P_n E$，定义函数 $\bar{y}(s)$，$s \in (-\infty, 0]$：

$$\begin{cases} \bar{y}(s) = y_k,\ s \in ((-k+1)\tau, -k\tau], k = 0, \cdots, N-1 \\ \bar{y}(s) = y_k,\ s \in (-\infty, -N\tau) \end{cases}$$

$$(3.9.10)$$

其中 $(y_k)_{k=0,\cdots,N}$ 为式(3.9.6)所计算。则 $\mathscr{T}_N^\tau \Psi(y_0)$ 能写为

$$\mathscr{T}_N^\tau \Psi(y_0) = \int_{-\infty}^0 e^{As} Q_n f(\bar{y}(s) + \Psi(\bar{y}(s)))ds =$$

$$\int_{-(N+1)\tau}^0 e^{As} Q_n f(\bar{y}(s) + \Psi(\bar{y}(s)))ds +$$

$$A^{-1} e^{-(N+1)A\tau} Q_n f(y_N + \Psi(y_N))$$

从 (H_2) 和 f 的有界性可得

$$|\mathscr{T}_N^\tau \Psi(y_0)| \leqslant \int_{-\infty}^0 K_2 M_0 (\frac{1}{|s|^\alpha} + \Lambda_n^\alpha) e^{\Lambda_n s} ds \leqslant$$

$$K_2M_0(\int_{-\infty}^{0}\frac{e^y}{|y|^\alpha}dy+1)\Lambda_n^{\alpha-1}\leqslant$$

$$K_2M_0(\Gamma(-1-\alpha)+1)\Lambda_n^{\alpha-1}\leqslant b$$

如果

$$b\geqslant b_0=K_2M_0(\Gamma(-1-\alpha)+1)C_2^{\alpha-1} \qquad (3.9.11)$$

取 $y_0^1,y_0^2\in P_nE$，由式(3.9.6)定义$(y_k^i)_{k=0,\cdots,N}$，$y_0=y_0^i$，构造$\overline{y}^i$ 如前，$i=1,2$，则

$$\mathscr{T}_N^\tau\Psi(y_0^1)-\mathscr{T}_N^\tau\Psi(y_0^2)=$$

$$\int_{-(N+1)\tau}^{0}e^{As}Q_n(f(\overline{y}^1(s)+\Psi(\overline{y}^1(s)))-$$

$$f(\overline{y}^2(s)+\Psi(\overline{y}(s)))ds+$$

$$A^{-1}e^{-A(N+1)\tau}Q_n(f(y_N^1+\Psi(y_N^1))-f(y_N^2+\Psi(y_N^2)))$$

由(H_2)，式(3.9.9)和式(3.9.2)可得

$$|\mathscr{T}_N^\tau\Psi(y_0^1)-\mathscr{T}_N^\tau\Psi(y_0^2)|_E\leqslant$$

$$K_2M_1(1+l)\int_{-(N+1)\tau}^{0}(\frac{1}{|s|^\alpha}+\Lambda_n^\alpha)|\overline{y}^1(s)-\overline{y}^2(s)|_Eds+$$

$$K_2M_1(1+l)\Lambda_n^{\alpha-1}e^{-\Lambda_n^\alpha(N+1)\tau}|y_N^1-y_N^2|_E$$

由引理 3.9.1(ii)推出$(\Psi_1,\Psi_2\in\widetilde{\mathscr{F}}_{l,b}\subset\mathscr{F}_{l,b})$。

$$|y_k^1-y_k^2|_E\leqslant e^{k\tau(\lambda_n+K_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)}|y_0^1-y_0^2|_E$$

$$|\tilde{y}^1(s)-\tilde{y}^2(s)|_E\leqslant e^{-s(\lambda_n+K_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)}|y_0^1-y_0^2|_E$$

因而，对于 s 有

$$|\mathscr{T}_N^\tau\Psi(y_0^1)-\mathscr{T}_N^\tau\Psi(y_0^2)|_E\leqslant$$

$$K_2M_1(1+l)|y_0^1-y_0^2|_E\int_{-(N+1)\tau}^{0}(\frac{1}{|s|^\alpha}+\Lambda_n^\alpha)\times$$

$$e^{(\Lambda_n-\lambda_n-K_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)s}ds+$$

$$K_2M_1(1+l)|y_0^1-y_0^2|_E\Lambda_n^{\alpha-1}\times$$

$$e^{-(\Lambda_n-\lambda_n-K_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)(N-1)\tau}$$

由式(3.9.3)和$(N+1)\tau\leqslant\frac{C_1}{\lambda_n^\alpha}$,我们有

$$\int_{-(N+1)\tau}^{0}\frac{1}{|s|^\alpha}e^{(\Lambda_n-\lambda_n-K_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)s}ds\leqslant$$

$$e^{K_3M_1C_1(1+l)}\int_{-(N+1)\tau}^{0}\frac{1}{|s|^\alpha}ds\leqslant e^{K_3M_1C_1(1-l)}\frac{1}{1-\alpha}\lambda_n^{\alpha(\alpha-1)}C_1^{1-\alpha}$$

$$|\mathscr{T}_N^\tau\Psi(y_0^1)-\mathscr{T}_N^\tau\Psi(y_0^2)|_E\leqslant$$

$$K_2M_1(1+l)|y_0^1-y_0^2|_E e^{K_3M_1C_1(1+l)}\times$$

$$\left(\frac{1}{1-\alpha}\lambda_n^{\alpha(\alpha-1)}C_1^{1-\alpha}+\frac{\Lambda_n^\alpha}{K_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha}+\Lambda_n^{\alpha-1}\right)\leqslant l|y_0^1-y_0^2|_E$$

如果

$$(K_2M_1(\frac{1}{1-\alpha}\lambda_n^{\alpha(\alpha-1)}C_1^{1-\alpha}+\Lambda_n^{\alpha-1})(1+l)+$$

$$\frac{K_2}{K_3}(\frac{\Lambda_n}{\lambda_n})^\alpha)e^{K_3M_1C_1(1+l)}\leqslant l \tag{3.9.12}$$

我们可选取 C_2 和 δ_0 使得当 $\lambda_n\geqslant C_2$, $C_1\leqslant\delta_0$ 时

$$K_2M_1(\frac{1}{1-\alpha}\lambda_n^{\alpha(\alpha-1)}C_1^{1-\alpha}+\Lambda_n^{\alpha-1})e^{K_3M_1C_1(1+l)}\leqslant\frac{1}{2}$$

因此,当

$$(\frac{1}{2}+C'_3)e^{K_3M_1C_1l}\leqslant l$$

$$C'_3=\frac{K_2}{K_3}\sup_k(\frac{\Lambda_k}{\lambda_k})^\alpha e^{K_3M_1\delta_0}+\frac{1}{2}$$

$$C_1=\min\left(\delta_0,\frac{\ln\frac{3}{2}}{6K_3M_1C'_3}\right),\ l=6C'_3$$

时,式(3.9.12)成立。这就证明了命题。

这个结果表明,如果序列$(\tau_N)_{N\in\mathbf{N}}$如下选取

$$\tau_N\leqslant\frac{C_1}{(N+1)\lambda_n^\alpha},\ \forall N \tag{3.9.13}$$

则序列$(\Phi_N)_{N\in\mathbf{N}}\in\mathscr{F}_{l,b}$,其中 b,l 在命题 3.9.1 中给定。

现给出近似惯性流形厚度的估计,使之 M_N 的邻域含有吸引

子。

命题 3.9.2 在命题 3.9.1 相同假设下，且$(H_4)'$，$(H_5)'$成立。则存在三个常数C_3，C_4，C_5使得对任何$\Psi\in\mathscr{F}_{l,b}$，有

$$\max_{u=y+z\in A}|\mathscr{T}_N^{\tau}\Psi(y)-z|_E\leqslant C_3\Lambda_n^{\alpha-1}\max_{y+z\in A}|\Psi(y)-z|_E+$$

$$C_4(\Lambda_n^{\alpha-1}\beta_2+\Lambda_n^{-1}\beta_1)\tau+C_5\left(\left(\frac{(N+1)\tau}{\Lambda_n}\right)^{-\alpha}+\Lambda_n^{\alpha-1}\right)\mathrm{e}^{-\Lambda_n(N+1)\tau}$$

证明 设$\Psi\in\mathscr{F}_{l,b}$，$u_0=y_0+z_0\in\mathscr{A}$，令$(y_k')_{k=0,\cdots,N}$为式(3.9.6)构造的序列，$\bar{y}(s)$为式(3.9.10)所定义，$s\in(-\infty,0]$，$y=P_nu$，$z=Q_nu$，$\tilde{y}_k=y(-k\tau)$，则

$$\mathscr{T}_N^{\tau}P_n(y_0)=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{As}Q_nf(\tilde{y}(s)+\Psi(\tilde{y}(s)))\mathrm{d}s$$

$$z_0=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{As}Q_nf(y(s)+z(s))\mathrm{d}s$$

因此

$$|\mathscr{T}_N^{\tau}P_n(y_0)-z_0|\leqslant$$

$$\int_{-\infty}^{0}|\mathrm{e}^{As}Q_n(f(\tilde{y}(s)+\Psi(\tilde{y}(s)))-f(y(s)+z(s)))|_E\mathrm{d}s$$

利用(H_2)，式(3.9.2)，(3.9.9)可得

$$|\mathscr{T}_N^{\tau}P_n(y_0)-z_0|\leqslant K_2M_1\int_{-(N+1)\tau}^{0}\times$$

$$\left(\frac{1}{|s|^{\alpha}}+\Lambda_n^{\alpha}\right)\mathrm{e}^{\Lambda_n s}((1+l)|y(s)-\tilde{y}(s)|_E+|\Psi(y(s))-$$

$$z(s)|_E)\mathrm{d}s+2M_0K_2\int_{-\infty}^{-(N+1)\tau}\left(\frac{1}{|s|^{\alpha}}+\Lambda_n^{\alpha}\right)\mathrm{e}^{\Lambda_n s}\mathrm{d}s \qquad (3.9.14)$$

由于$(H_4)'$，有

$$\tilde{y}_{k+1}=R_{\tau}\tilde{y}_k+S_{\tau}P_nf(\tilde{y}_k+z(-k\tau))+\varepsilon_k$$

由引理 3.9.2 推出

$$|y_k-\tilde{y}_k|\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}\mathrm{e}^{(k-1-j)\tau(\lambda_n+K_3M_1(1+l)\lambda_n^{\alpha})}\times$$

$$(|\epsilon_j|_E + |S_\tau P_n(f(\tilde{y}_j + z(-j\tau)) - f(\tilde{y}_j + \Psi(\tilde{y}_j)))|_E) \leqslant$$

$$[\tau^2\beta_1 + K_3M_1\lambda_n^{\alpha-1}(e^{\tau\lambda_n} - 1)\max_{y+z\in\mathscr{A}}|\Psi(y) - z|_E] \times$$

$$e^{k\tau(\lambda_n + K_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)}/[e^{\tau(\lambda_n + K_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)} - 1] \leqslant$$

$$[\frac{\tau\beta_1}{\lambda_n + K_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha} + K_3M_1\lambda_n^{\alpha-1}\max_{y+z\in\mathscr{A}}|\Psi(y) - z|_E] \times$$

$$e^{k\tau(\lambda_n + K_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)}$$

因 $s\in(-(k+1)\tau,-k\tau)$，$(H_5)'$给出

$$|y(s) - \bar{y}(s)|_E \leqslant \tau\beta_2 + |y_k - \tilde{y}_k|_E \leqslant \tau\beta_2 +$$

$$[\frac{\tau\beta_1}{\lambda_n + K_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha} + K_3M_1\lambda_n^{\alpha-1}\max_{y+z\in\mathscr{A}}|\Psi(y) - z|_E] \times$$

$$e^{-sk\tau(\lambda_n + K_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)}$$

将上式代入式(3.9.14)，得

$$|\mathscr{T}_N^\tau\Phi(y_0) - z_0|_E \leqslant K_2M_1\beta_2(1+l)(\int_{-\infty}^0 \frac{e^u}{|u|^\alpha}du + 1)\Lambda_n^{\alpha-1}\tau +$$

$$K_2M_1(1+l)[\frac{\tau\beta_1}{\lambda_n + K_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha} +$$

$$K_3M_1\lambda_n^{\alpha-1}\max_{y+z\in\mathscr{A}}|\Psi(y) - z|_E] \times$$

$$\int_{-(N+1)\tau}^0 (\frac{1}{|s|^\alpha} + \Lambda_n^\alpha)e^{-K_3M_1(1-l)\lambda_n^\alpha s}ds +$$

$$K_2M_1(\Gamma(-1-\alpha) + 1)\Lambda_n^{\alpha-1}\max_{y+z\in\mathscr{A}}|\Psi(y) - z|_E +$$

$$2K_2M_0\frac{((N+1)\tau)^{-\alpha} + \Lambda_n^\alpha}{\Lambda_n}e^{-\Lambda_n(N+1)\tau}$$

由命题 3.9.1 的证明可知，

$$K_2M_1(1+l)\int_{-(N+1)\tau}^0 (\frac{1}{|s|^\alpha} + \Lambda_n^\alpha)e^{-K_3M_1(1-l)s}ds \leqslant l$$

因此

$$|\mathscr{T}_N^\tau\Phi(y_0) - z_0| \leqslant C_4(\Lambda_n^{\alpha-1}\beta_2 + \Lambda_n^{-1}\beta_1)\tau +$$

$$C_3\Lambda_n^{\alpha-1}\max_{y+z\in\mathscr{A}}|\Psi(y)-z|_E+$$

$$2K_2M_0\frac{((N+1)\tau)^{-\alpha}+\Lambda_n^{\alpha}}{\Lambda_n}e^{-\Lambda_n(N+1)\tau}$$

其中 C_3,C_4 与 N,τ 和 n 无关。因此，如 τ_N 满足式(3.9.13)，$\lambda_n\geqslant C_2$，则有

$$\max_{u=y+z\in\mathscr{A}}|\Phi_{N+1}(y)-z|_E\leqslant C_3\Lambda_n^{\alpha-1}\max_{u=y+z\in\mathscr{A}}|\Phi_N(y)-z|_E+$$

$$C_4(\Lambda_n^{\alpha-1}\beta_2+\Lambda_n^{-1}\beta_1)\tau_N+C_5\left(\frac{((N+1)\tau_N)^{-\alpha}+\Lambda_n^{\alpha}}{\Lambda_n}\right)e^{-\Lambda_n(N+1)\tau_N}$$

命题 3.9.2 证毕。

容易得到

定理 3.9.1 设(H_2)，(H_3)，$(H_4)'$，$(H_5)'$成立，序列$(\tau_N)_{N\in\mathbf{N}}$满足

$$C_6\leqslant\tau_N(N+1)\lambda_n^{\alpha}\leqslant C_1,\ \forall N$$

其中：C_6 为一适当常数；常数 C_1 如命题 3.9.2 所示。则由式(3.9.8)所定义的序列$(\Phi_N)_{N\in\mathbf{N}}$满足：

$$\max_{u=y+z\in\mathscr{A}}|\Phi_N(y)-z|_E\leqslant(C_3\Lambda_n^{\alpha-1})^N\max_{u\in\mathscr{A}}|Q_nu|_E+$$

$$C_4(\Lambda_n^{\alpha-1}\beta_2+\Lambda_n^{-1}\beta_1)\sum_{j=0}^{N-1}(C_3\Lambda_n^{\alpha-1})^j\tau_{N-1-j}+4C_5\Lambda_n^{\alpha-1}e^{-C_6\Lambda_n^{1-\alpha}}$$

如 $\lambda_n\geqslant C_7$，其中 C_7 为另一个常数。

这就推出了从 M_N 到 $\mathscr{A}$ 半距离的估计

$$d_E(\mathscr{A},M_N)=\sup_{v\in\mathscr{A}}\inf_{w\in M_N}|v-w|_E\leqslant$$

$$(C_3\Lambda_n^{\alpha-1})^N\max_{u=y+z\in\mathscr{A}}|Q_nu|_E+C_4(\Lambda_n^{\alpha-1}\beta_2+\Lambda_n^{-1}\beta_1)\times$$

$$\sum_{j=0}^{N-1}(C_3\Lambda_n^{\alpha-1})^j\tau_{N-1-j}+4C_5\Lambda_n^{\alpha-1}e^{-C_6\Lambda_n^{1-\alpha}}\tag{3.9.15}$$

不等式(3.9.15)右端的第一、第二项当 $N\to\infty$时趋于零。因此上面的距离减少，趋于一个很小的数

$$4C_5\Lambda_n^{\alpha-1}e^{-C_6\Lambda_n^{1-\alpha}}$$

因此,如 N 充分大,M_N 作为一个具有阶

$$8C_5\Lambda_n^{\alpha-1}e^{-C_6\Lambda_n^{1-\alpha}}$$

的显式近似惯性流形。

现来证明当 $N\to\infty$时 $\mathscr{T}_N^\tau$ 的收敛性。

命题 3.9.3 设(H_2)和(H_3)成立。则当存在常数 C_8 使 $\Lambda_n-\lambda_n\geqslant C_8(\Lambda_n^\alpha+\lambda_n^\alpha)$时,我们有:对任何 N 和 $\tau>0$,$\mathscr{T}_N^\tau$ 映照 $\mathscr{T}_{l,b}$为它自己,而且 $\mathscr{T}_N^\tau$ 为严格压缩映照,其压缩常数小于$\frac{1}{2}$。

证明 $\Psi\in\mathscr{T}_{l,b}$, $y_0\in P_nE$,由式(3.9.6)构造$(y_k^i)_{k=0,\cdots,N}$,由式(3.9.10)定义$\bar{y}$,引理 3.9.1 推出:如 C_8 充分大,$C_8\geqslant K_3M_1(1+b)(\sup\limits_k \frac{\Lambda_k}{\lambda_k})^{1-\alpha}$,则

$$|\bar{y}(s)|_E\leqslant e^{-s(\lambda_n+K_3M_1(1+b)\lambda_n^\alpha)}(|y_0|_E+1),\ s\leqslant 0$$

记

$$\mathscr{T}_N^\tau\Psi(y_0)=\int_{-\infty}^0 e^{As}Q_nf(\bar{y}(s)+\Psi(\bar{y}(s)))ds$$

利用(H_2),式(3.9.2)、(3.9.7)得

$$\begin{aligned}|\mathscr{T}_N^\tau\Psi(y_0)|_E\leqslant&\int_{-\infty}^0 K_2M_1(1+b)(1+|y_0|_E)\times\\&(\frac{1}{|s|^\alpha}+\Lambda_n^\alpha)e^{(\Lambda_n-\lambda_n-K_3M_1(1+b)\lambda_n^\alpha)s}ds+\\&\int_{-\infty}^0 K_2M_1(1+b)(\frac{1}{|s|^\alpha}+\Lambda_n^\alpha)e^{\Lambda_ns}ds\leqslant\\&K_2M_1(1+b)(\Gamma(-1-\alpha)+1)\times\\&(\frac{\Lambda_n^\alpha}{\Lambda_n-\lambda_n-K_3M_1(1+b)\lambda_n^\alpha}+\Lambda_n^{\alpha-1})(1+|y_0|_E)\leqslant\\&b(1+|y_0|_E)\end{aligned}$$

其中

$$C_8\geqslant\max\ (K_3M_1(1+b),\frac{2K_2M_1(1+b)}{b})(\Gamma(-1-\alpha)+1)$$

现取 $y_0^1,y_0^2\in P_nE$,由式(3.9.6)定义$(y_k^i)_{k=0,\cdots,N}$, $y_0=y_0^i$, $\bar{y}^i$ 如前,

$i=1,2$。由引理 3.9.1,有

$$|\bar{y}^1(s)-\bar{y}^2(s)|_E\leqslant e^{-s(\lambda_n+K_6\lambda_n^\alpha)}|y_0^1-y_0^2|_E,\ s\leqslant 0$$

因此,从(H_2),式(3.9.2)、(3.9.3)得

$$|\mathscr{T}_N^\tau\Psi(y_0^1)-\mathscr{T}_N^\tau\Psi(y_0^2)|_E\leqslant\int_{-\infty}^0|e^{As}Q_n(f(\bar{y}^1(s)+$$

$$\Psi(\bar{y}^1(s)))-f(\bar{y}^2(s)+\Psi(\bar{y}^2(s)))|_E ds\leqslant$$

$$K_2M_1(1+l)|y_0^1-y_0^2|_E(\Gamma(-1-\alpha)+1)\frac{\Lambda_n^\alpha}{\Lambda_n-\lambda_n-K_6\lambda_n^\alpha}\leqslant$$

$$l|y_0^1-y_0^2|_E$$

其中 $C_8\geqslant\max\left(K_6,\dfrac{K_2M_1(1+l)}{l}\right)$

我们再证明 $\mathscr{T}_N^\tau$ 是严格压缩的。取 $\Psi^1,\Psi^2\in\mathscr{F}_{l,b}$, $y_0\in P_nE$,依式(3.9.6)用 $P_n=\Psi^1$ 和 $P_n=\Psi^2$ 分别构造,$(y_k^1)_{k=0,\cdots,N}$ 和 $(y_k^2)_{k=0,\cdots,N}$, $\bar{y}^1$, $\bar{y}^2$ 如前。由引理 3.9.1,$(y_0=y_0^1=y_0^2)$有

$$|\bar{y}^1(s)-\bar{y}^2(s)|_E\leqslant$$

$$K_3M_1\lambda_n^\alpha|\Psi_1-\Psi_2|_\infty(1+|y_0|_E)|s|e^{-s(\lambda_n+K_6\lambda_n^\alpha)}$$

写

$$\mathscr{T}_N^\tau\Psi^1(y_0)-\mathscr{T}_N^\tau\Psi^2(y_0)\leqslant\int_{-\infty}^0 e^{As}Q_n(f(\bar{y}^1(s)$$

$$+\Psi^1(\bar{y}^1(s)))-f(\bar{y}^2(s)+\Psi^2(\bar{y}^2(s))))ds$$

则从(H_2)、式(3.9.2)和(3.9.7)得

$$|\mathscr{T}_N^\tau\Psi^1(y_0)-\mathscr{T}_N^\tau\Psi^2(y_0)|_E\leqslant$$

$$K_2M_1\int_{-\infty}^0\left(\frac{1}{|s|^\alpha}+\Lambda_n^\alpha\right)e^{\Lambda_n s}((1+l)|\bar{y}^1(s)-\bar{y}^2(s)|_E+$$

$$|\Psi_1-\Psi_2|_\infty(1+|\bar{y}^1(s)|_E)ds\leqslant$$

$$K_2M_1|\Psi_1-\Psi_2|_\infty[K_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha(1+|y_0|_E)\times$$

$$\int_{-\infty}^0(|s|^{1-\alpha}+\Lambda_n^\alpha|s|)e^{(\Lambda_n-\lambda_n-K_6\lambda_n^\alpha)s}ds+\int_{-\infty}^0\left(\frac{1}{|s|^\alpha}+\Lambda_n^\alpha\right)e^{\Lambda_n s}ds+$$

$$(1+|y_0|_E)\int_{-\infty}^0(|s|^{1-\alpha}+\Lambda_n^\alpha|s|)\times e^{(\Lambda_n-\lambda_n-K_3M_1(1-b)\lambda_n^\alpha)s}ds]$$

再对$\overline{y}^1$利用引理 3.9.1,由计算可得

$$
\begin{aligned}
&|\mathscr{T}_N^{\tau}\Psi^1(y_0) - \mathscr{T}_N^{\tau}\Psi^2(y_0)|_E \leqslant \\
&K_2M_1(1 + |y_0|_E)|\Psi_1 - \Psi_2|_\infty \times \\
&[\Lambda_n^{\alpha-1}(\Gamma(-1-\alpha) + 1) + \\
&K_3M_1(1+l)\frac{\Lambda_n^\alpha\lambda_n^\alpha}{(\Lambda_n - \lambda_n - K_6\lambda_n^\alpha)^2} \times \\
&((1-\alpha)\Gamma(-1-\alpha) + 1) + \\
&\frac{\Lambda_n^\alpha}{(\Lambda_n - \lambda_n - K_3M_1(1+b)\lambda_n^\alpha)}(\Gamma(-1-\alpha)+1)] \leqslant \\
&\frac{1}{2}(1 + |y_0|_E)|\Psi_1 - \Psi_2|_\infty
\end{aligned}
$$

其中假定C_8大于一个与n无关的适当的常数。命题 3.9.3 证毕。

以下,为了对$\mathscr{T}_N^{\tau}\Psi_N$和$\Phi$之间以及$\Psi$和$\Psi$之距离作比较,我们先叙述以下在文献[134]中证明的对方程(3.9.1)惯性流形存在的一个定理。设

$$
J\Psi(y_0) = \int_{-\infty}^0 e^{A_s}Q_nf(y(s) + P_n(y(s)))ds
$$

定理 3.9.2 如果存在常数C_0依赖于f,K_1,K_2,l和b,使得$\Lambda_n - \lambda_n \geqslant C_0(\Lambda_n^\alpha + \lambda_n^\alpha)$,则泛函$\mathscr{J}$映照$\mathscr{F}_{l,b}$为它自己,且$\mathscr{J}$是一个严格的压缩映照。因而具有不动点,即$\mathscr{J}\Phi = \Phi$,graph Φ是方程(3.9.1)的C^1惯性流形。

命题 3.9.4 在命题 3.9.3,定理 3.9.2,(H_4)和(H_5)假设之下,存在两个常数C_9,C_{10},如果$\frac{\Lambda_n - \lambda_n}{\Lambda_n^\alpha + \lambda_n^\alpha} \geqslant C_9$,$(C_9 \geqslant C_8)$,则对一切$\Psi \in \mathscr{F}_{l,b}$和一切$N,\tau$,有

$$
|\mathscr{T}_N^{\tau}P_n - \Phi|_\infty \leqslant \frac{1}{2}|\Psi - \Phi|_\infty + \varepsilon(N,\tau)
$$

其中

$$
\varepsilon(N,\tau) = C_{10}((\alpha_2(\lambda_n) + \frac{\alpha_1(\lambda_n)}{\lambda_n^\alpha})\tau + \frac{\alpha_2(\lambda_n)}{\Lambda_n^\alpha}e^{-\Lambda_n^\alpha N\tau})
$$

证明 从命题 3.9.3,有

$$|\mathscr{T}_N^\tau\Psi - \Phi|_\infty \leqslant \frac{1}{2}|\Psi - \Phi|_\infty + |\mathscr{T}_N^\tau\Phi - \Phi|_\infty$$

充分估计$|\mathscr{T}_N^\tau\Phi-\Phi|_\infty$。设 y 为以下方程的解。

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + Ay = P_n f(y + \Phi(y)) \\ y(0) = y_0\end{cases}$$

$\overline{y}_k=y(-k\tau)$,由式(3.9.6)构造$(y_k')_{k=0,\cdots,N}$,$\Psi=\Phi$,则由(H_4)和引理 3.9.2$(e_k=\epsilon_k)$有

$$|\overline{y}_k - y_k|_E \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{e}^{(k-1-j)\tau(\lambda_n + K_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)}|\epsilon_j|_E \leqslant$$

$$\alpha_1(\lambda_n)\tau^2(1 + |y_0|_E)k\mathrm{e}^{k\tau(\lambda_n+C'_4\lambda_n^\alpha)} \tag{3.9.16}$$

其中 $C'_4=\max(K_4,K_3M_1(1+l))$。由式(3.9.10)定义$\overline{y}$。则利用$(H_5)$和式(3.9.16)可得

$$|y(s) - \overline{y}(s)|_E \leqslant \tau\alpha_2(\lambda_n)(1 + |y_0|_E)\mathrm{e}^{-s(\lambda_n+K_5\lambda_n^\alpha)} +$$

$$\tau\alpha_1(\lambda_n)(1 + |y_0|_E)|s|\mathrm{e}^{-s(\lambda_n+C'_4\lambda_n^\alpha)}, \tag{3.9.17}$$

$$s \in (-(k+1)\tau, -k\tau]$$

类似地有

$$|y(s) - \overline{y}(s)| \leqslant |s + N\tau|\alpha_2(\lambda_n)(1 + |y_0|_E)\mathrm{e}^{-s(\lambda_n+K_5\lambda_n^\alpha)} +$$

$$\tau\alpha_1(\lambda_n)(1 + |y_0|_E)|s|\mathrm{e}^{-s(\lambda_n+C'_4\lambda_n^\alpha)},$$

$$s \in (-\infty, -N\tau] \tag{3.9.18}$$

因

$$\mathscr{T}_N^\tau\Phi(y_0) - \Phi(y_0) =$$

$$\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{As}Q_n(f(\overline{y}(s) + \Phi(\overline{y}(s))) - f(y(s) + \Phi(y(s))))\mathrm{d}s$$

由(H_2)、式(3.9.2)和式(3.9.7)得

$$|\mathscr{T}_N^\tau\Phi(y_0) - \Phi(y_0)|_E \leqslant$$

$$K_2M_1(1 + l)\int_{-\infty}^0 (\frac{1}{|s|^\alpha} + \Lambda_n^\alpha)\mathrm{e}^{\Lambda_n s}|\overline{y}(s) - y(s)|_E s\mathrm{d}s \leqslant$$

$$K_2M_1(1+l)(1+|y_0|_E)\times$$

$$[\alpha_2(\lambda_n)\tau\int_{-\infty}^{0}(\frac{1}{|s|^\alpha}+\Lambda_n^\alpha)e^{(\Lambda_n-\lambda_n-K_5\lambda_n^\alpha)s}ds+$$

$$\alpha_1(\lambda_n)\int_{-\infty}^{0}(|s|^{\alpha-1}+\Lambda_n^\alpha)e^{(\Lambda_n-\lambda_n-C'_4\lambda_n^\alpha)s}ds+$$

$$\alpha_2(\lambda_n)\int_{\infty}^{-N\tau}|s+N\tau|(\frac{1}{|s|^\alpha}+\Lambda_n^\alpha)e^{(\Lambda_n-\lambda_n-K_5\lambda_n^\alpha)s}ds]\leqslant$$

$$(1+|y_0|_E)C_{10}(\alpha_2(\lambda_n)\frac{\Lambda_n^\alpha}{\Lambda_n-\lambda_n-K_5\lambda_n^\alpha}\tau+$$

$$\alpha_1(\lambda_n)\frac{\Lambda_n^\alpha}{(\Lambda_n-\lambda_n-C'_4\lambda_n^\alpha)^2}\tau+$$

$$\alpha_2(\lambda_n)\frac{\Lambda_n^\alpha}{(\Lambda_n-\lambda_n-K_5\lambda_n^\alpha)^2}e^{-(\Lambda_n-\lambda_n-K_5\lambda_n^\alpha)N\tau})\leqslant$$

$$C_{10}(1+|y_0|_E)(\alpha_2(\lambda_n)\tau+\frac{\alpha_1(\lambda_n)}{\Lambda_n^\alpha}+\frac{\alpha_2(\lambda_n)}{\Lambda_n^\alpha}e^{-\Lambda_n^\alpha N\tau})$$

其中

$$C_9\geqslant\max(K_5,1,C_8,C'_4)$$

常数 C_{10} 能被具体算出，且不依赖于 N,τ 和 n。因 $\tau\to0,N\tau\to\infty$ 时 $\epsilon(N,\tau)\to0$，易得

定理 3.9.3 在命题 3.9.4 的假设下，由式(3.9.8)定义的序列 $(\Phi_N)_{N\in\mathbf{N}}$ 依 $|\cdot|_\infty$ 收敛于 Φ，其中 $(\tau_N)_{N\in\mathbf{N}}$ 使得 $N\tau_N\to\infty,N\to\infty$。

下面我们在很少的条件下证明序列 $(\Phi_N)_{N\in\mathbf{N}}$，也在 C^1 拓扑下收敛于 Φ。引入集合：

$$\mathscr{G}_l=\{\Delta:P_nE\to\mathscr{L}(P_nE,Q_nE|\sup_{y\in P_nE}|\Delta(y)|_{\mathscr{L}(P_nE,Q_nE)}\leqslant l\}$$

$$|\Delta|_\infty=\sup_{y\in P_nE}|\Delta(y)|_{\mathscr{L}(P_nE,Q_nE)}$$

对于任何 $\Psi\in\mathscr{F}_{l,b}$，定义映照 $T_\Psi:\Delta\in\mathscr{G}\to T_\Psi(\Delta)$：

$$T_\Psi(\Delta)(y_0)\eta_0=$$

$$\int_{-\infty}^{0}e^{As}Q_nDf(y(s)+\Psi(y(s)))(\eta(s)+\Delta(y(s))\eta(s))ds \tag{3.9.19}$$

其中 y 为以下问题的解：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+Ay=P_nf(y+\Psi(y))\\ y(0)=y_0\end{cases}\tag{3.9.20}$$

η 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}+A\eta=P_nf(y+\Psi(y))(\eta+\Delta(y)\eta)\\ \eta(0)=\eta_0\end{cases}\tag{3.9.21}$$

在定理 3.9.2 的假定下，能证明对于 $\Psi\in\mathscr{F}_{l,b}$，T_Ψ映照 $\mathscr{G}_l$ 为它自己。而且它是一个严格压缩的映照，且对 Ψ 是一致的。因此，可以证明 $\Phi\in C^1$。

现依 $\mathscr{T}_N^\tau$ 的构造方法来构造 T_Ψ 的近似。对一切 $N\in\mathbf{N}$，$\tau>0$，$\Psi\in\mathscr{F}_{l,b}$，在 $\mathscr{G}_l$ 上定义 $T_{N,\Psi}^\tau$如下：

$$T_{N,\Psi}^\tau(\Delta)(y_0)\eta_0=A^{-1}(I-\mathrm{e}^{-\tau A})\times$$
$$\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-k\tau A}Q_nDf(y_k+\Psi(y_k))(\eta_k+\Delta(y_k)\eta_k)+$$
$$A^{-1}\mathrm{e}^{-N\tau A}Q_nDf(y_N+\Psi(y_N))(\eta_N+\Delta(y_N)\eta_N)$$

其中$(y_k')_{k=0,\cdots,N}$和$(\eta_k)_{k=0,\cdots,N}$可由下式计算：

$$y_{k+1}=R_\tau y_k+S_\tau P_nf(y_k+\Psi(y_k))\tag{3.9.22}$$

$$\eta_{k+1}=R_\tau\eta_k+S_\tau P_nDf(y_k+\Psi(y_k))(\eta_k+\Delta(y_k)\eta_k)\tag{3.9.23}$$

设$(\Phi_N)_{N\in\mathbf{N}}$为式(3.9.8)所定义，则容易得到

$$D\Phi_{N+1}=T_{N,\Phi_N}^{\tau_N}(D\Phi_N)$$

我们在某些附加的假设下，证明 $T_{N,\Psi}^\tau$、在某种意义下逼近于 T_Ψ，从而 $D\Phi_N$逼近于 $D\Phi$。

首先，由于技术上的原因，设 f 具有有限支集。这在某些应用实例上是对的。因函数 f 能被截断，再设

$$(H_6)\qquad \begin{cases} |R_\tau y|_E \geqslant |y|_E, & \tau > 0, t > 0 \\ |e^{-At} y|_E \geqslant |y|_E, & y \in P_n E \\ |y + z|_E \geqslant |y|_E, & z \in Q_n E \end{cases} \tag{3.9.24}$$

为了使式(3.9.22)、(3.9.23)在下述意义逼近于式(3.9.20)、(3.9.21)：如果$\overline{y}(\overline{\eta})$定义在$(-\infty, 0]$等于 $y_k(\eta_k)$在$(-(k+1)\tau, -k\tau]$，在$(-\infty, -N\tau]$上等于 $y_N(\eta_N)$，则有

(H_7)　对一切 $T>0$，$\overline{y}$，$\overline{\eta}$收敛于式(3.9.20)、(3.9.21)的解 y，η在$[-T, 0]$上是一致的，其中 y_0，η_0 在 P_nE 的

任何有界集上，$\tau \to 0$，$N\tau \to \infty$

定理 3.9.4　如果定理 3.9.3 的假定，(H_6)和(H_7)成立，且 f 具有紧支集，Df 是一致连续的。则序列$(\Phi_N)_{N\in\mathbf{N}}$在 C^1 拓扑下收敛于 Φ，其中 $\tau_N \to 0$，$N\tau_N \to \infty$。

证明　从定理 3.9.3 已知，Φ_N 在 P_nE 的有界集上一致收敛于 Φ。设 B 为 E 中含有 f 支集的球，R_1 为它的半径。取任何 $y_0 \in P_nE$ 使得

$$|y_0|_E \geqslant R_1$$

则由(H_6)推出：当 y 为式(3.9.5)的解，$(y_k)_{k=0,\cdots,N}$为式(3.9.6)所定义，有

$$|y(s)|_E \geqslant R_1,\ s \leqslant 0,$$

$$|y_k|_E \geqslant R_1,\ k = 0, \cdots, N$$

由式(3.9.4)和式(3.9.7)推出

$$\Phi(y_0) = \Phi_N(y_0) = 0$$

因此，对一切 N，Φ_N 具支集含在 B 中。Φ_N 在 P_nE 上一致收敛于 Φ。

记

$$D\Phi_{N-1} - D\Phi = T^{\tau_N}_{N,\Phi_N}(D\Phi_N) - T^{\tau_N}_{N,\Phi_N}(D\Phi) + T^{\tau_N}_{N,\Phi_N}(D\Phi) - T_\Phi(D\Phi) \tag{3.9.25}$$

用证明命题 3.9.3 的方法可得

$$|T^{\tau_N}_{N,\Phi_N}(D\Phi_N) - T^{\tau_N}_{N,\Phi_N}(D\Phi)|_\infty \leqslant \frac{1}{2}|D\Phi_N - D\Phi|_\infty$$

(3.9.26)

于此，y_0，$\eta_0 \in P_n E$，$|\eta_0| = 1$，$(y'_k)_{k=0,\cdots,N}$ 和 $(\eta_k)_{k=0,1,\cdots,N}$，$((y_k^N)_{k=0,\cdots,N}$和$(\eta_k^N)_{k=0,1,\cdots,N})$由式(3.9.22)和式(3.9.23)所定义，$\Psi=\Phi,\Delta=D\Phi,(\Psi=\Phi_N,\Delta=D\Phi_N)$，定义$\bar{y},\bar{\eta}(\bar{y}^N,\bar{\eta}^N)$在$(H_7)$中，如果 y,η 为式(3.9.20)、(3.9.21)具 $\Psi=\Phi,\Delta=D\Phi$ 的解，则有

$$T^{\tau_N}_{N,\Phi_N}(D\Phi)(y_0)(\eta_0) - T'_\Phi(D\Phi)(y_0)(\eta_0) =$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{As}Q_n(Df(\bar{y}^N(s) + \Phi_N(\bar{y}^N(s))) \times$$

$$(\bar{\eta}^N(s) + D\Phi(\bar{y}^N(s))\,\bar{\eta}^N(s)) -$$

$$Df(y(s) + \Phi(y(s)))(\eta(s) + D\Phi(y(s))\eta(s))\mathrm{d}s \quad (3.9.27)$$

如$|y_0|_E \geqslant R_1$，则可证

$$T_\Phi(D\Phi)(y_0)(\eta_0) = T^{\tau_N}_{N,\Phi_N}(D\Phi)(y_0)(\eta_0) = 0$$

存在常数 C'_5，使得式(3.9.27)中的积分不超过

$$C'_5(\frac{1}{|s|^\alpha} + \Lambda_n^\alpha)|\eta_0|_E e^{(\Lambda_n - \lambda_n - K_2 M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)s}$$

因此，该积分对于 y_0 和 η_0 一致收敛，$|\eta_0|_E=1$，对 $\epsilon>0$，存在T，它与 y_0,η_0 无关，使得

$$\int_{-\infty}^{-T} |e^{As}Q_n(Df(\bar{y}^N(s) + \Phi_N(\bar{y}^N(s))) \times$$

$$(\bar{\eta}^N(s) + D\Phi(\bar{y}^N(s))\,\bar{\eta}^N(s)) -$$

$$Df(y(s) + \Phi(y(s)))(\eta(s) + D\Phi(y(s))\eta(s))|_E\mathrm{d}s \leqslant \frac{\epsilon}{2}$$

可分式(3.9.27)的积分其余部分为以下积分之和

$$I_1 = \int_{-T}^{0} e^{As}Q_n(Df(\bar{y}^N(s) + \Phi_N(\bar{y}^N(s))) \times$$

$$(\bar{\eta}^N(s) + D\Phi(\bar{y}^N(s))\,\bar{\eta}^N(s)) -$$

$$Df(\bar{y}(s) + \Phi(\bar{y}(s)))(\bar{\eta}(s) + D\Phi(\bar{y}(s))\,\bar{\eta}(s))\mathrm{d}s$$

$$I_2 = \int_{-T}^{0} e^{A_{\tau}} Q_n (Df(\overline{y}(s) + \Phi(\overline{y}(s))) \times$$
$$(\overline{\eta}(s) + D\Phi(\overline{y}(s))\overline{\eta}(s)) -$$
$$Df(y(s) + \Phi(y(s)))(\eta(s) + D\Phi(y(s))\eta(s))\mathrm{d}s$$

在证明命题 3.9.3 中，已证存在常数 $C'_6(T,n)$使得

$$|\overline{y}(s) - \overline{y}^N(s)|_E \leqslant C'_6(T,n)|\Phi_N - \Phi|_\infty(1 + |y_0|_E) \leqslant$$
$$C'_6(T,n)(1 + R_1)|\Phi_N - \Phi|_\infty \tag{3.9.28}$$

我们能找到有界集 B_T，它依赖与 n,R_1 和 T 使得$\overline{y}(s)$和$\overline{y}^N(s)$在 B_T 内，$\forall s\in[-T,0]$。因此，对任何 $\alpha>0$，如选取 α_n 使得

$$|\overline{y}(s) - \overline{y}^N(s)|_E + |\Phi(\overline{y}(s)) - \Phi^N(\overline{y}^N(s))|_E \leqslant \alpha_N,$$
$$\forall s \in [-T,0], |y_0| \leqslant R_1$$

我们能证明，存在 $C'_7(T,n)$，使得

$$|\overline{\eta}^N(s) - \overline{\eta}(s)|_E \leqslant C'_7(T,n)(M_1(\alpha_N) + M_2(\alpha_N)) \tag{3.9.29}$$
$$s \in [-T,0], |y_0|_E \leqslant R_1, |\eta_0|_E = 1$$

其中

$$M_1(\alpha) = \sup_{|x-y|\leqslant\alpha} |Df(x) - Df(y)|_{\mathscr{L}(E,F)}$$
$$M_2(\alpha) = \sup_{\substack{x,y\in B_T \\ |x-y|_E\leqslant\alpha}} |D\Phi(x) - D\Phi(y)|_{\mathscr{L}(E)}$$

由式(3.9.28)、(3.9.29)，Df 在 P_nE 上和 $D\Phi$ 在 B_T 上的一致连续性表明 I_1 对于 y_0,η_0，$(|y_0|_E\leqslant R_1, |\eta_0|_E=1)$一致收敛于零。再由$(H_7)$，可知 I_2 也对 $y_0,\eta_0(|y_0|_E\leqslant R_1, |\eta_0|_E=1)$一致收敛于零。

因此，$\mathscr{T}^{\tau_N}_{N,\Phi_N}(D\Phi)(y_0)\eta_0 - T_\Phi(D\Phi)(y_0)\eta_0$ 对于 $y_0,z_0(|z_0|_E\leqslant R_1, |\eta_0|_E=1)$一致收敛于零。但因$|y_0|\leqslant R_1$，它为零。因此

$$T^{\tau_N}_{N,\Phi}(D\Phi_N) - T_\Phi(D\Phi)|_\infty \to 0, N \to \infty$$

由此及式(3.9.25)、(3.9.26)得

$$|D\Phi - D\Phi_N|_\infty \to 0, N \to \infty$$

定理证毕。

现举三个例子具体说明。

例 1 考虑经典的具对称线性部分的抛物型半线性方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au=g(u)\\ u(0)=u_0\end{cases}\tag{3.9.30}$$

这里算子 A 为在 Hilbert 空间上的稠定线性正的无界自共轭算子，具有模 $|\cdot|$。它具有紧的豫解集，具有对应于特征值

$$0<\mu_0\leqslant\mu_1\leqslant\cdots\leqslant\mu_j\to+\infty$$

的特征向量所组成的正交基 $\{w_j\}_{j\in\mathbf{N}}$。

空间 $D(A^s)(s>0)$ 如通常所定义的，具有模 $|\cdot|_s=|A^s\cdot|$。设 $g\in C^1:D(A^{\alpha+\gamma})\to D(A^\gamma)$，$\gamma\geqslant0$，$\alpha\in[0,1)$。取

$$\mathscr{E}=H,F=D(A^\gamma),E=D(A^{\alpha+\gamma})$$

定义 P_n 为 A 的特征投影。则 P_nH 和 Q_nH 在 e^{-At} 下 $(t\geqslant0)$ 是不变的。$(\mathrm{e}^{-At})_{t\geqslant0}$ 能在 P_nH 上延拓为一个群，$\mathrm{e}^{-At}D(A^\gamma)\subset D(A^{\alpha+\gamma})$，$\forall\ t>0$。

假设 $(H_1)(H_2)$ 易验证是满足的，只需取

$$K_1=K_2=1,\lambda_n=\mu_n,\Lambda_n=\mu_{n+1}$$

在适当假设下，式 (3.9.30) 在 $D(A^{\alpha+\gamma})$ 中定义一个连续半群 $(S(t))_{t\geqslant0}$。

一般来说，函数 g 不是整体 Lipschitz 的。为克服这个困难，可设 $(S(t))_{t\geqslant0}$ 在 $D(A^{\alpha+\gamma})$ 中具有一个有界吸收集。取 $R\geqslant0$ 适当大，使得在 $D(A^{\alpha+\gamma})$ 中以 R 为半径的球包含这个吸收集。定义函数 f 为：

$$f(u)=\theta\left(\frac{|u|_{\alpha+\gamma}^2}{R^2}\right)g(u)$$

其中 $\theta(x)\in C^1$，使得

$$\begin{cases}\theta(x)=1,\ x\leqslant1\\ \theta(x)\leqslant1,\ \forall\ x\\ \theta(x)=0,\ x\geqslant2\end{cases}$$

一般,可考虑截断后的方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au=f(u)\\ u(0)=u_0\end{cases}\tag{3.9.31}$$

考察命题 9.3.3,谱间隙条件为

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\mu_{n+1}-\mu_n}{\mu_{n+1}^{\alpha}+\mu_n^{\alpha}}=\infty\tag{3.9.32}$$

当 A 为椭圆型算子在有界域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上。它的特征值具有渐近性质:

$$\mu_n\sim Cn^p\tag{3.9.33}$$

能证明式(3.9.32)成立,当

$$p(\alpha-1)>1\tag{3.9.34}$$

条件(3.9.34)是充分的,不是必要的。例如 $A=-\Delta$,具周期边界条件在矩形$[0,L_1]\times[0,L_2]\subset\mathbf{R}^2$ 上。当$\dfrac{L_1}{L_2}$为有理数,$\alpha=0$ 时,式(3.9.32)是满足的,但 $p(1-\alpha)=1$,不满足(3.9.34)。

式(3.9.5)的逼近式(3.9.6)可采取某些不同的方法。首先,考虑简单 Euler 格式:

$$\frac{y_k-y_{k-1}}{\tau}+Ay_k=P_nf(y_k+\Psi(y_k))$$

这就给出

$$\begin{cases}R_\tau=I+\tau A\\ S_\tau=-\tau I\end{cases}\tag{3.9.35}$$

我们来验证(H_3),(H_4),(H_5),$(H_4)'$,$(H_5)'$。首先(H_3)是显然的,如取

$$K_3=1$$

易于验证(H_5)。由式(3.9.5)得

$$\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{\alpha+\gamma}\leqslant(\lambda_n+M_1(1+b)\lambda_n^{\alpha})|y|_{\alpha+\gamma}+\lambda_n^{\alpha}M_1(1+b)$$

记

$$y(t) = e^{-At}y(0) + \int_0^t e^{-A(t-s)}P_n f(y(s) + \Psi(y(s)))ds$$

可得

$$\begin{aligned}
&|y(t)|_{\alpha+\gamma} \leqslant e^{-\lambda_n t}|y(0)|_{\alpha+\gamma} + \\
&\lambda_n^{\alpha}\int_t^0 e^{-\lambda_n(t-s)}|f(y(s) + \Psi(s))|_\gamma ds \leqslant \\
&e^{-\lambda_n t}|y(0)|_{\alpha+\gamma} + \lambda_n^{\alpha-1}M_1(1+b) + \\
&M_1(1+b)\lambda_n^{\alpha}\int_t^0 e^{-\lambda_n(t-s)}|y(s)|_{\alpha+\gamma}ds
\end{aligned}$$

由 Gronwall 引理得

$$|y(t)|_{\alpha+\gamma} \leqslant 2(|y(0)|_{\alpha+\gamma} + \lambda_n^{\alpha-1}M_1(1+b))e^{-(\lambda_n+M_1(1+b)\lambda_n^{\alpha})t}$$

因此

$$\begin{aligned}
&|\frac{dy}{dt}|_{\alpha+\gamma} \leqslant 3(\lambda_n + M_1(1+b)\lambda_n^{\alpha}) \times \\
&(|y_0|_{\alpha+\gamma} + \lambda_n^{\alpha-1}M_1(1+b))e^{-(\lambda_n+M_1(1+b)\lambda_n^{\alpha})t}
\end{aligned}$$

(H_5)成立，其中

$$a_2(\lambda_n) = 3(\lambda_n + M_1(1+b)\lambda_n^{\alpha})\max\ (1, M_1(1+b)\sup_n \lambda_n^{\alpha-1}),$$

$$K_5 = M_1(1+b)$$

现证(H_4)。设 y 为式(3.9.5)的解。如令$\tilde{y}_k = y(-k\tau)$，则

$$\frac{\tilde{y}_k - \tilde{y}_{k+1}}{\tau} + A\,\tilde{y}_k = P_n f(\tilde{y}_k + \Psi(\tilde{y}_k)) + \varepsilon'_k$$

其中

$$\varepsilon'_k = \frac{1}{\tau}\int_{-(k+1)\tau}^{-k\tau}(\frac{dy}{dt}(s) - \frac{dy}{dt}(-k\tau))ds$$

因此，$\varepsilon_k = \tau\varepsilon'_k$。利用式(3.9.5)

$$\begin{aligned}
&|\frac{dy}{dt}(s) - \frac{dy}{dt}(-k\tau)|_{\alpha+\gamma} \leqslant |Ay(s) - Ay(-ks)|_{\alpha+\gamma} + \\
&|P_n(f(y(s) + \Psi(y(s))) - f(\tilde{y}(s)_k + \Psi(\tilde{y}_k)))|_{\alpha+\gamma}
\end{aligned}$$

因 $\Psi \in \mathscr{F}_{l,b}$和式(3.9.2)，得

$$
\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(s) - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(-k\tau) \right|_{\alpha+\gamma} \leqslant \\
& (\lambda_n + M_1(1+l)\lambda_n^{\alpha}) \left| y(s) - y(-k\tau) \right|_{\alpha+\gamma} \leqslant \\
& \tau(\lambda_n + M_1(1+l)\lambda_n^{\alpha}) \int_{-k\tau}^{s} \left| \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(\theta) \right|_{\alpha+\gamma} \mathrm{d}\theta \leqslant \\
& \tau(\lambda_n - M_1(1+l)\lambda_n^{\alpha})(k\tau + s)\alpha_2(\lambda_n)\mathrm{e}^{(\lambda_n + K_5\lambda_n^{\alpha})t}
\end{aligned}
$$

由此推得(H_4),其中

$$\alpha_1(\lambda_n) = (\lambda_n + M_1(1+l)\lambda_n^{\alpha})\alpha_2(\lambda_n)$$

$$K_4 = K_5$$

为验证$(H_4)'$,$(H_5)'$,每个具体方程要求特殊的证明。首先,必须证明吸引子的存在性。而且它是在$D(A^{\alpha+\gamma})$中有界的。其次关于时间导数的界能从解的时间解析性和 Cauchy 不等式得到。最后,(H_6)的证明是直接的。(H_7)能用经典性繁琐的计算得到。总之,惯性流形存在,而且$\{\Phi_N\}_{N\in\mathbb{N}}$依$C^1$拓扑收敛,只要式(3.9.32)成立,$n$充分大。

式(3.9.5)的另一种可能的逼近是

$$y_{k+1} = \mathrm{e}^{A\tau}y_k + A^{-1}(\mathrm{e}^{A\tau} - 1)P_n f(y_k + \Psi(y_k))$$

其中

$$R_\tau = \mathrm{e}^{A\tau}, S_\tau = A^{-1}(\mathrm{e}^{A\tau} - I) \tag{3.9.36}$$

所有假设同样能被验证。

例 2 考虑式(3.9.31)的定常解$\bar{u}$

$$A\bar{u} = f(\bar{u})$$

令

$$v = u - \bar{u}$$

$$\mathscr{A}v = Au - Df(\bar{u})v + \gamma v$$

$$h(v) = f(\bar{u} + v) - f(\bar{u}) - Df(\bar{u})v + \gamma v$$

其中γ选取得使得$\mathscr{A} \geqslant 0$(即$(\mathscr{A}v, v) > 0, \forall\, v \in D(\mathscr{A}) = D(A)$)。则式(3.9.31)变为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \mathscr{A}v = h(v) \\ v(0) = u_0 - \bar{u} \end{cases} \tag{3.9.37}$$

如设

$$\mu_j \sim Cj^p, p > 0$$

$$\mathscr{E} = H, F = D(A^\gamma) = D(\mathscr{A}^\gamma), E = D(A^{\alpha-\gamma}) = D(\mathscr{A}^{\alpha-\gamma})$$

如 $p(1-\alpha)>1$，则存在 $\mathscr{A}$ 的特征向量序列 $\{\mathscr{P}_{n_k}\}_{k\in \mathbf{N}}$ 使得 (H_1)，(H_2) 成立，其中

$$P_k = \mathscr{P}_{nk}, \lambda_k = \mu_{nk} + C'\mu_{nk}^\alpha$$

$$\Lambda_k = \mu_{n_{k+1}} - C'\mu_{n_{k+1}}^\alpha$$

这里 C' 为一常数，依赖于 α 和 f。h 为整体 Lipschitz 且满足式(3.9.2)。由式(3.9.31)在 $D(A^{\alpha+\gamma})$ 中存在吸收球推出式(3.9.37)的类似结果。

现构造式(3.9.37)的惯性流形：因

$$\Lambda_k - \lambda_k = \mu_{n_{k+1}} - \mu_{n_k} - C'(\mu_{n_k}^\alpha + \mu_{n_{k+1}}^\alpha)$$

$$\mu_{n_k} \sim n_k^p$$

条件 $p(1-\alpha)>1$ 推出定理 9.6 和谱间隙条件满足。式(3.9.5)的逼近可考虑为

$$\frac{y_k - y_{k+1}}{\tau} + \mathscr{A}y_k = P_n f(y_k + \Psi(y_k))$$

由此

$$R_\tau = I + \tau\mathscr{A}$$

$$S_\tau = -\tau I$$

我们需要改变在 $P_k D(A^{\alpha+\gamma})$ 上的模以满足 (H_3)。对任何 $y\in D(A^{\alpha+\gamma})$，定义

$$\| y \|_H = \sup_{l\geq 0} \frac{|\mathscr{A}^l y|}{\lambda_k^l}$$

$$\| y \|_{\alpha+\gamma} = \| \mathscr{A}^{\alpha+\gamma} y \|_H$$

$$\| y \|_{\gamma} = \| \mathscr{A}^{\gamma} y \|_{H}$$

能证明存在C''使得

$$| \mathscr{A}^{l} y | \leqslant C'' \lambda_k^{l} | y |, \forall\, l \geqslant 0, k \geqslant 0, y \in P_k D(A^{\alpha+\gamma})$$

引入模

$$\| y + z \|_{H} = \| y \|_{H} + | z |$$

$$\| y + z \|_{\alpha+\gamma} = \| y \|_{\alpha+\gamma} + | z |_{\alpha+\gamma}$$

$$\| y + z \|_{\gamma} = \| y \|_{\gamma} + | z |_{\gamma}$$

是和以前的模等价的。且其常数不依赖于k。容易证明对于这些模(H_3)成立：

(H_4)，(H_5)，$(H_4)'$和$(H_5)'$如前估计，(H_6)，(H_7)也易于验证。

式(3.9.5)的近似可考虑如下：

$$y_{k+1} = \mathrm{e}^{\mathscr{A}\tau} y_k + \mathscr{A}^{-1}(\mathrm{e}^{\mathscr{A}\tau} - I) P_n f(y_k + \Psi(y_k))$$

此时我们再用不同形式的模去满足(H_3)的第一部分，第二部分可从下面得到：

$$\mathscr{A}^{-1}(\mathrm{e}^{\mathscr{A}\tau} - I) P_n = \int_0^{\tau} \mathrm{e}^{\mathscr{A}\tau} P_n \mathrm{d}s$$

例 3 一类线性反对称算子的方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + A_0 u + Cu + F(u) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

其中A_0满足前面例1如同A的假设，C为线性有界反对称算子，：$D(A^{s_0}) \to H, s_0 > 0$；$F$为$C^1$函数，$D(A_0^{\alpha+\gamma}) \to D(A_0^{\gamma})$，$\gamma \geqslant 0$，$\alpha \in (0,1]$。设$C$和$A_0$可交换。取

$$A = A_0 + C, E = D(A_0^{\gamma+\alpha}), F = D(A_0), \mathscr{E} = H$$

$(P_n)_{n\in \mathbf{N}}$，$(\lambda_n)_{n\in \mathbf{N}}$，$(\Lambda_n)_{n\in \mathbf{N}}$如例1。$(H_1)$，$(H_2)$易验证。

此类方程的第一例子，是激光方程。此时

$$H = L^2(\Omega), \Omega \subset \mathbf{R}^m \text{ 为有界开集}$$

$$A_0 u = - \Delta u + u$$

具有 Dirichlet，Neumann 或周期边界条件

$$Cu = \mathrm{i}\alpha(A_0 u - u)$$

$$F(u) = (1+\gamma)u + (1+\mathrm{i}\beta)f(|u|^2)u$$

$f(s)=\dfrac{s}{1+\delta s}$，$\delta>0$。Ginzburg-Landau 方程为第二个例子。但 G-L 方程的非线性函数不是整体 Lipschitz 的。但它具有吸收球。命题 3.9.3对于这两个方程是成立的，只要谱间隙条件满足。当空间一维时，或如 $\Omega=(0,L_1)\times(0,L_2)\subset\mathbf{R}^2$，$\dfrac{L_1}{L_2}$为有限数，均满足这一条件。

式(3.9.5)的近似为

$$\begin{aligned} y_{k+1} = {} & \mathrm{e}^{(A_0+C)\tau} y_k + \\ & (A_0+C)^{-1}(\mathrm{e}^{(A_0+C)\tau} - 1)P_n f(y_k + \Psi(y_k)) \end{aligned}$$

利用不等式

$$(A_0+C)^{-1}(\mathrm{e}^{(A_0+C)\tau} - I) = \int_0^\tau \mathrm{e}^{(A_0+C)s}\mathrm{d}s$$

(H_3)是满足的。

激光方程不是耗散的，不具有吸引子。命题 3.9.3 和定理 3.9.3 是成立的，对于 G-L 方程，吸引子的存在性已证。且它的解是时间解析的。因此，$(H_4)'$和$(H_5)'$成立。对(H_6)和(H_7)也是容易验证成立的。



第四章 离散吸引子及近似计算

我们对整体吸引子、惯性流形、近似惯性流形进行了许多重要的理论探讨，并得到了一系列重要的、有意义的理论成果，揭示了无穷维动力系统的许多特性。然而，对于无穷维动力系统的本质了解还是很肤浅的，例如，仅仅知道它的存在性及很粗的维数估计，究竟它有什么具体的几何结构和拓扑不变性？整体吸引子所包含的内容是很广泛的，有不动点、周期解、拟周期解和奇异吸引子，如何区分它们？它们和初值、边界条件、系统参数如何发生具体联系？如何从有限维动力系统具体走向无穷维？诸如此类问题都是不清楚的。为了揭示这些问题，采取对 PDE 离散化成为 ODE 的方法(即无限维化为有限维)，并采用长时间数值计算方法，不失为一条很好的研究途径。在这一章里，我们将对几个典型方程采用离散化方法，求出它的离散的吸引子，惯性流形，近似惯性流形，并给出数值计算结果，使我们对上述具有感性的认识，并有新的启迪。由于在数值计算方法上必须考虑 $t\to\infty$ 时的有效性，因此促使形成长时间的数值方法，这对计算数学来说，也将产生深远的影响。我们这里着重介绍非线性 Galerkin 等方法。

4.1 广义 Ginzburg-Landau 方程

1996 年，郭、常在文献[147]中研究一类广义 Ginzburg-Landau 方程离散吸引子及其维数估计。

1989 年，Brand H R 和 Deissler R J 提出了如下的广义 Ginzburg-Landau 方程

$$\partial_t u + \nu u_x = \chi u + (\gamma_r + \mathrm{i}\gamma_i)u_{xx} - (\beta_r + \mathrm{i}\beta_i)|u|^2 u -$$

$$(\delta_r + \mathrm{i}\delta_i)|u|^4 u - (\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i)|u|^2 u_x - (\mu_r + \mathrm{i}\mu_i)u^2\overline{u}_x$$

(4.1.1)

其中：γ_r，δ_r 和 χ 为正常数；$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，ν，γ_i，β_r，β_i，δ_r，δ_i，λ_r，λ_i，μ_r 和 μ_i 为实常数。1995 年，郭、高在文献[22]中对方程(4.1.1)的周期初值问题

$$u(x+1,t)=u(x,t),x\in\mathbf{R},t>0, \tag{4.1.2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),x\in\mathbf{R} \tag{4.1.3}$$

进行了研究，式(4.1.1)当 $\nu=\delta_r=\delta_i=\lambda_r=\lambda_i=\mu_r=\mu_i=0$，许多人研究了这个问题。当 $\beta_r<0,\gamma_r=0$ 时，1988 年，Yang Y 在文献[146]中提出问题(4.1.1)～(4.1.3)的解可能“blow－up”。在文献[22]中证明了问题(4.1.1)～(4.1.3)存在整体光滑解和整体吸引子，并给出吸引子的 Hausdorff 维数和 fractal 维数上界的估计。

我们考虑问题(4.1.1)～(4.1.3)的离散化，并对其离散解作一致性先验估计。

设 $J\in\mathbf{N}$，$h=\frac{1}{J}$，近似函数 $u(x)\in L^2(0,1)$ 为

$$u=(u_1,u_2,\cdots,u_J)^{tr}=\left(u(\frac{1}{J}),u(\frac{2}{J}),\cdots,u(1)\right)^{tr} \tag{4.1.4}$$

离散负 Laplace 算子 $-\Delta$ 具周期条件的有限差分格式，令

$$A=J^2A_1=J^2\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{J\times J} \tag{4.1.5}$$

利用以下通常的符号

$$u_{jx}=\frac{1}{h}(u_{j+1}-u_j)=\frac{1}{h}\Delta_+u_j,\ u_{j\bar{x}}=\frac{1}{h}(u_j-u_{j-1})=$$

$$\frac{1}{h}\Delta_- u_j,\ u_{j\bar{x}} = \frac{1}{2h}(u_{j+1} - u_{j-1}) = \frac{1}{2h}(\Delta_+ u_j + \Delta_- u_j)$$

GL 方程(4.1.1)作空间有限差分可得

$$\partial_t u_j + \nu u_{j\hat{x}} = \chi u_j + (\gamma_r + \mathrm{i}\gamma_i)u_{j\bar{x}x} - (\beta_r + \mathrm{i}\beta_i)|u_j|^2 u_j - (\delta_r + \mathrm{i}\delta_i)|u_j|^4 u_j - (\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i)P(u_{j-1},u_j,u_{j+1}) - (\mu_r + \mathrm{i}\mu_i)Q(u_{j-1},u_j,u_{j+1}) \tag{4.1.6}$$

其中

$$P(u_{j-1},u_j,u_{j+1}) = \frac{1}{2}\bar{u}_j(u_j^2)_{\hat{x}} = \frac{1}{4h}\bar{u}_j(u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2),$$

$$Q(u_{j-1},u_j,u_{j+1}) = u_j(|u_j|^2)_{\hat{x}} - \frac{1}{2}\bar{u}_j(u_j^2)_{\hat{x}} = \frac{1}{4h}[2u_j(|u_{j+1}|^2 - |u_{j-1}|^2) - \bar{u}_j(u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2)],$$

$$u_j(t) = u_{j+1}(t) \tag{4.1.7}$$

$$u_j(0) = u_0(x_j),\ j = 1,2,\cdots,J \tag{4.1.8}$$

两个离散的复周期函数 $u_h=\{u_j|j=1,2,\cdots,J\}$ 和 $v_h=\{v_j|j=1,2,\cdots,J\}$的内积为

$$(u,v)_h = \sum_{j=1}^{J} u_j\bar{v}_j h$$

其中 $\bar{v}_j$ 表示 v_j 的复数共轭。对于离散函数 u_h 及其 k 阶差商 $\delta^k u_h$ $(k>0)$的模以下式表示

$$\|\delta^k u_h\|_p = \left(\sum_{j=1}^{J-k}\left\|\frac{\Delta_+^k u_j}{h^k}\right\|_h^p\right)^{1/p},1\leqslant p<\infty,$$

$$\|\delta^k u_h\|_\infty = \max_{j=1,2,\cdots,J-k}\left|\frac{\Delta_+^k u_j}{h^k}\right|$$

其中 $k\geqslant 0$ 为非负整数,p 为实数。现叙述离散函数 u_h 某些差商的插值不等式,详见文献[148]。

引理 4.1.1 对于任何离散函数 $u_h=\{u_j|j=1,2,\cdots,J\}$有

$$\|u_h\|_\infty\leqslant K_1\|u_h\|_2^{1/2}(\|\delta u_h\|_2+\|u_h\|_2)^{1/2} \tag{4.1.9}$$

$$\|\delta u_h\|_2\leqslant K_2\|u_h\|_2^{1/2}(\|\delta^2 u_h\|_2+\|u_h\|_2)^{1/2} \tag{4.1.10}$$

$$\|\delta^k u_h\|_p \leqslant K_3 \|u_h\|_2^{1-\frac{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}{l}} (\|\delta^l u_h\|_2 + \|u_h\|_2)^{\frac{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}{l}}$$

(4.1.11)

其中 K_1,K_2 和 K_3 为常数，它们与离散函数 u_h 步长无关。$2\leqslant p\leqslant \infty, 0\leqslant k<n$。

为简单计，$\|u_h\|_2=\|u_h\|$，$\|u_h\|_{H^1}=\|\delta u_h\|+\|u_h\|$，$\|u_h\|_{H^2}=\|\delta^2 u_h\|+\|u_h\|$。有时简记 u_h 为 u。

引理 4.1.2 设两个复离散函数 $f_h=\{f_j\mid j=1,\cdots,J\}$ 和 $g_h=\{g_j\mid j=1,\cdots,J\}$ 满足周期条件 $f_j=f_{j+J}, g_j=g_{j+J}$，则有等式

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}\bar{f}_j(f_{j+1}-f_{j-1})=0,$$

$$(f_j,g_j)_x=f_{j+1}g_{jx}+f_{jx}g_j,\quad (f_j,g_j)_{\bar{x}}=f_{j+1}g_{j\bar{x}}+f_{j\bar{x}}g_{j-1}$$

(4.1.12)

$$(f,g_{\bar{x}})=-(f_x,g)$$

证明 直接计算得

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}\bar{f}_j(f_{j+1}-f_{j-1})=\mathrm{Re}\Big[\sum_{j=1}^{J}\bar{f}_j f_{j+1}-\sum_{j=0}^{J-1}\bar{f}_{j+1}f_j\Big]$$

利用周期条件

$$\sum_{j=0}^{J-1}\bar{f}_{j+1}f_j=\sum_{j=1}^{J}\bar{f}_{j+1}f_j$$

因此

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}\bar{f}_j(f_{j+1}-f_{j-1})=\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}(\bar{f}_j f_{j+1}-\bar{f}_{j+1}f_j)=$$

$$\sum_{j=1}^{J}\mathrm{Re}(\bar{f}_j f_{j+1}-\bar{f}_{j+1}f_j)=0,$$

$$(f_j,g_j)_x=\frac{1}{h}(f_{j+1}g_{j+1}-f_jg_j)=$$

$$\frac{1}{h}(f_{j+1}g_{j+1}-f_{j+1}g_j+f_{j+1}g_j-f_jg_j)=$$

$$f_{j+1}g_{jx}+f_{jx}g_j$$

类似地有

$$(f_j,g_j)_{\hat{x}} = \frac{1}{2h}(f_{j+1}g_{j+1} - f_{j-1}g_{j-1}) =$$

$$f_{j+1}\frac{g_{j+1} - g_{j-1}}{2h} + \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h}g_{j-1} =$$

$$f_{j+1}g_{j\hat{x}} + f_{j\hat{x}}g_{j-1},$$

$$(f,g_{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{J} f_j\,\overline{g}_{j\bar{x}}h = \sum_{j=1}^{J} f_j(\overline{g}_j - \overline{g}_{j-1}) =$$

$$\sum_{j=1}^{J} f_j\overline{g}_j - \sum_{j=1}^{J} f_j\overline{g}_{j-1} = \sum_{j=1}^{J} f_j\overline{g}_j - \sum_{j=0}^{J-1} f_{j+1}\overline{g}_j =$$

$$\sum_{j=1}^{J} f_j\overline{g}_j - \sum_{j=1}^{J} f_{j+1}\overline{g}_j = -(f_x,g)$$

引理 4.1.3 设 $\gamma_r>0,\delta_r>0,\chi>0$ 和 $4\gamma_r\delta_r>(\lambda_i-\mu_i)^2$，则对离散方程组(4.1.6)、(4.1.7)、(4.1.8)的解，有

$$\| u(t) \|^2 \leqslant e^{-2\chi t}\| u(0) \|^2 + \frac{P^2}{2\chi}(1 - e^{-2\chi t}),\ \forall\ t \geqslant 0 \tag{4.1.13}$$

$$\int_0^{\infty} \| u_x(t) \|^2 dt < \infty \tag{4.1.14}$$

其中 $P=2\chi+\dfrac{(\beta_r+1/2)^2}{2\beta}$，$\beta$ 为适当的正常数。

证明 作式(4.1.6)和 u 的内积，取实部得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| u \|^2 = &-\nu\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}u_{j\bar{x}}\overline{u}_jh + \chi\| u \|^2 - \gamma_r\| u_x \|^2 - \\ &\beta_r\sum_{j=1}^{J}|u_j|^4h - \delta_r\sum_{j=1}^{J}|u_j|^6h - \\ &\mathrm{Re}\Big\{(\lambda_r + i\lambda_i)\sum_{j=1}^{J}P(u_{j-1},u_j,u_{j+1})\overline{u}_jh\Big\} - \\ &\mathrm{Re}\Big\{(\mu_r + i\mu_i)\sum_{j=1}^{J}Q(u_{j-1},u_j,u_{j+1})\overline{u}_jh\Big\}\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

由引理 4.1.2，

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}u_{j\hat{x}}\overline{u}_jh = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}\overline{u}_j(u_{j+1} - u_{j-1})h = 0,$$

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}P(u_{j-1},u_j,u_{j+1})\bar{u}_jh=$$

$$\frac{1}{4}\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}[2|u_j|^2(|u_{j-1}|^2-|u_{j-1}|^2)-\bar{u}_j^2(u_{j+1}^2-u_{j-1}^2)]=0$$

于是

$$-\mathrm{Re}\{(\lambda_r+\mathrm{i}\lambda_i)\sum_{j=1}^{J}P(u_{j-1},u_j,u_{j+1})\bar{u}_jh\}=$$

$$-\mathrm{Re}\{(\mu_r+\mathrm{i}\mu_i)\sum_{j=1}^{J}Q(u_{j-1},u_j,u_{j+1})\bar{u}_jh\}=$$

$$\frac{1}{4}\lambda_i\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J}(\bar{u}_j)^2(u_{j+1}^2-u_{j-1}^2)-\frac{1}{4}\mu_i\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J}(\bar{u}_j)^2(u_{j+1}^2-u_{j-1}^2)=$$

$$\frac{1}{4}(\lambda_i-\mu_i)\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J}(\bar{u}_j)^2(u_{j+1}^2-u_{j-1}^2)=\frac{1}{4}(\lambda_i-\mu_i)\times$$

$$\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J}(\bar{u}_j)^2(u_{j+1}+u_{j-1})(u_{j+1}-u_j+u_j-u_{j-1})\leqslant$$

$$(\lambda_i-\mu_i)\sum_{j=1}^{J}|u_j|^2\frac{|u_{j+1}+u_{j-1}|}{2}\frac{|u_{jx}+u_{j\bar{x}}|}{2}h\leqslant$$

$$a_1b_1\left(\sum_{j=1}^{J}|u_j|^4|\frac{u_{j-1}+u_{j+1}}{2}|^2h\right)^{\frac{1}{2}}\|u_x\|\leqslant$$

$$\frac{a_1^2}{2}\sum_{j=1}^{J}|u_j|^4|\frac{u_{j+1}+u_{j-1}}{2}|^2h+\frac{b_1^2}{2}\|u_x\|^2\leqslant$$

$$\frac{a_1^2}{2}\sum_{j=1}^{J}|u_j|^6h+\frac{b_1^2}{2}\|u_x\|^2\tag{4.1.16}$$

其中 $a_1b_1=|\lambda_i-\mu_i|$。Young 不等式

$$fg\leqslant\varepsilon^p\frac{f^p}{p}+\frac{(\frac{1}{\epsilon}g)^{p'}}{p'},\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,f,g,\epsilon>0\tag{4.1.17}$$

和周期边界条件已在不等式(4.1.16)估计中得到。

将上述估计代入式(4.1.15),并选取 a_1,b_1,如下:

$$\alpha=2\gamma_r-b_1^2>0,\beta=2\gamma_r-a_1^2>0$$

我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2 \leqslant 2\chi\|u\|^2 - \alpha\|u_x\|^2 + 2\beta_r\sum_{j=1}^{J}|u_j|^4 h - \beta\sum_{j=1}^{J}|u_j|^6 h \tag{4.1.18}$$

因

$$-\beta|u_j|^6 + 2\beta_r|u_j|^4 + 2\chi|u_j|^2 =$$

$$-\beta(|u_j|^3 - \frac{\beta_r + \frac{1}{2}}{\beta}|u_j|)^2 - |u_j|^4 +$$

$$\left[\frac{(\beta_r + \frac{1}{2})^2}{\beta} + 4\chi\right]|u_j|^2 - 2\chi|u_j|^2 \leqslant$$

$$-(|u_j|^2 - P)^2 + P^2 - 2\chi|u_j|^2 \leqslant P^2 - 2\chi|u_j|^2,$$

其中

$$P = 2\chi + \frac{(\beta_r + \frac{1}{2})^2}{2\beta}$$

由式(4.1.18)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2 + 2\chi\|u\|^2 + \alpha\|u_x\|^2 \leqslant P^2 \tag{4.1.19}$$

由 Gronwall 不等式即得式(4.1.13)。由式(4.1.19)对 t 积分和式(4.1.13)可得式(4.1.14)。

推论 4.1.1 在引理 4.1.3 条件下，$\|u_0\| \leqslant R, R>0$，则存在离散系统(4.1.6)～(4.1.8)的整体解。

引理 4.1.4 在引理 4.1.3 条件下，成立以下不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_x\|^2 + \gamma_r\|u_{x\bar{x}}\|^2 \leqslant E_1(1 + \|u_x\|^2)^2 \tag{4.1.20}$$

其中常数 E_1 与离散函数 u_h 和步长 h 无关。

证明 式(4.1.6)和 $u_{x\bar{x}}$ 作内积后分部求和，再取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_x\|^2 + \gamma_r\|u_{x\bar{x}}\|^2 = \chi\|u_x\|^2 +$$

$$\operatorname{Re}\{(\beta_r + \mathrm{i}\beta_i)\sum_{j=1}^{J}|u_j|^2 u_j \bar{u}_{j,x\bar{x}} h\} +$$

$$\operatorname{Re}\left\{(\delta_r + \mathrm{i}\delta_i)\sum_{j=1}^{J}|u_j|^4 u_j \bar{u}_{j,x\bar{x}} h\right\} +$$

$$\operatorname{Re}\left\{(\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i)\sum_{j=1}^{J}P(u_{j-1}, u_j, u_{j+1})\bar{u}_{j,x\bar{x}} h\right\} +$$

$$\operatorname{Re}\left\{(\mu_r + \mathrm{i}\mu_i)\sum_{j=1}^{J}Q(u_{j-1}, u_j, u_{j+1})\bar{u}_{j,x\bar{x}} h\right\} \tag{4.1.21}$$

由引理 4.1.2,有

$$\sum_{j=1}^{J}|u_j|^2 u_j \bar{u}_{j,x\bar{x}} = -\sum_{j=1}^{J}(|u_j|^2 u_j)_x \bar{u}_{j,x} =$$

$$-\sum_{j=1}^{J}|u_j|^2|u_{jx}|^2 h - \sum_{j=1}^{J}u_{j+1}(|u_{j+1}|^2 - |u_j|^2)\bar{u}_{j,x} h =$$

$$-\sum_{j=1}^{J}|u_j|^2|u_{jx}|^2 h - \sum_{j=1}^{J}|u_{j+1}|^2|u_{jx}|^2 h - \sum_{j=1}^{J}u_j u_{j-1}\bar{u}_{jx}^2 =$$

$$-\sum_{j=1}^{J}(|u_{j+1}|^2 + |u_j|^2)|u_{jx}|^2 - \sum_{j=1}^{J}u_j u_{j+1}\bar{u}_{jx}^2,$$

$$\sum_{j=1}^{J}|u_j|^4 u_j \bar{u}_{jx\bar{x}} h = -\sum_{j=1}^{J}(|u_j|^4 u_j)_x \bar{u}_{jx} h =$$

$$-\sum_{j=1}^{J}|u_j|^4|u_{jx}|^2 h - \sum_{j=1}^{J}u_{j+1}(|u_{j+1}|^4 -$$

$$|u_j|^4)\bar{u}_{jx} h = -\sum_{j=1}^{J}|u_j|^4|u_{jx}|^2 h -$$

$$\sum_{j=1}^{J}(|u_{j+1}|^2 + |u_j|^2)u_{j+1}\bar{u}_{jx}(|u_{j+1}|^2 - |u_j|^2)h =$$

$$-\sum_{j=1}^{J}(|u_{j+1}|^4 + |u_{j+1}|^2|u_j|^2 + |u_j|^4)|u_{jx}|^2 -$$

$$\sum_{j=1}^{J}(|u_{j+1}|^2 + |u_j|^2)u_{j+1}u_j\bar{u}_{jx}^2 h$$

因此

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_x\|^2 + \gamma_r\|u_{x\bar{x}}\|^2 \leqslant$$

$$\chi \| u_x \|^2 - \beta_r \sum_{j=1}^{J} (|u_{j+1}|^2 + |u_j|^2) |u_{jx}|^2 h +$$
$$\sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2} \sum_{j=1}^{J} |u_{j+1}| |u_j| |u_{jx}|^2 h -$$
$$\delta_r \sum_{j=1}^{J} (|u_{j+1}|^4 + |u_{j+1}|^2 |u_j|^2 + |u_j|^4 |u_{jx}|^2) h +$$
$$\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2} \sum_{j=1}^{J} (|u_{j+1}|^2 + |u_j|^2) |u_{j+1}| |u_j| |u_{jx}|^2 h +$$
$$\frac{1}{2} \sqrt{(\lambda_r - \mu_r)^2 + (\lambda_i - \mu_i)^2} \times$$
$$\sum_{j=1}^{J} |u_j| (|u_{j+1}| + |u_{j-1}|) |u_{jx}| |u_{jx\bar{x}}| h +$$
$$\frac{1}{2} \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2} \sum_{j=1}^{J} |u_j| (|u_{j-1}| + |u_{j-1}|) |u_{jx}| |u_{jx\bar{x}}| h$$

(4.1.22)

利用引理 4.1.1，

$$\| u \|_{\infty} \leqslant K_1 \| u \|^{\frac{1}{2}} (\| u \| + \| u_x \|)^{\frac{1}{2}}$$

可得

$$\sum_{j=1}^{J} (|u_{j+1}|^2 + |u_j|^2) |u_{jx}|^2 h \leqslant 2 \| u \|_{\infty}^2 \| u_x \|^2 \leqslant$$
$$2K_1 \| u \| (\| u \| + \| u_x \|) \| u_x \|^2 \leqslant C(\| u_x \|^2 + \| u_x \|^3) \leqslant$$
$$C(\| u_x \|^2 + \| u_x \|^4) \tag{4.1.23}$$

类似地，有

$$\sum_{j=1}^{J} |u_{j+1}| |u_j| |u_{jx}|^2 h \leqslant C(\| u_x \|^2 + \| u_x \|^4) \tag{4.1.24}$$

$$\sum_{j=1}^{J} (|u_{j-1}|^4 + |u_{j+1}|^2 |u_j|^2 + |u_j|^4) |u_{jx}|^2 h \leqslant$$
$$\| u \|_{\infty}^4 \| u_x \|^4 \leqslant C(\| u_x \|^2 + \| u_x \|^4)$$

(4.1.25)

$$\sum_{j=1}^{J} (|u_{j+1}|^2 + |u_j|^2) |u_{j+1}| |u_j| |u_{jx}|^2 h \leqslant$$

$$C(\|u_x\|^2+\|u_x\|^4) \tag{4.1.26}$$

$$\sum_{j=1}^{J}|u_j|(|u_{j+1}|+|u_{j-1}|)|u_{jx}||u_{jx\bar{x}}|h\leqslant$$

$$\frac{\gamma_r}{2}\|u_{x\bar{x}}\|^2+\frac{1}{2\gamma_r}\sum_{j=1}^{J}|u_j|^2(|u_{j+1}|+|u_{j-1}|)^2|u_{jx}|^2h\leqslant$$

$$\frac{\gamma_r}{2}\|u_{x\bar{x}}\|^2+C(\|u_x\|^2+\|u_x\|^4) \tag{4.1.27}$$

将式(4.1.23)～(4.1.27)代入式(4.1.22),可得式(4.1.20)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_x\|^2+\gamma_r\|u_{x\bar{x}}\|^2\leqslant E_1(1+\|u_x\|^2)^2 \tag{4.1.28}$$

引理 4.1.5[80] 一致 Gronwall 引理:设 g,h,y 为三个在 $[t_0,+\infty)$ 上正的局部可积函数,使得 y' 也在 $[t_0,+\infty)$ 局部可积,满足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\leqslant gy+h,\ t\geqslant t_0,$$

$$\int_t^{t+r}g(s)\mathrm{d}s\leqslant a_1,\ \int_t^{t+r}h(s)\mathrm{d}s\leqslant a_2,$$

$$\int_t^{t+r}y(s)\mathrm{d}s\leqslant a_3,\ t\geqslant t_0$$

其中 r,a_1,a_2,a_3 为正常数,则

$$y(t+r)\leqslant\left(\frac{a_3}{r}+a_2\right)\exp(a_1),\ \forall t\geqslant t_0 \tag{4.1.29}$$

引理 4.1.6 在引理 4.1.3 条件下,设 $\|u_{0x}\|^2\leqslant R,R>0$,则对离散方程组(4.1.6)～(4.1.8)的解有估计

$$\|u(t)\|^2+\|u_x(t)\|^2\leqslant E_2 \tag{4.1.30}$$

$$\int_t^{t+r}\|u_{x\bar{x}}(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant E'_2,\ \forall r>0 \tag{4.1.31}$$

其中常数 E_2,E'_2 与离散函数 u_h 和步长 h 无关。

证明 从引理 4.1.5 和式(4.1.20)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_x\|^2\leqslant E_1(1+\|u_x\|^2)^2\leqslant 2E_1(1+\|u_x\|^4) \tag{4.1.32}$$

由不等式(4.1.14)

$$\int_t^{t+1} \| u_x \|^2 \mathrm{d}s \leqslant a_1, \ \forall t \geqslant 1$$

应用引理 4.1.5，令 $g=y=2E_1\| u_x \|^2, h=c$，得到

$$\| u_x(t+1) \|^2 \leqslant (a_1+c)\exp a_1, \ \forall t \geqslant 1 \quad (4.1.33)$$

当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，利用广义 Gronwall 不等式和式(4.1.32)有

$$\| u_x(t) \|^2 \leqslant C e^{\int_0^t \| u_x(s) \|^2 \mathrm{d}s} \leqslant C_1, \ 0 \leqslant t \leqslant 2 \quad (4.1.34)$$

于是由式(4.1.33)、(4.1.34)和引理 4.1.3 推出式(4.1.30)。由式(4.1.32)和式(4.1.30)即得式(4.1.31)。

引理 4.1.7 在引理 4.1.6 的条件下，设 $\| u_{0x\bar{x}} \|^2 \leqslant R$，$R>0$，则有

$$\| u(t) \|^2 + \| u_x(t) \|^2 + \| u_{x\bar{x}}(t) \|^2 \leqslant E_3 \quad (4.1.35)$$

其中常数 E_3 与离散函数 u_h 和步长 h 无关。

证明 我们首先建立如下不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u_{x\bar{x}}(t) \|^2 + \gamma_r \| u_{x\bar{x}x} \|^2 \leqslant C(1 + \| u_{x\bar{x}}(t) \|^4) \quad (4.1.36)$$

事实上，作式(4.1.6)和 $u_{x\bar{x}x\bar{x}}$ 的内积，利用分部求和公式，再取实部得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u_{x\bar{x}} \|^2 + \gamma_r \| u_{x\bar{x}x} \|^2 = \chi \| u_{x\bar{x}} \|^2 - \\
&\mathrm{Re}\Big[(\beta_r + \mathrm{i}\beta_i)\sum_{j=1}^{J} |u_j|^2 u_j \bar{u}_{jx\bar{x}x\bar{x}} h\Big] - \\
&\mathrm{Re}\Big[(\delta_r + \mathrm{i}\delta_i)\sum_{j=1}^{J} |u_j|^4 u_j \bar{u}_{jx\bar{x}x\bar{x}} h\Big] - \\
&\mathrm{Re}\Big[(\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i)\sum_{j=1}^{J} P(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) \bar{u}_{jx\bar{x}x\bar{x}} h\Big] - \\
&\mathrm{Re}\Big[(\mu_r - \mathrm{i}\mu_i)\sum_{j=1}^{J} Q(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) \bar{u}_{jx\bar{x}x\bar{x}} h\Big]
\end{aligned} \quad (4.1.37)$$

由引理 4.1.2，有

$$\sum_{j=1}^{J}|u_j|^2u_j\bar{u}_{jx\bar{x}x\bar{x}}h=\sum_{j=1}^{J}(|u_j|^2u_j)_{x\bar{x}}\bar{u}_{jx\bar{x}}h=$$

$$\sum_{j=1}^{J}[|u_j|_x^2u_{j+1}+(u_j)^2u_{jx}]_{\bar{x}}\bar{u}_{jx\bar{x}}h=$$

$$\sum_{j=1}^{J}[(|u_j|_{x\bar{x}}^2u_j+u_{j\bar{x}}(|u_j|^2)_x+(|u_j|^2)_{\bar{x}}u_{jx}+|u_j|^2u_{jx\bar{x}}]\bar{u}_{jx\bar{x}}h$$

类似地有

$$\sum_{j=1}^{J}|u_j|^4u_j\bar{u}_{jx\bar{x}x\bar{x}}h=\sum_{j=1}^{J}[(|u_j|^4)_{x\bar{x}}u_j+$$

$$u_{j\bar{x}}(|u_j|^4)_x+(|u_j|^4)_{\bar{x}}u_{jx}+|u_j|^4\bar{u}_{jx\bar{x}}]\bar{u}_{jx\bar{x}}h,$$

$$\left|\sum_{j=1}^{J}P(u_{j-1},u_j,u_{j+1})\bar{u}_{jx\bar{x}x\bar{x}}h\right|\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\left|\sum_{j=1}^{J}(\bar{u}_j(u_j^2)_{\bar{x}})_x\bar{u}_{jx\bar{x}x}h\right|\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}|u_{j+1}(u_j^2)_{\bar{x}x}+\bar{u}_{jx}(u_j^2)_{\bar{x}}||\bar{u}_{jx\bar{x}x}|h\leqslant$$

$$\frac{\gamma_r}{3}\|u_{jx\bar{x}x}\|^2+C\|u_{jx\bar{x}}\|^2 \tag{4.1.38}$$

$$\left|\sum_{j=1}^{J}Q(u_{j+1},u_j,u_{j-1})\bar{u}_{jx\bar{x}x\bar{x}}h\right|\leqslant$$

$$\left|\sum_{j=1}^{J}[u_j(|u_j|^2)_x-\frac{1}{2}\bar{u}_j(u_j^2)_{\bar{x}}]_x\bar{u}_{jx\bar{x}x}h\right|\leqslant$$

$$\frac{\gamma_r}{3}\|u_{jx\bar{x}x}\|^2+C\|u_{jx\bar{x}}\|^2 \tag{4.1.39}$$

于此 $\|u_{x\bar{x}}\|=\|u_{\bar{x}x}\|=\|u_{xx}\|$（周期性）。因此从式(4.1.37)～(4.1.39)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{x\bar{x}}\|^2+\gamma_r\|u_{x\bar{x}x}\|^2\leqslant$$

$$\chi\|u_{x\bar{x}}\|^2+C\sum_{j=1}^{J}|[(|u_j|^2)_{x\bar{x}}u_j+u_{j\bar{x}}(|u_j|^2)_x+$$

$$(|u_j|^2)_{\bar{x}}u_{jx}+|u_j|^2u_{jx\bar{x}}]\bar{u}_{jx\bar{x}}|h+$$

$$C\sum_{j=1}^{J}|[(|u_j|^4)_{x\bar{x}}u_j + u_{j\bar{x}}(|u_j|^4)_x +$$

$$(|u_j|^4)_{\bar{x}}u_{jx} + |u_j|^4 u_{jx\bar{x}}]\overline{u}_{jx\bar{x}}|h +$$

$$\frac{2}{3}\gamma_r \| u_{x\bar{x}x} \|^2 + C \| u_{x\bar{x}} \|^2 \quad (4.1.40)$$

由引理 4.1.1，

$$\| u_x \|_\infty \leqslant C(\| u_x \|^2 + \| u_{xx} \|^2)^{\frac{1}{2}} \| u_x \|^{\frac{1}{2}} \leqslant C$$

$$(1 + \| u_{xx} \|^2)^{\frac{1}{2}}$$

且 $\| u \|_\infty \leqslant C$，于是可得

$$\sum_{j=1}^{J}|[(|u_j|^2)_{x\bar{x}}u_j + u_{j\bar{x}}(|u_j|^2)_x +$$

$$(|u_j|^2)_x u_{jx} + |u_j|^2 u_{jx\bar{x}}]\overline{u}_{jx\bar{x}}h| \leqslant$$

$$C\sum_{j=1}^{J}[|u_{jx\bar{x}}|(|u_j|^2 + |u_j||u_{j-1}| + |u_j||u_{j+1}|) +$$

$$(|u_{jx}|^2 + |u_{j\bar{x}}|^2 + |u_{jx}||u_{j\bar{x}}|)|u_j|]|u_{jx\bar{x}}|h \leqslant$$

$$C(1 + \| u_{x\bar{x}} \|^2 + \| u_{x\bar{x}} \|^4) \quad (4.1.41)$$

$$\sum_{j=1}^{J}|[(|u_j|^4)_{x\bar{x}}u_j + u_{j\bar{x}}(|u_j|^4)_x +$$

$$(|u_j|^4)_x u_{jx} + |u_j|^4 u_{jx\bar{x}}]\overline{u}_{jx\bar{x}}h| \leqslant$$

$$C\sum_{j=1}^{J}[|u_{jx\bar{x}}|(|u_j| + |u_{j+1}| + |u_{j-1}|)^4 +$$

$$|u_j|^3(|u_{jx}| + |u_{j\bar{x}}|)^2]|u_{jx\bar{x}}|h \leqslant$$

$$C(1 + \| u_{x\bar{x}} \|^2 + \| u_{x\bar{x}} \|^4) \quad (4.1.42)$$

将式(4.1.41)、(4.1.42)代入式(4.1.40)即得式(4.1.36)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u_{x\bar{x}} \|^2 + \gamma_r \| u_{x\bar{x}x} \|^2 \leqslant E_2(1 + \| u_{x\bar{x}} \|^4) \quad (4.1.43)$$

其中 E_2 为绝对常数。则有引理 4.1.6,由不等式(4.1.31),和一致 Gronwall 引理,即得不等式(4.1.35)。

由以上一致先验估计,我们可得到离散整体吸引子的存在性。

定理 4.1.1 设 $\gamma_r>0,\delta_r>0,\chi>0$,且 $4\gamma_r\delta_r>(\lambda_i-\mu_i)^2$,则对任何初值 $u_{0j}\in C^J$,其中 $C^J=\overbrace{C\times C\times\cdots\times C}^{J}$,$C$ 为复数的集合。则离散方程组(4.1.6)~(4.1.8)的解是整体存在的。更进一步,如果 u_0 满足

$$\| u_0 \| \leqslant R_0, R_0 > 0 \tag{4.1.44}$$

则对 $\Gamma'_0>\Gamma_0=\dfrac{P^2}{2\chi}$,方程(4.1.6)具 $u(0)=u_0$ 的解满足

$$\| u(t) \| \leqslant \Gamma'_0,\ \forall t\geqslant T_0=\frac{1}{2\chi}\lg\frac{R_0^2}{(\Gamma'_0)^2-\Gamma_0^2} \tag{4.1.45}$$

证明 由不等式(4.1.13)立即推出式(4.1.45)。

定理 4.1.2 在定理 4.1.1 的条件下,存在式(4.1.6)半流具有 L_2 模的整体吸引子。吸引子 $\mathscr{A}_J$ 位于 $B(0;\Gamma_0)\subset C^J$ 之中,其中 $B(0,\Gamma_0)$ 表示中心在 $0\in C^J$ 以定理 4.1.1 中的 Γ_0 为半径的球。

定理 4.1.3 设定理 4.1.1 的条件满足,且初值 u_0 满足

$$\| u_0 \|_{H^1} \leqslant R_0,\ R_0 > 0 \tag{4.1.46}$$

则对

$$\Gamma'_1 > \Gamma_1 = (a_1 + 2E_1)^{\frac{1}{2}}(\exp a_1)^{\frac{1}{2}},$$

$$a_1 = \frac{1}{\alpha}[P^2 + (2\chi + 1)\Gamma_0^2]$$

离散方程组(4.1.6)~(4.1.8)的解 $u=u(t)$ 有估计

$$\| u(t) \|_{H^1} \leqslant \Gamma'_1, \forall t \geqslant T_1 = \max\{T_0, 2\} \tag{4.1.47}$$

式 (4.1.6) 的半流具有依 H^1 模的整体吸引子。吸引子 $\mathscr{A}_J$ 在 $B(0,\Gamma_1)\in C^J$ 中,其中 $B(0,\Gamma_1)$ 为以 $0\in C^J$ 为中心依 Γ_1 为半径的球。

证明 从不等式(4.1.19)可得

$$\|u(t+1)\|^2 - \|u(t)\|^2 + 2\chi\int_t^{t+1}\|u(t)\|^2 dt$$

$$+ \alpha\int_t^{t+1}\|u_x(t)\|^2 dt \leqslant P^2 \qquad (4.1.48)$$

由定理 4.1.1

$$\|u(t)\| \leqslant \Gamma_0,\ \forall t \geqslant T_0 \qquad (4.1.49)$$

因此

$$\int_t^{t+1}\|u_x(t)\|^2 dt \leqslant a_1 = \frac{1}{\alpha}[P^2 + (2\chi+1)\Gamma_0^2]$$

从式(4.1.33)有

$$\|u_x(t+1)\| \leqslant \Gamma_1 = (a_1 + 2E_1)^{\frac{1}{2}}(\exp a_1)^{\frac{1}{2}},\ \forall t \geqslant 1 \qquad (4.1.50)$$

因此，不等式(4.1.47)成立。定理 4.1.3 得证。

类似地，从式(4.1.28)、(4.1.43)和一致 Gronwall 引理，可得

定理 4.1.4 设定理 4.1.1 的条件满足，且设初值 u_0 满足

$$\|u_0\|_{H^2} \leqslant R_0,\ R_0 > 0 \qquad (4.1.51)$$

则对 $\Gamma'_0 > \Gamma_2 = (a_2 + 2E_2)\ln a_2$，$a_2 = \dfrac{\Gamma_1^2 + 2E_1(1+\Gamma_1^4)}{\gamma_r}$，离散方程组(4.1.6)～(4.1.8)的解 $u(t)$ 满足

$$\|u(t)\|_{H^2} \leqslant \Gamma'_2,\ \forall t \geqslant T_2 > T_1 \qquad (4.1.52)$$

式(4.1.6)的半流具有依 H^2 模的整体吸引子。吸引子 $\mathscr{A}_J$ 位于 $B(0,\Gamma_2)\subset C^J$ 之中，其中 $B(0,\Gamma_2)$ 为以 $0\in C^J$ 为原点，以 Γ_2 为半径的球。

以下估计系统(4.1.6)～(4.1.8)吸引子的维数。

考虑式(4.1.6)的线性化方程

$$\begin{cases} \mathrm{i}v_t - \nu v_x = \chi v + (\gamma_r + \mathrm{i}\gamma_i)v_{x\bar{x}} - \\ \qquad (\beta_r + \mathrm{i}\beta_i)(3|u|^2 v + u^2\bar{v}) - \\ \qquad (\delta_r + \mathrm{i}\delta_i)(3|u|^4 v + 2|u|^2 u^2 \bar{v}) - \\ \qquad (\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i)[\frac{1}{2}\bar{v}(u^2)_{\bar{x}} + (uv)_{\bar{x}}\bar{u}] - \\ \qquad (\mu_r + \mathrm{i}\mu_i)[|u|_{\bar{x}}^2 v - \frac{1}{2}(u^2)_{\bar{x}}\bar{v} + \\ \qquad (v\bar{u} + u\bar{v})_{\bar{x}} u - (uv)_{\bar{x}}\bar{u}], \\ v(0) \qquad = v_0 \in C^J \end{cases} \tag{4.1.53}$$

其中 $u = S(t)u_0$ 为问题(4.1.6)～(4.1.8)的解。令

$$Q(t)v_0 = Q(t;u_0,v_0) = v(t) \tag{4.1.54}$$

为式(4.1.53)在 C^J 上的半流。由标准的方法，可知 $Q(t)$ 为 $S(t)$ 在点 $u_0 \in C^J$ 上的切映照，有如下命题：

命题 4.1.1 对任何 $t \in \mathbf{R}$，

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{\substack{u_0, u_1 \in \mathscr{A}_J \\ 0 < \| u_1 - u_0 \| < \epsilon}} \frac{\| S(t)u_0 - S(t)u_1 - Q(t;u_0)(u_0 - u_1) \|}{\| u_0 - u_1 \|} = 0 \tag{4.1.55}$$

且

$$\sup_{u_0 \in \mathscr{A}_J} \| Q(t;u_0) \|_{0p} < \infty \tag{4.1.56}$$

对任何 $l \in \mathbf{N}$，令 $v^{(j)}(t)$ 表示(4.1.53)具初值 $v^j(0) = \xi^{(j)} \in H$ 的解，则容易得到(见文献[80])。

$$|v^{(1)}(t) \wedge v^{(2)}(t) \wedge \cdots \wedge v^{(l)}(t)|_{\wedge^l H^1} =$$
$$|\xi^{(1)} \wedge \xi^{(2)} \wedge \cdots \wedge \xi^{(l)}|_{\wedge^l H^1} \cdot$$
$$\exp\left(\int_0^t \mathrm{Re}\,(\mathrm{tr}\,(F'(u(\tau)) \cdot Q_l(\tau)))\mathrm{d}\tau\right) \tag{4.1.57}$$

其中，我们写式(4.1.53)为

$$v_t = F'(u)v \tag{4.1.58}$$

tr 表示算子的迹，“∧”表示向量的外积，$Q_k(\tau)$ 表示 $H^1 \to$

span $\{v^{(1)}(\tau), v^{(2)}(\tau), \cdots, v^{(l)}(\tau)\}$的正交投影。

设 $\phi^k(\tau), k \in \mathbf{N}$，为式(4.1.5)矩阵 A 的特征向量所组成的正交基。

$$\operatorname{Re} \operatorname{tr} F'(u(\tau))Q_l(\tau) =$$

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} (F'(u(\tau)) \cdot Q_l(\tau)\phi^{(k)}, \phi^{(k)})_{H^1} =$$

$$\sum_{k=1}^{l} \operatorname{Re} (F'(u)\phi^{(k)}, \phi^{(k)})_{H^1} =$$

$$\sum_{k=1}^{l} (\operatorname{Re} (F'(u)\phi^{(k)}, \phi^{(k)}) + \operatorname{Re} ((F'(u)\phi^{(k)})_x, \phi_x^{(k)}) \tag{4.1.59}$$

$$\operatorname{Re} (F'(u)\phi^{(k)}, \phi^{(k)}) = \chi \| \phi^{(k)} \|^2 - \gamma_r \| \phi_x^{(k)} \|^2 =$$

$$- \operatorname{Re} (\beta_r + \mathrm{i}\beta_i)(2|u|^2\phi^{(k)} + u^2 \overline{\phi^{(k)}}, \phi^{(k)}) -$$

$$\operatorname{Re} (\delta_r + \mathrm{i}\delta_i)(3|u|^4\phi^{(k)} + 2|u|^2u^2 \overline{\phi^{(k)}}, \phi^{(k)}) -$$

$$\operatorname{Re} (\mu_r - \mathrm{i}\mu_i)(|u|_x^2\phi^{(k)} - \frac{1}{2}(u^2)_x \overline{\phi^{(k)}} +$$

$$(\phi^{(k)}\bar{u} + u \overline{\phi^{(k)}})_x u - ((u\phi^{(k)})_x \bar{u}, \phi^{(k)}) \leqslant$$

$$\chi \| \phi^{(k)} \|^2 - \gamma_r \| \phi_x^{(k)} \|^2 - 2\beta_r \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{J} |u_j|^2 |\phi_j^{(k)}|^2 h +$$

$$\sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2} \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{J} |u_j|^2 |\phi_j^{(k)}|^2 h +$$

$$\left(2\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2} - 3\delta_r\right) \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{J} |u_j|^4 |\phi_j^{(k)}|^2 h -$$

$$\operatorname{Re} (\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i) \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{J} [(u_{j+1}u_{j\bar{x}}(\overline{\phi_j^{(k)}})^2 +$$

$$u_{j+1}\phi_{j\bar{x}}^{(k)}\bar{u}_j \overline{\phi_j^{(k)}} + u_{j\bar{x}}\phi_{j-1}^{(k)}\bar{u}_j \overline{\phi_j^{(k)}}]h -$$

$$\operatorname{Re} (\mu_r + \mathrm{i}\mu_i) \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{J} [2u_{j+1}u_{j\bar{x}} |\phi_j^{(k)}|^2 - u_{j+1}u_{j\bar{x}}(\overline{\phi_j^{(k)}})^2 +$$

$$(\bar{u}_{j+1}\phi_{j\bar{x}}^{(k)} + \bar{u}_{j\bar{x}}\phi_{j-1}^{(k)}) \overline{\phi^{(k)}}_j u_j + (u_{j+1} \overline{\phi_{j\bar{x}}^{(k)}} +$$

$$u_{j\bar{x}} \overline{\phi_{j-1}^{(k)}}) \overline{\phi_j^{(k)}} u_j - (u_{j+1}\phi_{j\bar{x}}^{(k)} + u_{j\bar{x}}\phi_{j-1}^{(k)})\bar{u}_j \overline{\phi_j^{(k)}}]h \tag{4.1.60}$$

其中

$$\sum_{j=1}^{J}|u_j|^2|\phi_j^{(k)}|^2h \leqslant \|u\|_\infty^2\|\phi^{(k)}\|^2,$$

$$\sum_{j=1}^{J}|u_j|^4|\phi_j^{(k)}|^2h \leqslant \|u\|_\infty^4\|\phi^{(k)}\|^2,$$

$$\sum_{j=1}^{J}[(u_{j+1}u_{j\bar{x}}(\overline{\phi_j^{(k)}})^2 + u_{j+1}\phi_{j\bar{x}}^{(k)}\bar{u}_j\overline{\phi_j^{(k)}} + u_{j\bar{x}}\phi_{j-1}^{(k)}\bar{u}_j\overline{\phi_j^{(k)}}]h \leqslant$$

$$2\|u\|_\infty\|u_{\bar{x}}\|\ \|\phi^{(k)}\|_4^2 + \|u\|_\infty^2(\varepsilon_1\|\phi_x^{(k)}\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1}\|\phi^{(k)}\|^2),$$

$$\varepsilon_1 > 0,$$

$$\left|\sum_{j=1}^{J}u_{j+1}u_{j\bar{x}}|\phi_j^{(k)}|^2h\right| + \left|\sum_{j=1}^{J}u_{j+1}u_{j\bar{x}}(\overline{\phi_j^{(k)}})^2h\right| \leqslant$$

$$2\|u\|_\infty\|u_{\bar{x}}\|\ \|\phi^{(k)}\|_4^2,$$

$$\left|\sum_{j=1}^{J}[(\bar{u}_{j+1}\phi_{j\bar{x}}^{(k)} + \bar{u}_{j\bar{x}}\phi_{j-1}^{(k)})\overline{\phi_j^{(k)}}u_j + \right.$$

$$(u_{j+1}\overline{\phi_{j\bar{x}}^{(k)}} + u_{j\bar{x}}\overline{\phi_{j-1}^{(k)}})\overline{\phi_j^{(k)}}u_j -$$

$$\left.(u_{j+1}\phi_{j\bar{x}}^{(k)} + u_{j\bar{x}}\phi_{j-1}^{(k)})\bar{u}_j\overline{\phi_j^{(k)}}]h\right| \leqslant$$

$$3[\|u\|_\infty^2(\varepsilon_2\|\phi_x^{(k)}\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2}\|\phi^{(k)}\|^2) +$$

$$\|u\|_\infty\|u_{\bar{x}}\|\ \|\phi^{(k)}\|_4^2],\varepsilon_2 > 0$$

由引理 4.1.1

$$\|\phi^{(k)}\|_4^2 \leqslant C_1(\|\phi^{(k)}\| + \|\phi_x^{(k)}\|)^{\frac{1}{2}}\|\phi^{(k)}\|^{\frac{3}{2}} \leqslant$$

$$C_1\|\phi^{(k)}\|^2 + \varepsilon_3\|\phi_x^{(k)}\|^2,\ \varepsilon_3 > 0,$$

$$\|u\|_\infty \leqslant C(\|u\| + \|u_x\|)^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}} \leqslant C\|u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}$$

因此，从式(4.1.60)可得

$$\mathrm{Re}\ (F'(u)\phi^{(k)},\phi^{(k)}) \leqslant \chi\|\phi^{(k)}\|^2 -$$

$$\gamma_r\|\phi^{(k)}\|^2 + \sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2}\|u\|_\infty^2\|\phi^{(k)}\|^2 +$$

$$|2\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2} - 3\delta_i|\ \|u\|_\infty^4\|\phi^{(k)}\|^2 +$$

$$\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}[2\|u\|_\infty\|u_x\|(C_1\|\phi^{(k)}\|^2+\varepsilon_3\|\phi_x^{(k)}\|^2)+$$

$$\|u\|_\infty^2(\varepsilon_1\|\phi_x^{(k)}\|^2+\frac{1}{4\varepsilon_1}\|\phi^{(k)}\|^2)]+$$

$$\sqrt{\mu_r^2+\mu_i^2}[2\|u\|_\infty\|u_x\|(C_1\|\phi^{(k)}\|^2+\varepsilon_1\|\phi_x^{(k)}\|^2)+$$

$$3\|u\|_\infty^2(\varepsilon_2\|\phi_x^{(k)}\|^2+\frac{1}{4\varepsilon_2}\|\phi^{(k)}\|^2)+$$

$$3\|u\|_\infty\|u_x\|(C_1\|\phi^{(k)}\|^2+\varepsilon_3\|\phi_x^{(k)}\|^2)]\leqslant$$

$$-[\gamma_r-\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}(2\varepsilon_3\|u\|_\infty\|u_x\|+\varepsilon_1\|u\|_\infty^2)-$$

$$\sqrt{\mu_r^2-\mu_i^2}(2\varepsilon_3\|u\|_\infty\|u_x\|+$$

$$3\varepsilon_2\|u\|_\infty^2+3\varepsilon_3\|u\|_\infty\|u_x\|)]\|\phi_x^{(k)}\|^2+$$

$$k_2(\|u\|_{H^1}+\|u\|_{H^1}^2+1)\|\phi^{(k)}|^2 \tag{4.1.61}$$

因此，当取 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 充分小，则有

$$\mathrm{Re}\,(F'(u)\phi^{(k)},\phi^{(k)})\leqslant$$

$$-\frac{\gamma_r}{2}\|\phi^{(k)}\|^2+k_3(\|u\|_{H^1}+\|u\|_{H^1}^2)\|\phi^{(k)}\|^2 \tag{4.1.62}$$

另一方面，有

$$\mathrm{Re}((F'(u)\phi^{(k)})_x,\phi_x^{(k)})=\chi\|\phi_x^{(k)}\|^2-\gamma_r\|\phi_{xx}^{(k)}\|^2-$$

$$\mathrm{Re}(\beta_r+\mathrm{i}\beta_i)((3|u|^2\phi^{(k)}+u^2\overline{\phi^{(k)}})_x,\phi_x^{(k)})-$$

$$\mathrm{Re}\,(\delta_r+\mathrm{i}\delta_i)((3|u|^4\phi^{(k)}+2|u|u^2\overline{\phi^{(k)}})_x,\phi_x^{(k)})-$$

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_r+\mathrm{i}\lambda_i)(\frac{1}{2}(\overline{\phi^{(k)}}(u^2)_x)_x+((u\phi^{(k)})_x\bar{u})_x,\phi_x^{(k)})-$$

$$\mathrm{Re}\,(\mu_r+\mathrm{i}\mu_i)((|u|_x^2\phi^{(k)})_x-\frac{1}{2}((u^2)_x\overline{\phi^{(k)}})_x-$$

$$((\phi^{(k)}\bar{u}+u\overline{\phi^{(k)}})_xu)_x-((u\phi^{(k)})_x\bar{u})_x,\phi_x^{(k)}) \tag{4.1.63}$$

其中

$$(3|u_j|^2\phi_j^{(k)}+u_j^2\overline{\phi_j^{(k)}})_x=3|u_{j+1}|^2\phi_{jx}^{(k)}+3|u_j|_x^2\phi_j^{(k)}+$$

$$u_{j+1}^2+\overline{\phi_{jx}^{(k)}}+(u_j^2)_x\overline{\phi_j^{(k)}},$$

$$(3|u_j|^4\phi_j^{(k)} + 2|u_j|^2u_j^2\overline{\phi_j^{(k)}})_x = 3|u_{j+1}|^4\phi_{jx}^{(k)} + 3|u_j|_x^4\phi_j^{(k)} + 2|u_{j+1}|^2u_{j+1}^2\overline{\phi_{jx}^{(k)}} + 2(|u_j|^2u_j^2)_x\overline{\phi_j^{(k)}},$$

$$[(u_j\phi_j^{(k)})_x\bar u_j]_x = (u_{j+1}\phi_{j+1}^{(k)})_x\bar u_{jx} + (u_j\phi_j^{(k)})_{xx}\bar u_j,$$

$$\frac{1}{2}(\overline{\phi_j^{(k)}}(u_j^2)_x)_x = \frac{1}{2}[\overline{\phi_{j+1}^{(k)}}(u_j^2)_{xx} + \overline{\phi_{jx}^{(k)}}(u_j^2)_x],$$

$$[|u_j|_x^2\phi_j^{(k)}]_x = |u_{j+1}|_x^2\phi_{jx}^{(k)} + |u_j|_{xx}^2\phi_j^{(k)},$$

$$\frac{1}{2}[(u_j^2)_x\overline{\phi_j^{(k)}}]_x = \frac{1}{2}(u_{j+1}^2)_x\overline{\phi_{jx}^{(k)}} + \frac{1}{2}(u_j^2)_{xx}\overline{\phi_j^{(k)}},$$

$$[(\phi_j^{(k)}\bar u_j + u_j\overline{\phi_j^{(k)}})_x u_j]_x = (\phi_{j+1}^{(k)}\bar u_{j+1} + u_{j+1}\overline{\phi_{j+1}^{(k)}})_x u_{jx} + (\phi_j^{(k)}\bar u_j + u_j\overline{\phi_j^{(k)}})_{xx}u_j,$$

$$[(u_j\phi_j^{(k)})_x\bar u_j]_x = (u_{j+1}\phi_{j+1}^{(k)})_x\bar u_{jx} + (u_j\phi_j^{(k)})_{xx}\bar u_j,$$

$$|u_j|_x^4 = (|u_{j+1}|^2 + |u_j|^2)|u_j|_x^2 = (|u_{j+1}|^2 + |u_j|^2)(u_{j+1}\bar u_{jx} + u_{jx}\bar u_j),$$

$$(u_j\phi_j^{(k)})_{xx} = (u_{j+1}\phi_{jx}^{(k)} + u_{jx}\phi_{j-1}^{(k)})_x = u_{j+2}\phi_{jxx}^{(k)} + u_{jx}\phi_{jx}^{(k)} + u_{j+1,x}\phi_{j-1,x}^{(k)} + u_{jxx}\phi_{j-1}^{(k)},$$

$$|\mathrm{Re}\,(\beta_r + \mathrm{i}\beta_i)((3|u|^2\phi^{(k)} + u^2\overline{\phi^{(k)}})_x, \phi_x^{(k)})| \leqslant \sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2}[4\|u\|_\infty^2\|\phi_x^{(k)}\|^2 + 3\|u\|_\infty\|u_x\|_\infty(\|\phi^{(k)}\|^2 + \|\phi_x^{(k)}\|^2)],$$

$$|\mathrm{Re}\,(\delta_r + \mathrm{i}\delta_i)((3|u|^4\phi^{(k)} + 2|u|^2u^2\overline{\phi^{(k)}})_x, \phi_x^{(k)})| \leqslant \sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2}[5\|u\|_\infty^4\|\phi_x^{(k)}\|^2 + 20\|u\|_\infty^3(\|u_x\|^2 + \|\phi_x^{(k)}\|^2)],$$

$$|\mathrm{Re}\,(\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i)(\frac{1}{2}(\overline{\phi^{(k)}}(u^2)_x)_x + ((u\phi^{(k)})_x\bar u)_x, \phi_x^{(k)})| \leqslant$$

$$\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}[(\|u\|_\infty\|u_{xx}\|_\infty + \|u\|_\infty^2)(\|\phi^{(k)}\|^2 + \|\phi_x^{(k)}\|^2) + 3\|u\|_\infty\|u_x\|_\infty\|\phi_x^{(k)}\|^2 + \|u\|_\infty^2\|\phi_x^{(k)}\|\,\|\phi_{xx}^{(k)}\|] \leqslant$$

$$\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}[(\|u\|_\infty\|u_{xx}\| + 3\|u\|_\infty\|u_x\|_\infty + \frac{1}{4\varepsilon_4}\|u\|_\infty^2)\|\phi_x^{(k)}\|^2 + \varepsilon_4\|u\|_\infty^2\|\phi_{xx}^{(k)}\|^2]$$

其中 $\varepsilon_4>0$，

$$|\mathrm{Re}\,(\mu_r+\mathrm{i}\mu_i)(((|u|^2\phi^{(k)})_x-\frac{1}{2}((u^2)_x\overline{\phi^{(k)}})_x-$$

$$((\phi^{(k)}\overline{u}+u\overline{\phi^{(k)}})_x u)_x-((u\phi^{(k)})_x\overline{u})_x,\phi_x^{(k)})|\leqslant$$

$$\sqrt{\mu_r^2+\mu_i^2}[3\|u\|_\infty\|u_x\|\|\phi_x^{(k)}\|^2+$$

$$\frac{3}{2}(\|u\|_\infty\|u_{xx}\|+\|u_x\|_\infty^2)(\|\phi^{(k)}\|^2+\|\phi_x^{(k)}\|^2)+$$

$$2\|u\|_\infty\|u_x\|_\infty]\|\phi_x^{(k)}\|^2+\|u_x\|_\infty^2(\|\phi^{(k)}\|^2+\|\phi_x^{(k)}\|^2)+$$

$$2\|u\|_\infty^2(\varepsilon_5\|\phi_{xx}^{(k)}\|^2+\frac{1}{4\varepsilon_5}\|\phi^{(k)}\|^2)+$$

$$4\|u\|_\infty\|u_x\|_\infty\|\phi_x^{(k)}\|^2+$$

$$\|u\|_\infty\|u_{xx}\|(\|\phi^{(k)}\|^2+\|\phi_x^{(k)}\|^2)\leqslant$$

$$\sqrt{\mu_r^2+\mu_i^2}\{[9\|u\|_\infty\|u_x\|+2\varepsilon_5\|u\|_\infty^2\|\phi_{xx}^{(k)}\|^2+$$

$$\frac{5}{2}(\|u\|_\infty\|u_{xx}\|+\|u_x\|_\infty^2)\Big]\|\phi_x^{(k)}\|^2+$$

$$\Big[\frac{5}{2}(\|u\|_\infty^2\|u_{xx}\|+\|u_x\|_\infty^2)+\frac{1}{2\varepsilon_5}\|u\|_\infty^2\Big]\|\phi^{(k)}\|^2\},\varepsilon_5>0$$

从式(4.1.63)可得

$$\mathrm{Re}\,((F'(u)\phi^{(k)})_x,\phi_x^{(k)})\leqslant\chi\|\phi_x^{(k)}\|^2-\gamma_r\|\phi_{xx}^{(k)}\|^2+$$

$$(\varepsilon_4\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}\|u\|_\infty^2+2\varepsilon_5\sqrt{\mu_r^2+\mu_i^2}\|u\|_\infty^2\|\phi_{xx}^{(k)}\|^2)+$$

$$k_4(\|u\|_\infty+\|u_x\|+\|u_x\|_\infty+\|u_{xx}\|)\times$$

$$(\|\phi^{(k)}\|^2+\|\phi_x^{(k)}\|^2)$$

选取 ε_4 和 ε_5 充分小，可得

$$\mathrm{Re}\,((F'(u)\phi^{(k)})_x,\phi_x^{(k)})\leqslant-\frac{\gamma_r}{2}\|\phi_{xx}^{(k)}\|^2+$$

$$k_5\|u\|_{H^2}(\|\phi^{(k)}\|^2+\|\phi_x^{(k)}\|^2)\tag{4.1.64}$$

从式(4.1.59)、(4.1.62)和(4.1.64)可得

$$\sum_{k=1}^{l}\mathrm{Re}\,(F'(u)\phi^{(k)},\phi^{(k)})_{H^1}\leqslant$$

$$-\frac{\gamma_r}{2}\sum_{k=1}^{l}\|\phi_{xx}^{(k)}\|^2+k_6\|u\|_{H^2}\sum_{k=1}^{l}(\|\phi^{(k)}\|^2+\|\phi_x^{(k)}\|^2)\leqslant$$

$$-\frac{\gamma_r}{2}\sum_{k=1}^{l}\lambda_k^2+k_6\|u\|_{H^2}(l+\sum_{k=1}^{l}\lambda_k) \tag{4.1.65}$$

其中

$$\lambda_k=4J^2\sin^2\frac{k\pi}{J},k=1,2,\cdots,\left[\frac{J}{2}\right]$$

为矩阵 $A=J^2A_1$ 的特征值。由于 $\sin x/x\geqslant\frac{2}{\pi},x\in(0,\frac{\pi}{2}]$,从式(4.1.65)得

$$\sum_{k=1}^{l}\mathrm{Re}\ (F'(u)\phi^{(k)},\phi^{(k)})_{H^1}\leqslant$$

$$-\frac{\gamma_r}{2}J^4(\frac{2}{\pi})^4\sum_{k=1}^{[J/2]}(\frac{k\pi}{J})^4+k_6\|u\|_{H^2}\cdot 2l\leqslant$$

$$-64\gamma_r\sum_{k=1}^{[J/2]}k^4+2lk_3\sqrt{E_3}\leqslant$$

$$-64\gamma_r\frac{1}{6}(\frac{J}{2}-1)^5+2lk_6\sqrt{E_3}\leqslant$$

$$-\frac{\gamma_r}{3}((\frac{l}{\theta_2})^5-10(\frac{l}{\theta_2})^4+40(\frac{l}{\theta_2})^3-$$

$$80(\frac{l}{\theta_2})^2+80(\frac{l}{\theta_2})-32)+2lk_6\sqrt{E_3},$$

其中

$$\theta_1J<l<\theta_2J,\theta_1,\theta_2>0$$

因此,如选取

$$l\geqslant l_0=\left[\frac{2k_6\sqrt{E_3}\theta_2}{\gamma_r}+12\right]\theta_2 \tag{4.1.66}$$

则存在 $J_0\geqslant l$ 使得

$$q_J=\overline{\lim_{t\to\infty}}\left(\inf_{u_0\in\mathscr{A}_J}\frac{1}{t}\int_0^t\mathrm{Re\ tr}\ (F'(u(\tau))\cdot Q_J)\mathrm{d}\tau\right)<0$$

由文献[80],有

$$d_H(\mathscr{A}_J) \leqslant J_0,\ d_F(\mathscr{A}_J) \leqslant 2J_0 \qquad (4.1.67)$$

其中 $d_H(\mathscr{A}_J)$,$d_F(\mathscr{A}_J)$分别表示整体吸引子 $\mathscr{A}_J$ 的 Hausdorff 维数和 fractal 维数。

定理 4.1.5 在定理 4.1.4 的条件下,离散方程组(4.1.6)~(4.1.8)整体吸引子的 Hausdorff 维数和 fractal 维数是有限的,即式(4.1.67)成立。

4.2 Zakharov 方程组

考虑如下具耗散的 Zakharov 方程组

$$\frac{1}{\lambda^2}n_{tt} + \alpha n_t - \Delta(n + |E|^2) = f(x) \qquad (4.2.1)$$

$$\mathrm{i}E_t + \Delta E - nE + \mathrm{i}\gamma E = g(x) \qquad (4.2.2)$$

其中未知复值函数 $E(x,t)$表示电场的包络,未知实值函数 $n(x,t)$表示离子密度在平衡态附近的扰动,参数 λ 正比于离子声速,$\alpha\geqslant 0$,$\gamma\geqslant 0$。方程组(4.2.1)、(4.2.2)是 Zakharov V E 于 1972 年首先提出来的。当 $\alpha=\gamma=0$,$f(x)=g(x)=0$ 时,他首先求出它的一维孤立波解,成功地解释了激光打靶中出现的密度源凹陷问题,得到了国际上物理界广泛的重视。1974 年在苏联基辅召开的国际理论物理会议上,对 Zaharov 方程进行了详尽的讨论。1979 年,Sulem 等在文献[149]中和 1981 年,郭、沈在文献[150]中分别独立地研究了它的整体解和整体光滑解的存在、唯一性。1994 年,在文献[151]中郭对一维、二维广义 Zakharov 方程组初边值问题整体解的存在性、唯一性给出了证明。1991 年,Flahaut I 在文献[152]中对于耗散 Zakharov 方程组(4.2.1)、(4.2.2)证明整体吸引子的存在性和它的维数的有限性。1995 年,常、郭在文献[153]中证明离散吸引子的存在性,并对其维数作了估计。

令 $m=n_t+\varepsilon n(\varepsilon>0)$,则(4.2.1)、(4.2.2)可化为三个未知函数的一阶方程组

$$m = n_t + \varepsilon n \qquad (4.2.3)$$

$$m_t + (\alpha\lambda^2 - \varepsilon)m - \varepsilon(\alpha\lambda^2 - \varepsilon)n - \lambda^2\Delta(n + |E|^2) = \lambda^2 f \tag{4.2.4}$$

$$\mathrm{i}E_t + \Delta E - nE + \mathrm{i}\gamma E = g \tag{4.2.5}$$

方程组(4.2.3)～(4.2.5)具初值条件

$$n(x,0) = n_0(x) \tag{4.2.6}$$

$$m(x,0) = n_1(x) + \varepsilon_1 n_0(x) \tag{4.2.7}$$

$$E(x,0) = E_0(x) \tag{4.2.8}$$

和边界条件

$$n(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega \tag{4.2.9}$$

$$m(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega \tag{4.2.10}$$

$$E(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega \tag{4.2.11}$$

其中 Ω 表示开集 $(0,L)\subset\mathbf{R}$，$0<L<+\infty$。

现考虑问题(4.2.3)～(4.2.11)对空间的离散化，以下用通常的符号表示

$$x_j = jh,\ 0 \leqslant j \leqslant J = \left[\frac{L}{h}\right],\ E_j(t) \sim E(x_j,t),$$

$$N_j(t) \sim N(x_j,t),\ m_j(t) \sim m(x_j,t),$$

$$w_{j,x} = \frac{1}{h}(w_{j+1}(t) - w_j(t)),\ w_{j\bar{x}} = \frac{1}{h}(w_j(t) - w_{j-1}(t)),$$

$$(u,v) = h\sum_{j=1}^{J} u_j v_j\ \| w(t) \|^2 = h\sum_{j=1}^{J} |w_j(t)|^2,$$

$$\| w(t) \|_\infty = \sup_{1\leqslant j\leqslant J} |w_j(t)|\ \| w(t) \|_1^2 = \| w(t) \|^2 + \| w_x(t) \|^2$$

问题(4.2.3)～(4.2.11)离散化为

$$m_j = n_{jt} + \varepsilon n_j \tag{4.2.12}$$

$$m_{jt} + (\alpha\lambda^2 - \varepsilon)m_j - \varepsilon(\alpha\lambda^2 - \varepsilon)n_j - \lambda^2 n_{jx\bar{x}} - \lambda^2(|E_j|^2)_{x\bar{x}} = \lambda^2 f_j \tag{4.2.13}$$

$$\mathrm{i}E_{jt} + E_{jx\bar{x}} - n_j E_j + \mathrm{i}\gamma E_j = g_j \tag{4.2.14}$$

$$n_j(0) = n_0(x_j) \tag{4.2.15}$$

$$m_j(0) = n_1(x_j) + \epsilon n_0(x_j) \tag{4.2.16}$$

$$E_j(0) = E_0(x_j) \tag{4.2.17}$$

$$n_0(t) = n_J(t) = 0 \tag{4.2.18}$$

$$m_0(t) = m_J(t) = 0 \tag{4.2.19}$$

$$E_0(t) = E_J(t) = 0 \tag{4.2.20}$$

其中 $0<j<J$，$t>0$。定义位势 u 如下

$$(u_j)_{x\bar{x}} = m_j,\ u_0 = 0,\ u_J = 0 \tag{4.2.21}$$

引理 4.2.1 设 ξ_j 和 η_j 为两个定义在 $0\leqslant j\leqslant J$ 上的离散函数，且 $\xi_0=\xi_J=0, \eta_0=\eta_J=0$，则有

$$\begin{cases}(\xi,\eta_x) = -(\xi_{\bar{x}},\eta) \\ (\xi_j\eta_j)_x = \xi_{j+1}\eta_{jx} + \xi_{jx}\eta_j = \xi_j\eta_{jx} + \xi_{jx}\eta_{j+1} \\ (\xi_j\eta_j)_{\bar{x}} = \xi_j\eta_{j\bar{x}} + \xi_{j\bar{x}}\eta_{j-1} = \xi_{j-1}\eta_{j\bar{x}} + \xi_{j\bar{x}}\eta_j \\ (\xi_j\eta_j)_{x\bar{x}} = \xi_j\eta_{jx\bar{x}} + \xi_{j\bar{x}}\eta_{j\bar{x}} + \xi_{jx}\eta_{jx} + \xi_{jx\bar{x}}\eta_j\end{cases} \tag{4.2.22}$$

证明

$$(\xi,\eta_x) = \sum_{j=1}^{J-1}\xi_j(\eta_{j+1}-\eta_j) = \sum_{j=2}^{J}\xi_{j-1}\eta_j - \sum_{j=1}^{J-1}\xi_j\eta_j =$$

$$\sum_{j=1}^{J}\xi_{j-1}\eta_j - \sum_{j=1}^{J}\xi_j\eta_j = \sum_{j=1}^{J}\eta_j(\xi_{j-1}-\xi_j) =$$

$$-h\sum_{j=1}^{J}\eta_j\xi_{j\bar{x}} = -(\xi_{\bar{x}},\eta),$$

$$(\xi_j,\eta_j)_x = \frac{(\xi_{j+1}\eta_{j-1} - \xi_j\eta_j)}{h} =$$

$$\frac{(\xi_{j+1}\eta_{j+1} - \xi_{j+1}\eta_j + \xi_{j+1}\eta_j - \xi_j\eta_j)}{h} =$$

$$\xi_{j+1}\eta_{jx} + \xi_{jx}\eta_j$$

其它等式可类似地证明。

引理 4.2.2[148] 对任何离散函数 $u_h=\{u_j|0\leqslant j\leqslant J\}$定义在有限区间$[0,L]$上，则有

$$\|\delta^k u_h\|_p \leqslant C\|u_h\|_2^{1-\frac{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}{n}}\left(\|\delta^n u_h\|_2 + \frac{\|u_h\|_2}{L^n}\right)^{\frac{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}{n}}$$

其中 $2\leqslant p\leqslant\infty$、$0\leqslant k<n$，$\delta^k u_h$ 表示 u_h 的 $k(k\geqslant 0)$ 阶差商，这里及今后，C 均表示与 u_h 和 h 无关的绝对常数。

引理 4.2.3 设 $n_0(x)\in L^2(\Omega)$，$g(x)\in L^2(\Omega)$。则对问题(4.2.12)～(4.2.20)的解有估计

$$\|E(t)\|^2\leqslant\|E(0)\|^2\mathrm{e}^{-\gamma t}+\frac{\|g\|^2}{\gamma^2}(1-\mathrm{e}^{-\gamma t})$$

证明 作式(4.2.14)和 E 的内积得

$$\mathrm{i}(E_t,E)+(E_{xx},E)-(nE,E)+\mathrm{i}\gamma(E,E)=(g,E)\tag{4.2.23}$$

上式取虚部和利用引理 4.2.1，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|E\|^2+\gamma\|E\|^2=\mathrm{Im}\,(g,E)$$

$$\mathrm{Im}\,(g,E)\leqslant\|g\|\,\|E\|\leqslant\frac{\gamma}{2}\|E\|^2+\frac{\|g\|^2}{2\gamma}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|E\|^2+\gamma\|E\|^2\leqslant\frac{\|g\|^2}{\gamma}$$

利用 Gronwall 引理，得

$$\|E(t)\|^2\leqslant\|E(0)\|^2\mathrm{e}^{-\gamma t}+\frac{\|g\|^2}{\gamma^2}(1-\mathrm{e}^{-\gamma t})\tag{4.2.24}$$

引理 4.2.4 设 $n_0(x)\in L^2(\Omega)$，$n_1(x)\in H^{-1}(\Omega)$，$E_0(x)\in H_0^1(\Omega)$，$g(x)\in H_0^1(\Omega)$，$f(x,t)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;H^{-1}(\Omega))$，则对问题(4.2.12)～(4.2.20)的解有估计

$$\|u_x\|^2+\frac{\lambda^2}{2}\|u\|^2+\lambda^2\|E_x\|^2\leqslant H_0(0)\mathrm{e}^{-\beta_0 t}+C\tag{4.2.25}$$

其中 $H_0(t)\overset{def}{=\!=}\|u_x\|^2+\lambda^2\|n\|^2+2\lambda^2\|E_x\|^2+2\lambda^2(n,|E|^2)$。

证明 作式(4.2.13)和 u 的内积得

$$(m_t,u)+(\alpha\lambda^2-\varepsilon)(m,u)-\varepsilon(\alpha\lambda^2-\varepsilon)(n,u)$$

$$-\lambda^2(n_{x\bar{x}},u)-\lambda^2((|E|^2)_{x\bar{x}},u)=\lambda^2(f,u)$$

它等价于

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_x\|^2+(\alpha\lambda^2-\varepsilon)\|u_x\|^2+\varepsilon(\alpha\lambda^2-\varepsilon)(n,u)+$$

$$\lambda^2(n,m)+\lambda^2(|E|^2,m)=-\lambda^2(f,u) \tag{14.2.26}$$

其中用到了式(4.2.21)。注意到由方程(4.2.12)，

$$(n,m)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|n\|^2+\varepsilon\|n\|^2$$

$$w_{j\bar{x}}=n_j,\ w_0=0,\ j=1,2,\cdots,J \tag{4.2.27}$$

令 μ_1 为方程(4.2.27)代数方程组的第一个特征值，则有

$$|(n,u)|=|(w,u_x)|\leqslant\|w\|\ \|u_x\|\leqslant\|u_x\|\ \|n\|\ \frac{1}{|\mu_1|}$$

于是有

$$A=(\alpha\lambda^2-\varepsilon)\|u_x\|^2+\varepsilon(\alpha\lambda^2-\varepsilon)(n,u)+\varepsilon\lambda^2\|n\|^2\geqslant$$

$$(\alpha\lambda^2-\varepsilon)\|u_x\|^2-\frac{2(\alpha\lambda^2-\varepsilon)}{|\mu_1|}\|u_x\|\ \|n\|+\varepsilon\lambda^2\|n\|^2$$

选取 $\varepsilon\leqslant min\left(\frac{\alpha\lambda^2}{4},\frac{\mu_1^2}{2\alpha\lambda^2}\right)$，有

$$A\geqslant\varepsilon\lambda^2\|n\|^2+(\alpha\lambda^2-\varepsilon)\|u_x\|^2-$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{2\alpha\lambda^2}}(\alpha\lambda^2-\varepsilon)\|u_x\|\ \|n\|\geqslant$$

$$\frac{\varepsilon}{2}(\lambda^2\|n\|^2+\|n_x\|^2)+\frac{\alpha\lambda^2}{2}\|u_x\|^2$$

则从式(4.2.26)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u_x\|^2+\lambda^2\|n\|^2)+\frac{\varepsilon}{2}(\lambda^2\|n\|^2+\|u_x\|^2)+$$

$$\frac{\alpha\lambda^2}{2}\|u_x\|^2+\lambda^2(|E|^2,m)\leqslant$$

$$\frac{\alpha\lambda^2}{2}\|u_x\|^2+\frac{\lambda^2}{2\alpha}\|\phi\|^2$$

其中 ϕ_j 满足

$$\phi_{j\bar{x}} = f_j,\ \phi_0 = 0,\ j = 1,2,\cdots,J \tag{4.2.28}$$

最后有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u_x\|^2 + \lambda^2\|n\|^2) + \varepsilon(\lambda^2\|n\|^2 + \|u_x\|^2) +$$

$$2\lambda^2(n_t, |E|^2) + 2\varepsilon\lambda^2(n, |E|^2) \leqslant \frac{\lambda^2\|\phi\|^2}{\alpha} \tag{4.2.29}$$

作式(4.2.14)和 E_t 的内积,再取实部有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|E_x\|^2 + \frac{1}{2}(n, |E|_t^2) - \gamma\mathrm{Im}\ (E, E_t) = -\ \mathrm{Re}\ (g, E_t) \tag{4.2.30}$$

另一方面,式(4.2.23)取实部得

$$\mathrm{Im}\ (E, E_t) = -\ \mathrm{Im}\ (E_t, E) =$$

$$\|E_x\|^2 + (n, |E|^2) + \mathrm{Re}\ (g, E)$$

作式(4.2.14)和 g 的内积,再取实部有

$$\mathrm{Re}\ (g, E_t) = \mathrm{Im}\ (E_x, g_x) + \mathrm{Im}\ (nE, g) - \gamma\mathrm{Re}\ (E, g)$$

因此式(4.2.30)可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|E_x\|^2 + (n, |E|_t^2) + 2\gamma\|E_x\|^2 + 2\gamma(n, |E|^2) =$$

$$-\ 2\mathrm{Im}\ (E_x, g_x) - 2\mathrm{Im}\ (nE, g) \tag{4.2.31}$$

由 $H_0(t)$ 的定义,式(4.2.29)$+2\lambda^2$ 式(4.2.31)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_0(t) + \varepsilon(\|u_x\|^2 + \lambda^2\|n\|^2) +$$

$$2\lambda^2(\varepsilon + 2\gamma)(n, |E|^2) + 4\gamma\lambda^2\|E_x\|^2 \leqslant$$

$$\frac{\lambda^2}{\alpha}\|\phi\|^2 - 4\lambda^2\mathrm{Im}\ (E_x, g_x) - 4\lambda^2\mathrm{Im}\ (nE, g) \tag{4.2.32}$$

其中

$$\frac{\lambda^2}{\alpha}\|\phi\|^2 - 4\lambda^2\mathrm{Im}\ (E_x, g_x) - 4\lambda^2\mathrm{Im}\ (nE, g) \leqslant \frac{\lambda^2}{\alpha}\|\phi\|^2 +$$

$$4\lambda^2 \| E_x \| \, \| g_x \| + 4\lambda^2 \| g \|_\infty \| n \| \, \| E \| \leqslant \frac{\lambda^2}{\alpha} \| \phi \|^2 +$$

$$4\lambda^2 (\frac{\gamma}{2} \| E_x \|^2 + \frac{1}{2\gamma} \| g \|_1^2) + 4\lambda^2 (\frac{\epsilon \| n \|^2}{8} + \frac{2k_0^2 \| g \|_1^2 \| E \|^2}{\epsilon})$$

k_0 为一常数，使得 $\| g \|_\infty \leqslant k_0 \| g \|_1$。

于是从式(4.2.32)得

$$\frac{d}{dt} H_0(t) + A_0(t) \leqslant \frac{\lambda^2}{\alpha} \| \phi \|^2 + \frac{2\lambda^2}{\gamma} \| g \|_1^2 + \frac{8k_0^2\lambda^2 \| g \|_1^2 \| E \|^2}{\epsilon} \tag{4.2.33}$$

其中

$$A_0(t) = \epsilon \| u_x \|^2 + \frac{\epsilon\lambda^2}{2} \| n \|^2 + 2\lambda^2(\epsilon + 2\gamma)(n, |E|^2) + 2\gamma\lambda^2 \| E_x \|^2$$

取 $\beta_r = min\,(\frac{\epsilon}{4}, \frac{\gamma}{2})$，估计

$$|[2\beta_0\lambda^2 - 2\lambda^2(\epsilon + 2\gamma)](n, |E|^2)| \leqslant \frac{\epsilon\lambda^2}{4} \| n \|^2 + Ch \sum_{j=1}^{J} |E_j|^4 \leqslant \frac{\epsilon\lambda^2}{4} \| n \|^2 + \gamma\lambda^2 \| E_x \|^2 + C$$

其中，用到了引理 4.2.2 和引理 4.2.3，因此，

$$\beta_0 H_0(t) - A_0(t) \leqslant (\beta_0 - \epsilon) \| u_x \|^2 + (\beta_0\lambda^2 - \frac{\epsilon\lambda^2}{4}) \| n \|^2 + (\beta_0 2\lambda^2 - \gamma\lambda^2) \| E_x \|^2 + C \leqslant C$$

于是可得

$$\frac{d}{dt} H_0(t) + \beta_0 H_0(t) \leqslant \frac{2\lambda^2}{\alpha} \| \phi \|^2 + \frac{2\lambda^2}{\gamma} \| g \|_1^2 + \frac{8k_0^2\lambda^2 \| g \|_1^2 \| E \|^2}{\epsilon} + C \overset{\text{def}}{=\!=} k_1$$

由 Gronwall 引理，有

$$H_0(t) \leqslant H_0(t)e^{-\beta_0 t} + \frac{k_1}{\beta_0} \tag{4.2.34}$$

其中常数 k_1 与 t 无关。

最后，估计$(n, |E|^2)$有

$$2\lambda^2(n, |E|^2) \leqslant 2\lambda^2(\frac{1}{4}\|n\|^2 + h\sum_{j=1}^{J}|E_j|^4)$$

由引理 4.2.2 和引理 4.2.3 有

$$2\lambda^2(n, |E|^2) \leqslant \frac{\lambda^2}{2}\|n\|^2 + \lambda^2\|E_x\|^2 + k_2^2$$

由 $H_0(t)$的定义推出

$$H_0(t) \geqslant \|u_x\|^2 + \frac{\lambda^2}{2}\|n\|^2 + \lambda^2\|E_x\|^2 - k_2^2$$

$$H_0(t) \leqslant C(\|u_x\|^2 + \|n\|^2 + \|E_x\|^2 + 1) \tag{4.2.35}$$

由引理 4.2.3，不等式(4.2.34)得

$$\|u_x\|^2 + \frac{\lambda^2}{2}\|n\|^2 + \lambda^2\|E_x\|^2 \leqslant H_0(0)e^{-\beta_0 t} + \frac{k_1}{\beta_0} + k_2^2 \tag{4.2.36}$$

引理证毕。

为了对问题(4.2.12)～(4.2.20)的解进一步估计，必须估计更高阶的差商。为此，设

$$\begin{cases} E_j = 0, \ j < 0 \text{ 和 } j > J \\ n_j = 0, \ j < 0, j > J \end{cases} \tag{4.2.37}$$

引理 4.2.5 设 $n_1(x) \in L^2(\Omega)$，$n_0(x) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$，$E_0(x) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$，$f \in L^\infty(\mathbf{R}^+, L^2(\Omega))$，$g \in H_0^1(\Omega)$。则对问题(4.2.12)～(4.2.20)的解有估计

$$\|m\|^2 - \lambda^2\|n_x\|^2 + \lambda^2\|E_{x\bar{x}}\|^2 \leqslant H_1(0)e^{-\beta_1 t} + C$$

其中

$$H_1(t) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \|m\|^2 + \lambda^2\|n_x\|^2 + 2\lambda^2\|E_{x\bar{x}}\|^2 - 2\lambda^2(|E|^2_{x\bar{x}}, n)$$
$$+ 2\lambda^2(|E_x|^2 + |E_{\bar{x}}|^2, n) - 4\lambda^2 \mathrm{Re}\,(g, E_{x\bar{x}})$$

证明 作式(4.2.14)和$(E_{txx}+\gamma E_{xx})$的内积，再取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|E_{xx}\|^2+\gamma\|E_{xx}\|^2-\mathrm{Re}\,(nE,E_{txx}+\gamma E_{xx})$$
$$=\mathrm{Re}\,(g,E_{txx}+\gamma E_{xx}) \tag{4.2.38}$$

作式(4.2.13)和 m 的内积得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|m\|^2+(\alpha\lambda^2-\varepsilon)\|m\|^2-\varepsilon(\alpha\lambda^2-\varepsilon)(n,m)$$
$$-\lambda^2(n_{xx},m)-\lambda^2(|E|^2_{xx},m)=\lambda^2(f,m)$$

其中

$$-(n_{xx},m)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|n_x\|^2+\varepsilon\|n_x\|^2,$$

$$\lambda^2(f,m)\leqslant\frac{\lambda^2}{\alpha}\|f\|^2+\frac{\lambda^2\alpha}{4}\|m\|^2,$$

$$|(n,m)|\leqslant\|m\|\ \|n_x\|\ \frac{1}{|\mu_1|}$$

如同引理4.2.4，从式(4.2.38)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|m\|^2+\lambda^2\|n_x\|^2)+\varepsilon(\|m\|^2+\lambda^2\|n_x\|^2)-$$
$$2\lambda^2(|E|^2_{xx},m)\leqslant\frac{\lambda^2\|f\|^2}{\lambda} \tag{4.2.39}$$

其中参数 ε 充分小，使得 $\varepsilon\leqslant\min(\frac{\alpha\lambda^2}{4},\frac{\mu_1^2}{2\alpha\lambda^2})$。计算 $4\lambda^2$(4.2.38)+(4.2.39)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2\lambda^2\|E_{xx}\|^2+\|m\|^2+\lambda^2\|n_x\|^2)+$$
$$4\gamma\lambda^2\|E_{xx}\|^2+\varepsilon(\|m\|^2+\lambda^2\|n_x\|^2)-$$
$$4\lambda^2\mathrm{Re}\,(nE,E_{txx}+\gamma E_{xx})-2\lambda^2(|E|^2_{xx},n)\leqslant$$
$$4\lambda^2\mathrm{Re}\,(g,E_{txx}+\gamma E_{xx})+\frac{\lambda^2}{\alpha}\|f\|^2 \tag{4.2.40}$$

注意到

$$\mathrm{Re}\,(g,E_{txx})=\mathrm{Re}\,[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g,E_{xx})],$$

$$(|E|^2_{x\bar{x}},n_t) = \frac{d}{dt}(|E|^2_{x\bar{x}},n) - (n,|E|^2_{tx\bar{x}})$$

我们有

$$\frac{d}{dt}[2\lambda^2 \| E_{x\bar{x}} \|^2 + \| m \|^2 + \lambda^2 \| n_x \|^2 -$$

$$2\lambda^2(|E|^2_{x\bar{x}},n) - 4\lambda^2 \mathrm{Re}\ (g,E_{x\bar{x}})] +$$

$$4\gamma\lambda^2 \| E_{x\bar{x}} \|^2 + \varepsilon(\| m \|^2 + \lambda^2 \| n_x \|^2) -$$

$$2\lambda^2\varepsilon(|E|^2_{x\bar{x}},n) - 4\lambda^2\gamma \mathrm{Re}\ (g,E_{x\bar{x}}) \leqslant$$

$$\frac{\lambda^2}{\alpha} \| f \|^2 - 2\lambda^2(n,|E|^2_{tx\bar{x}}) +$$

$$4\lambda^2 \mathrm{Re}\ (nE,E_{tx\bar{x}}) + 4\gamma\lambda^2(nE,E_{x\bar{x}})$$

其中

$$4\lambda^2 \mathrm{Re}(nE,E_{tx\bar{x}}) - 2\lambda^2(n,|E|^2_{tx\bar{x}}) =$$

$$4\lambda^2 \mathrm{Re}\ (n,\overline{E}E_{tx\bar{x}}) - (E_t\overline{E})_{x\bar{x}}) =$$

$$4\lambda^2 h \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} n_j(-\overline{E}_{jx}E_{jt\bar{x}} - E_{j+1,t\bar{x}}\overline{E}_{jx} - E_{jt}\overline{E}_{jx\bar{x}}),$$

$$h\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}(n_jE_{jt\bar{x}},\overline{E}_{j\bar{x}}) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(n,|E_{\bar{x}}|^2) - \frac{1}{2}(n_t,|E_{\bar{x}}|^2) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(n,|E_{\bar{x}}|^2) - \frac{1}{2}(m,|E_{\bar{x}}|^2) + \frac{1}{2}\varepsilon(n,|E_{\bar{x}}|^2),$$

$$h\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} n_j(E_{j+1,t\bar{x}},\overline{E}_{jx}) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(n,|E_x|^2) - \frac{1}{2}(m,|E_x|^2) + \frac{1}{2}\varepsilon(n,|E_x|^2)$$

因此可得

$$\frac{d}{dt}H_1(t) + 4\gamma\lambda^2 \| E_{x\bar{x}} \|^2 + \varepsilon(\| m \|^2 + \lambda^2 \| n_x \|^2) -$$

$$2\varepsilon\lambda^2(|E|^2_{x\bar{x}},n) - 4\lambda^2\gamma \mathrm{Re}\ (g,E_{x\bar{x}}) +$$

$$2\varepsilon\lambda^2(n,\ E_x|^2 + |E_{\bar{x}}|^2) \leqslant$$

$$\frac{\lambda^2}{\alpha}\|f\|^2-4\lambda^2\mathrm{Re}\,(nE_{x\bar{x}},E_t)+4\gamma\lambda^2\mathrm{Re}\,(nE,E_{x\bar{x}})+$$

$$2\lambda^2(m,|E_{\bar{x}}|^2+|E_x|^2) \tag{4.2.41}$$

现估计不等式(4.2.41)得右端。从式(4.2.14)的

$$\mathrm{Re}(nE_{x\bar{x}},E_t)=-\mathrm{Im}\,(n^2E_{x\bar{x}},E)-\gamma\mathrm{Re}\,(nE_{x\bar{x}},E)-$$
$$\mathrm{Im}\,(nE_{x\bar{x}},g)$$

从引理 4.2.2,引理 4.2.3 和引理 4.2.4 得

$$|(m,|E_x|^2)|\leqslant\frac{\varepsilon}{8\lambda^2}\|m\|^2+Ch\sum_{j=1}^{J}|E_{jx}|^4\leqslant$$
$$\frac{\varepsilon}{8\lambda^2}\|m\|^2+\frac{\gamma}{12}\|E_{x\bar{x}}\|^2+C$$

同理可得

$$|(m,|E_{\bar{x}}|^2)|\leqslant\frac{\varepsilon}{8\lambda^2}\|m\|^2+\frac{\gamma}{12}\|E_{x\bar{x}}\|^2+C,$$

$$|(n^2E_{x\bar{x}},E)|\leqslant\|E\|_\infty\|E_{x\bar{x}}\|\ \|n\|_4^2\leqslant\frac{\gamma}{12}\|E_{x\bar{x}}\|^2+$$
$$Ch\sum_{j=1}^{J}\|n_j\|^4\leqslant\frac{\gamma}{12}\|E_{x\bar{x}}\|^2+\frac{\varepsilon}{8}\|n_x\|^2+C,$$

$$|(nE_{x\bar{x}},E)|\leqslant\|n\|\ \|E_{x\bar{x}}\|\ \|E\|_\infty\leqslant$$
$$C\|n\|\ \|E_{x\bar{x}}\|\ \|E_x\|\leqslant\frac{\gamma}{12}\|E_{x\bar{x}}\|^2+C,$$

$$|(nE_{x\bar{x}},g)|\leqslant\|g\|_\infty\|n\|\ \|E_{x\bar{x}}\|\leqslant$$
$$\frac{\gamma}{12}\|E_{x\bar{x}}\|^2+C$$

运用这些估计,不等式(4.2.41)可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_1(t)+A_1(t)\leqslant C$$

其中

$$A_1(t)=2\gamma\lambda^2\|E_{x\bar{x}}\|^2+\frac{\varepsilon}{2}(\|m\|^2+\lambda\|u_x\|^2)-$$
$$2\varepsilon\lambda^2(|E|_{x\bar{x}}^2,n)-4\gamma\lambda^2\mathrm{Re}\,(g,E_{x\bar{x}})-12\varepsilon\lambda^2(n,|E_x|^2+|E_{\bar{x}}|^2)$$

取 $\beta_1=\min\left(\frac{\varepsilon}{4},\frac{\gamma}{2}\right)$，估计

$$|(\beta_1 2\lambda^2-2\varepsilon\lambda^2)(|E|^2_{x\bar{x}},n)|=|(\beta_1 2\lambda^2-2\varepsilon\lambda^2)(|E|^2_x,n_x)|\leqslant \frac{\varepsilon\lambda}{2}\|n_x\|^2+\frac{1}{3}\gamma\lambda^2\|E_{x\bar{x}}\|^2+C,$$

$$|(\beta_1 4\lambda^2-4\gamma\lambda^2)(g,E_{x\bar{x}})|\leqslant\frac{1}{3}\gamma\lambda^2\|E_{x\bar{x}}\|^2+C,$$

$$|(\beta_1 2\lambda^2-2\varepsilon\lambda^2)(n,|E_x|^2+|E_{\bar{x}}|^2)|\leqslant C+Ch\sum_{j=1}^{J}|E_{jx}|^4\leqslant\frac{1}{3}\gamma\lambda^2\|E_{x\bar{x}}\|^2+C$$

其中，我们用到了引理 4.2.2，引理 4.2.3 和引理 4.2.4.

因此

$$\beta_1 H_1(t)-A_1(t)\leqslant\lambda^2(2\beta_1-\gamma)\|E_{x\bar{x}}\|^2+\left(\beta_1-\frac{\varepsilon}{4}\right)(\|m\|^2+\lambda\|n_x\|^2)+C\leqslant C$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_1(t)+\beta_1 H_1(t)\leqslant C \tag{4.2.42}$$

由 Gronwall 引理得

$$H_1(t)\leqslant H_1(0)\mathrm{e}^{-\beta_1 t}+\frac{C}{\beta_1} \tag{4.2.43}$$

最后，估计 H_1 如下：

$$2\lambda^2|(|E|^2_{x\bar{x}},n)|=2\lambda^2|2\mathrm{Re}\,(E_{x\bar{x}}\overline{E},n)+2(|E_x|^2,n)|\leqslant 2\lambda^2[\|E\|_\infty\|n\|\,\|E_{x\bar{x}}\|+\|E_x\|_\infty(\|E_x\|^2+\|n\|^2)]\leqslant \frac{\lambda^2}{4}\|E_{x\bar{x}}\|^2+C,$$

$$2\lambda^2|(n,|E_x|^2+|E_{\bar{x}}|^2)|\leqslant\frac{\lambda^2}{4}\|E_{x\bar{x}}\|^2+C,$$

$$4\lambda^2|(g,E_{x\bar{x}})|\leqslant\frac{\lambda^2}{2}\|E_{x\bar{x}}\|^2+C,$$

因此

$$H_1(t) \geqslant \lambda^2 \| E_{x\bar{x}} \|^2 + \| m \|^2 + \lambda^2 \| n_x \|^2 - C$$

显然，

$$H_1(t) \leqslant C(\| E_{x\bar{x}} \|^2 + \| n_x \|^2 + \| m \|^2 + 1)$$

因此，从式(4.2.43)得

$$\| m \|^2 + \lambda^2 \| n_x \|^2 + \lambda^2 \| E_{x\bar{x}} \|^2 \leqslant H_1(0)e^{-\beta_1 t} + \frac{C}{\beta_1} + C \tag{4.2.44}$$

引理 4.2.5 证毕。

引理 4.2.6 设 $f \in L^\infty(\mathbf{R}^+; H_0^1(\Omega))$，$g(x) \in H_0^1(\Omega)$，$n_1(x) \in H_0^1(\Omega)$，$n_0(x) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$，$E_0(x) \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$，则有

$$\frac{1}{2} \| m_x \|^2 + \frac{\lambda^2}{4} \| n_{xx} \|^2 + \frac{\lambda^2}{2} \| E_{x\bar{x}x} \|^2 \leqslant H_2(0)e^{-\beta_2 t} + C$$

其中

$$\begin{aligned} H_2(t) = & \frac{1}{2} \| m_x \|^2 + \frac{\lambda^2}{2} \| n_{x\bar{x}} \|^2 + \lambda^2 \| E_{x\bar{x}x} \|^2 + \\ & \lambda^2 (n_{x\bar{x}}, |E|^2_{x\bar{x}}) + \lambda^2 (n, |E_{x\bar{x}}|^2) + \\ & 4\lambda^2 \mathrm{Re}\ (n_x E_x + n_{\bar{x}} E_{\bar{x}}, E_{x\bar{x}}) - 2\lambda^2 \mathrm{Re}\ (g_x, E_{x\bar{x}x}) \end{aligned}$$

证明 作式(4.2.13)和$-m_{x\bar{x}}$的内积得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| m_x \|^2 + (\alpha\gamma^2 - \varepsilon) \| m_x \|^2 - \varepsilon(\alpha\lambda^2 - \varepsilon)(n_x, m_x) + \\ & \frac{\lambda^2}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| n_{x\bar{x}} \|^2 + \varepsilon\lambda^2 \| n_{x\bar{x}} \|^2 + \lambda^2 (|E|^2_{x\bar{x}}, m_{x\bar{x}}) = \\ & -\lambda^2 (f, m_{x\bar{x}}) \end{aligned}$$

基于 ε 的如上选取，以及引理 4.2.4，引理 4.2.5，可估计(n_x, m_x)，有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\| m_x \|^2 + \lambda^2 \| n_{x\bar{x}} \|^2) + \frac{\varepsilon}{2} (\| m_x \|^2 + \lambda^2 \| n_{x\bar{x}} \|^2) + \\ & \frac{\alpha\lambda^2}{2} \| m_x \|^2 + \lambda^2 (|E|^2_{x\bar{x}}, m_{x\bar{x}}) \leqslant \frac{\alpha\lambda^2}{2} \| m_x \|^2 + \frac{\lambda^2}{2\alpha} \| f_x \|^2 \end{aligned} \tag{4.2.45}$$

作式(4.2.14)和$(-E_{txxxx}-\gamma E_{xxxx})$的内积，取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|E_{xxx}\|^2+\gamma\|E_{xxx}\|^2+\mathrm{Re}\,(nE,E_{txxxx}+\gamma E_{xxxx})=$$
$$-\mathrm{Re}\,(g,E_{txxxx}+\gamma E_{xxxx}) \tag{4.2.46}$$

式(4.2.46)左端的最后一项为

$$\mathrm{Re}\,(nE,E_{txxxx}+\gamma E_{xxxx})=\mathrm{Re}\,((nE)_{xx}+E_{txx}+\gamma E_{xx})=$$
$$\mathrm{Re}\,(n_{xx}E+n_xE_x+n_xE_x+nE_{xx},E_{txx}+\gamma E_{xx})$$

由于

$$\frac{1}{2}(|E|^2_{txx},n_{xx})=\mathrm{Re}[(En_{xx},E_{txx})+(E_{xx}n_{xx},E_t)+$$
$$(E_{tx}n_{xx},E_x)+(E_{tx}n_{xx},E_x)]=\mathrm{Re}[(n_{xx}E,E_{txx})+$$
$$(n_{xx}E_{xx},E_t)-((E_{tx}\overline{E}_x)_x,n_x)-((E_{tx}\overline{E}_x)_x,n_x)],$$

$$\mathrm{Re}\,(nE_{xx},E_{txx})=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(n,|E_{xx}|^2)-\frac{1}{2}(m-\varepsilon n,|E_{xx}|^2),$$

$$\mathrm{Re}\,[-((E_{tx}\overline{E}_x)_x,n_x)-((E_{tx}\overline{E}_x)_x,n_x)]=$$
$$\mathrm{Re}\,[-(n_xE_x,E_{txx})-(n_xE_{tx},E_{xx})-$$
$$(n_xE_x,E_{txx})-(n_xE_{tx},E_{xx})],$$

$$\mathrm{Re}\,(n_xE_x,E_{txx})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\,(n_xE_x,E_{xx})-\mathrm{Re}(n_xE_{tx},E_{xx})-$$
$$\mathrm{Re}\,(E_xE_{xx},m_x-\varepsilon n_x),$$

$$\mathrm{Re}\,(n_xE_x,E_{txx})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\,(n_xE_x,E_{xx})-\mathrm{Re}(n_xE_{tx},E_{xx})-$$
$$\mathrm{Re}\,(E_x\overline{E}_{xx},m_x-\varepsilon n_x)$$

于是有

$$\mathrm{Re}(nE,E_{txxxx}+\gamma E_{xxxx})=$$
$$\frac{1}{2}((E)^2_{txx},n_{xx})-\mathrm{Re}(n_{xx}E_{xx},E_t)+$$
$$2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\,[(n_xE_x,E_{xx})+(n_xE_x,E_{xx})]-$$
$$2\mathrm{Re}[(n_xE_{tx},E_{xx})+(n_xE_{tx},E_{xx})]-$$

$$2\mathrm{Re}\,[(E_{\bar{x}}\overline{E}_{x\bar{x}},m_{\bar{x}}-\varepsilon n_{\bar{x}})+(E_x\overline{E}_{x\bar{x}},m_x-\varepsilon n_x)]+$$
$$\mathrm{Re}\,[(n_{\bar{x}}E_{t\bar{x}},E_{x\bar{x}})+(n_xE_{t\bar{x}},E_{x\bar{x}})]+$$
$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(n,|E_{x\bar{x}}|^2)-\frac{1}{2}(|E_{x\bar{x}}|^2,m-\varepsilon n)+$$
$$\gamma[\mathrm{Re}(n_{x\bar{x}}E,E_{x\bar{x}})+(n,|E_{x\bar{x}}|^2)+$$
$$(n_xE_{\bar{x}},E_{x\bar{x}})+(n_{\bar{x}}E_x,E_{x\bar{x}})]$$

式(4.2.46)右端项有

$$\mathrm{Re}\,(g,E_{tx\bar{x}x\bar{x}})=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\,(g_x,E_{x\bar{x}x}),$$

于是从式(4.2.46)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{1}{2}\|E_{x\bar{x}x}\|^2+\frac{1}{2}(n,|E_{x\bar{x}}|^2)+2\mathrm{Re}\,(n_{\bar{x}}E_{\bar{x}}+n_xE_x,E_{x\bar{x}})-$$
$$\mathrm{Re}\,(g_x,E_{x\bar{x}x})\Big]+\gamma\|E_{x\bar{x}x}\|^2+$$
$$\frac{1}{2}(|E|^2_{tx\bar{x}},n_{x\bar{x}})-\mathrm{Re}\,(n_{x\bar{x}}E_{x\bar{x}},E_t)-$$
$$\mathrm{Re}\,(2n_{\bar{x}}E_{t\bar{x}}+2n_xE_{tx}-n_{\bar{x}}E_{tx}-n_xE_{tx},E_{x\bar{x}})-$$
$$2\mathrm{Re}\,(E_{\bar{x}}m_{\bar{x}}+E_xm_x,E_{x\bar{x}})+$$
$$(2\varepsilon+\gamma)\,\mathrm{Re}\,(E_{\bar{x}}n_{\bar{x}}+E_xn_x,E_{x\bar{x}})-$$
$$\frac{1}{2}(|E_{x\bar{x}}|^2,m)+\gamma(n,|E_{x\bar{x}}|^2)=\gamma\mathrm{Re}\,(g_x,E_{x\bar{x}x})\qquad(4.2.47)$$

由式(4.2.45)+2λ^2 式(4.2.47)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_2(t)+\frac{\varepsilon}{2}(\|m_x\|^2+\lambda^2\|n_{x\bar{x}}\|^2)+2\gamma\lambda^2\|E_{x\bar{x}x}\|^2+$$
$$\varepsilon\lambda^2(|E|^2_{x\bar{x}},n_{x\bar{x}})+\lambda^2(\varepsilon+2\gamma)(n,|E_{x\bar{x}}|^2)+$$
$$2\lambda^2(2\varepsilon+\gamma)\,\mathrm{Re}\,(E_{\bar{x}}n_{\bar{x}}+E_xn_x,E_{x\bar{x}})-2\gamma\lambda^2\mathrm{Re}\,(g_x,E_{x\bar{x}x})\leqslant$$
$$\frac{\lambda^2}{2\alpha}\|f_x\|^2-2\lambda^2\mathrm{Re}\,(n_{x\bar{x}}E_{x\bar{x}},E_t)+$$
$$2\lambda^2\mathrm{Re}\,(2n_{\bar{x}}E_{t\bar{x}}+2n_xE_{tx}-n_{\bar{x}}E_{tx}-n_xE_{t\bar{x}},E_{x\bar{x}})+$$
$$4\lambda^2\mathrm{Re}\,(E_{\bar{x}}m_{\bar{x}}+E_xm_x,E_{x\bar{x}})-$$
$$2\gamma\lambda^2\mathrm{Re}\,(n_{x\bar{x}}E,E_{x\bar{x}})+\lambda^2(|E_{x\bar{x}}|^2,m)\qquad(4.2.48)$$

我们再估计式(4.2.48)右端的各项。由式(4.2.14)有

$$2\lambda^2\mathrm{Re}\,(n_{x\bar{x}}E_{x\bar{x}},E_t)=2\lambda^2[\mathrm{Im}\,(n_{x\bar{x}}E_{x\bar{x}},E_{x\bar{x}})-$$
$$\mathrm{Im}\,(n_{x\bar{x}}E_{x\bar{x}},nE)-\gamma\mathrm{Re}\,(n_{x\bar{x}}E_{x\bar{x}},E)-\mathrm{Im}(n_{x\bar{x}}E_{x\bar{x}},g)]\tag{4.2.49}$$

因

$$\mathrm{Im}\,(n_{x\bar{x}}E_{x\bar{x}},E_{x\bar{x}})=0$$
$$\mathrm{Im}\,(n_{x\bar{x}}E_{x\bar{x}},nE)\leqslant\|E_{x\bar{x}}\|\ \|n_{x\bar{x}}\|\ \|n\|_\infty\|E\|_\infty\leqslant$$
$$\eta\|n_{x\bar{x}}\|^2+K_1^4\frac{1}{4\eta}\|E_{x\bar{x}}\|^2\|n_x\|^2\|E_x\|^2,$$

其中 K_1 为正常数,使得 $\|n\|_\infty\leqslant K_1\|n_x\|$、$\|E\|_\infty\leqslant K_1\|E_x\|$,

$$|(n_{x\bar{x}}E_{x\bar{x}},g)|\leqslant\eta\|n_{x\bar{x}}\|^2+K_1^2\frac{1}{4\eta}\|g_x\|^2\|E_{x\bar{x}}\|^2$$

在式(4.2.49)中,$2\lambda^2\gamma\mathrm{Re}\,(n_{x\bar{x}}E_{x\bar{x}},E)$可如同式(4.2.48)相同项进行估计。类似地有如下估计

$$\mathrm{Re}\,(n_{\bar{x}}E_{t\bar{x}},E_{x\bar{x}})=-\mathrm{Im}\,(n_{\bar{x}}E_{x\bar{x}x},E_{x\bar{x}})+$$
$$h\,\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J}n_{j\bar{x}}(n_{j\bar{x}}E_j+n_{j-1}E_{j\bar{x}})\overline{E}_{jxx}-$$
$$\gamma\mathrm{Re}\,(n_{\bar{x}}E_{\bar{x}},E_{x\bar{x}})+\mathrm{Im}\,(n_{\bar{x}}g_{\bar{x}},E_{x\bar{x}}),\tag{4.2.50}$$

$$|(n_{\bar{x}}E_{x\bar{x}x},E_{x\bar{x}})|\leqslant\|E_{x\bar{x}x}\|\ \|E_{x\bar{x}}\|_4\|n_x\|_4\leqslant$$
$$C\|E_{x\bar{x}x}\|(\|n_x\|+\|n_x\|^{\frac{3}{4}}\|n_{x\bar{x}}\|^{\frac{1}{4}})\cdot(\|E_{x\bar{x}}\|+$$
$$\|E_{x\bar{x}}\|^{\frac{3}{4}}\|E_{x\bar{x}x}\|^{\frac{1}{4}})$$

因此

$$|(n_{\bar{x}}E_{x\bar{x}x},E_{x\bar{x}})|\leqslant$$
$$C(\|E_{x\bar{x}x}\|\ \|n_x\|\ \|E_{x\bar{x}}\|+\|E_{x\bar{x}x}\|^{\frac{5}{4}}\|n_x\|\ \|E_{x\bar{x}x}\|^{\frac{3}{4}}+$$
$$\|E_{x\bar{x}x}\|\ \|n_x\|^{\frac{3}{4}}\|n_{x\bar{x}}\|^{\frac{1}{4}}\|E_{x\bar{x}}\|+$$
$$\|E_{x\bar{x}x}\|^{\frac{5}{4}}\|E_{x\bar{x}}\|^{\frac{3}{4}}\|n_x\|^{\frac{3}{4}}\|n_{x\bar{x}}\|^{\frac{1}{4}})\leqslant$$
$$\eta\|n_{x\bar{x}}\|^2+\xi\|E_{x\bar{x}x}\|^2+C$$

式(4.2.50)中的其它各项可估计如下:

$$h\left|\sum_{j=1}^{J} n_{j\bar{x}} n_{j\bar{x}} E_j \bar{E}_{j\bar{x}\bar{x}}\right| \leqslant \|E\|_\infty \|E_{x\bar{x}}\| \|n_x\|_4^2 \leqslant \eta \|n_{x\bar{x}}\|^2 + C,$$

$$h\left|\sum_{j=1}^{J} n_{j\bar{x}} n_{j\bar{x}} E_{j\bar{x}} \bar{E}_{j\bar{x}}\right| \leqslant \|n\|_\infty \|E_{\bar{x}}\|_\infty \|n_x\| \|E_{x\bar{x}}\| \leqslant C,$$

$$|(n_{\bar{x}} E_{\bar{x}}, E_{x\bar{x}})| \leqslant \|E_{\bar{x}}\|_\infty \|n_x\| \|E_{x\bar{x}}\| \leqslant C,$$

$$|(n_{\bar{x}} g_{\bar{x}}, E_{x\bar{x}})| \leqslant \|g_x\| \|n_{\bar{x}}\|_\infty \|E_{x\bar{x}}\| \leqslant \eta \|n_{x\bar{x}}\|^2 + C$$

式(4.2.48)右端中的二项$(E_{\bar{x}}m_{\bar{x}}, E_{x\bar{x}})$，$(|E_{x\bar{x}}|^2, m)$可估计如下：

$$|(E_{\bar{x}}m_{\bar{x}}, E_{x\bar{x}})| \leqslant \|m_x\| \|E_{x\bar{x}}\| \|E_{\bar{x}}\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{32\lambda^2}\|m_x\|^2 + C,$$

$$|(|E_{x\bar{x}}|^2, m)| \leqslant \|m\| \|E_{x\bar{x}}\|_4^2 \leqslant \xi \|E_{x\bar{x}x}\|^2 + C$$

利用以上估计，取 $\eta = \frac{\varepsilon}{112}$，$\xi = \frac{\gamma}{16}$，从式(4.2.48)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_2(t) + A_2(t) \leqslant C \tag{4.2.51}$$

其中

$$\begin{aligned} A_2(t) = {} & \frac{\varepsilon}{4}(\|m_x\|^2 + \lambda^2\|n_{x\bar{x}}\|^2) + \gamma\lambda^2 \|E_{x\bar{x}x}\|^2 + \\ & \varepsilon\lambda^2(|E|_{x\bar{x}}^2, n_{x\bar{x}}) + \lambda^2(\varepsilon + 2\gamma)(n, |E_{x\bar{x}}|^2) + \\ & 2\lambda^2(2\varepsilon + \gamma)\,\mathrm{Re}\,(E_{\bar{x}}n_{\bar{x}} + E_x n_x, E_{x\bar{x}}) - \\ & 2\gamma\lambda^2\,\mathrm{Re}\,(g_x, E_{x\bar{x}x}) \end{aligned}$$

取 $\beta_2 = \min\left(\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\gamma}{2}\right)$，并作估计

$$\begin{aligned} & |(\beta\lambda^2 - \varepsilon\lambda^2)(|E|_{x\bar{x}}^2, n_{x\bar{x}})| \leqslant \\ & \frac{\varepsilon\lambda^2}{8}\|n_{x\bar{x}}\|^2 + Ch\sum_{j=1}^{J}(|E_j|_{x\bar{x}}^2)^2 \leqslant \frac{\varepsilon\lambda^2}{8}\|n_{x\bar{x}}\|^2 + C, \end{aligned}$$

$$|[\beta_1\lambda^2 - \lambda^2(\varepsilon + 2\gamma)](n, |E_{x\bar{x}}|^2)| \leqslant C\|n\|_\infty \|E_{x\bar{x}}\|^2 \leqslant C,$$

$$\begin{aligned} & |[4\beta_1\lambda^2 - 2\lambda^2(2\varepsilon + \gamma)](E_{\bar{x}}n_{\bar{x}} + E_x n_x, E_{x\bar{x}})| \leqslant \\ & C(\|E_{\bar{x}}\|_\infty + \|E_x\|_\infty)[|(n_{\bar{x}}, E_{x\bar{x}})| + |(n_x, E_{x\bar{x}})|] \leqslant C, \end{aligned}$$

$$|(2\beta_1\lambda^2 - 2\gamma\lambda^2)(g_x, E_{x\bar{x}x})| \leqslant \frac{\gamma\lambda^2}{2}\|E_{x\bar{x}x}\|^2 + C,$$

因此

$$\beta_2 H_2(t) - A_2(t) \leqslant \left(\frac{\beta_2}{2} - \frac{\varepsilon}{8}\right)(\|m_x\|^2 + \lambda^2\|n_{x\bar{x}}\|^2) +$$

$$(\lambda^2\beta_2 - \frac{\gamma}{2}\lambda^2)\|E_{x\bar{x}x}\|^2 + C \leqslant C$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_2(t) + \beta_2 H_2(t) \leqslant C$$

$$H_2(t) \leqslant H_2(0)\mathrm{e}^{-\beta_2 t} + \frac{C}{\beta_2}$$

最后，对 $H_2(t)$进行估计，

$$\begin{aligned}
&\lambda^2(|E|^2_{x\bar{x}}, n_{x\bar{x}}) = \\
&\lambda^2\mathrm{Re}\,[2(E\overline{E}_{x\bar{x}}, n_{x\bar{x}}) + (|E_x|^2, n_{x\bar{x}}) + (|E_{\bar{x}}|^2, n_{x\bar{x}})] \leqslant \\
&2\lambda^2\|n_{x\bar{x}}\|\ \|E_{x\bar{x}}\|\ \|E\|_{\infty} + 2\lambda^2\|n_{x\bar{x}}\|\ \|E_x\|^2_4 \leqslant \\
&\frac{\lambda^2}{4}\|n_{x\bar{x}}\|^2 + C,
\end{aligned}$$

$$\lambda^2(n, |E_{x\bar{x}}|^2) \leqslant \lambda^2\|n\|\ \|E_{x\bar{x}}\|^2_4 \leqslant \frac{\lambda^2}{4}\|E_{x\bar{x}x}\|^2 + C,$$

$$|(n_x E_x + n_{\bar{x}} E_{x\bar{x}}, E_{x\bar{x}})| \leqslant C(\|E_{x\bar{x}}\|^2 + \|n_x\|^2)\|E_x\|^2_{\infty} \leqslant C,$$

$$\begin{aligned}
2\lambda^2|\mathrm{Re}\,(g_x, E_{x\bar{x}x})| &\leqslant 2\lambda^2\|g_x\|^2\|E_{x\bar{x}x}\| \leqslant \\
&\frac{\lambda^2}{4}\|E_{x\bar{x}x}\|^2 + 4\lambda^2\|g_x\|^2。
\end{aligned}$$

从这些估计可得

$$H_2(t) \geqslant \frac{1}{2}\|m_x\|^2 + \frac{\lambda^2}{4}\|n_{x\bar{x}}\|^2 + \frac{\lambda^2}{2}\|E_{x\bar{x}x}\|^2 - C$$

从而

$$\frac{1}{2}\|m_x\|^2 + \frac{\lambda^2}{4}\|n_{x\bar{x}}\|^2 + \frac{\lambda^2}{2}\|E_{x\bar{x}x}\|^2 \leqslant H_2(0)\mathrm{e}^{-\beta_2 t} + C \tag{4.2.52}$$

引理 4.2.6 证毕。

前面已作了离散问题(4.2.12)～(4.2.20)一致的先验估计，这是为证明该问题离散吸引子依 $\|\cdot\|_{\Sigma_0}$，$\|\cdot\|_{\Sigma_1}$，$\|\cdot\|_{\Sigma_2}$，的存在性作准备的，其中

$$\Sigma_0 = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

$$\Sigma_1 = L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times (H_0^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),$$

$$\Sigma_2 = H_0^1(\Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

定理 4.2.1 设 $n_0(x) \in L^2(\Omega)$，$n_1(x) \in H^{-1}(\Omega)$，$E_0(x) \in H_0^1(\Omega)$，$f(x) \in H^{-1}(\Omega)$，$g(x) \in H_0^1(\Omega)$，则存在$(m,n,E)$在 Σ_0 中的有界吸收集 B_0，即对 Σ_0 中的任何有界集 $\mathscr{B}$，$\forall\ (m_0,n_0,E_0) \in \mathscr{B}$，则存在 $t_0>0$，使得

$$\forall t \geqslant t_0, 有 (m(t),n(t),E(t)) \in B_0$$

证明 设 $\| m_0 \|_{-1}^2 + \| n_0 \|^2 + \| E_0 \|_{H^1}^2 \leqslant R^2$，特别取 $\| E_0 \|^2 \leqslant \frac{R^2}{\lambda_1}$，由式(4.2.24)，$E$ 满足不等式

$$\| E(t) \|^2 \leqslant \| E(0) \|^2 e^{-\gamma t} + \frac{\| g \|^2}{\gamma^2}(1 - e^{-\gamma t})$$

因此

$$\| E(t) \|^2 \leqslant \| E_0 \|^2 e^{-\gamma t} + \frac{\| g \|^2}{\gamma^2}$$

设 t'_0 选取使得：$\forall t \geqslant t'_0$，$\| E(t) \|^2 \leqslant 2\frac{\| g \|^2}{\gamma^2}$，由不等式(4.2.36)

$$\| m \|_{-1}^2 + \frac{\lambda^2}{2} \| n \|^2 + \lambda^2 \| E \|_{H^1}^2 \leqslant$$

$$H_0(t'_0) e^{-\beta_0 (t - t'_0)} + \frac{k_1}{\beta_0} + k_2^2,$$

其中 k_1 依赖于 f，g 和 $\| E \|$。因此，由 $\| E(t) \|^2 \leqslant \frac{2\| g \|^2}{\gamma^2}$，可得

$$\| m \|_{-1}^2 + \frac{\lambda^2}{2} \| n \|^2 + \lambda^2 \| E \|_{H^1}^2 \leqslant \delta R^2 e^{-\beta_0 (t - t'_0)} + k'_0$$

其中常数 k'_0 与 t、初值和步长 h 无关，推之，存在 $t_0(R)$ 使得

$$\| m \|_{-1}^2 + \frac{\lambda^2}{2} \| n \|^2 + \lambda^2 \| E \|_{H^1}^2 \leqslant 2k'_0, \forall t \geqslant t_0(R) \tag{4.2.53}$$

定理 4.2.1 证毕。由此可得

定理 4.2.2 在定理 4.2.1 的条件下，存在半流(4.2.12)～(4.2.20)依模 $\|\cdot\|_{\Sigma_0}$ 的整体吸引子。这个吸引子位于 $B(0,\Gamma_0)\subset\mathbf{R}^l\times\mathbf{R}^l\times\mathbf{C}^l$ 之中。其中 $B(0,\Gamma_0)$ 表示以 $0\in\mathbf{R}^l\times\mathbf{R}^l\times\mathbf{C}^l$ 为中心，$\Gamma_0=2k'_0$ 为半径的球。

定理 4.2.3 设 $n_1(x)\in L^2(\Omega)$，$n_0(x)\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，$E_0(x)\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，$f(x)\in L^2(\Omega)$，$g(x)\in H_0^1(\Omega)$，则存在 (m,n,E) 在 Σ_1 中的有界吸收集 B_1。

证明 设 $\|m_0\|^2+\|n_0\|_{H^1}^2+\|E_{xx}\|^2\leqslant R^2$，则 $\|m_0\|_{-1}^2+\|n_0\|^2+\|E_0\|_{H^1}^2\leqslant\dfrac{R^3}{\sqrt{\lambda_1}}$，依定理 4.2.1，存在 $t_0>0$，使 $\forall t\geqslant t_0$，$(m(t),n(t),E(t))\in B_0$，B_0 为 $\sum_0$ 的有界吸收集，且与初值无关。由式(4.2.44)

$$\|m\|^2+\lambda^2\|n_x\|^2+\lambda^2\|E_{xx}\|^2\leqslant H_1(t_0)e^{-\beta_2(t-t_0)}+k'_1$$

其中常数 k'_1 与 t、初值和步长 h 无关。由此易得，存在 $t_1(R)\geqslant t_0>0$，使得

$$\|m\|^2+\lambda^2\|n_x\|^2+\lambda^2\|E_{xx}\|^2\leqslant 2k'_1,\ \forall t\geqslant t_1 \tag{4.2.54}$$

由此推得，存在 (m,n,E) 在 $\sum_1$ 中的有界吸收集 B_1。

定理 4.2.4 在定理 4.2.3 条件下，存在半流(4.2.12)～(4.2.20)在 $\mathbf{R}^l\times\mathbf{R}^l\times\mathbf{C}^l$ 中关于 $\|\cdot\|_{\Sigma_1}$ 模的整体吸引子，这个吸引子在 $B(0,\Gamma_1)\subset\mathbf{R}^l\times\mathbf{R}^l\times\mathbf{C}^l$ 中，其中 $B(0,\Gamma_1)$ 以 $0\in\mathbf{R}^l\times\mathbf{R}^l\times\mathbf{C}^l$ 为中心，以 $\Gamma_1=2k'_1$ 为半径的球。

从式(4.2.52)可得

定理 4.2.5 设 $n_0(x)\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，$n_1(x)\in H_0^1(\Omega)$，$E_0(x)\in H^3(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，$f(x)\in H_0^1(\Omega)$，$g(x)\in H_0^1(\Omega)$，则存在 (m,n,E) 在 $\sum_2$ 中的有界吸收集 B_2。

定理 4.2.6 在定理 4.2.5 的条件下，存在半流(4.2.12)～(4.2.20)在$\mathbf{R}^J\times\mathbf{R}^J\times\mathbf{C}^J$中依$\Sigma_2$模的整体吸引子。这个吸引子在$B(0,\Gamma_2)\subset\mathbf{R}^J\times\mathbf{R}^J\times\mathbf{C}^J$,中，其中$B(0,\Gamma_2)$为以$0\in\mathbf{R}^J\times\mathbf{R}^J\times\mathbf{C}^J$为中心、$\Gamma_2=2k'_2$为半径的球。

以下估计吸引子的维数。考虑离散方程组(4.2.12)～(4.2.20)的线性变分方程组

$$v_t-(\alpha\lambda^2-\varepsilon)v-\varepsilon(\alpha\lambda^2-\varepsilon)u-\lambda^2u_{x\bar{x}}-2\lambda^2\mathrm{Re}\,(E_{x\bar{x}}\overline{F})$$

$$-2\lambda^2\mathrm{Re}\,(F_{x\bar{x}}\overline{E})-2\lambda^2\mathrm{Re}\,(F_x\overline{E}_x)-2\lambda^2\mathrm{Re}\,(F_{\bar{x}}\overline{E}_{\bar{x}})=0 \tag{4.2.55}$$

$$\mathrm{i}F_t+F_{x\bar{x}}-uE-nF+\mathrm{i}\gamma F=0 \tag{4.2.56}$$

$$v=v_t+\varepsilon u \tag{4.2.57}$$

$$v|_{t=0}=v_0,\ u|_{t=0}=u_0,\ F|_{t=0}=F_0 \tag{4.2.58}$$

其中$(m,n,E)=S(t)(m_0,n_0,E_0)$,$(m_0,n_0,E_0)\in\sum_2$,$(v_0,u_0,F_0)\in\sum_1$,因$(m,n,E)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;\sum_1)$,容易证明式(4.2.55)～(4.2.57)的初值问题(4.2.58)具有唯一解$(u,v,F)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;\sum_1)$。令

$$(v(t),u(t),F(t))=DS(t)(m_0,n_0,E_0)(v_0,u_0,F_0)$$

其中$DS(t)(m_0,n_0,E_0)$为$S(t)$在(m_0,n_0,E_0)处的 Frechet 导数。

命题 4.2.1 存在常数$C(R,T)$使得

$$\|(m_0^{(i)},n_0^{(i)},E_0^{(i)})\|_{\Sigma_1}\leqslant R,i=1,2,$$

$$\forall R>0,\ \forall t,\ |t|<T,\ 0<T<\infty$$

有

$$\|S(t)(m_0^{(2)},n_0^{(2)},E_0^{(2)})-S(t)(m_0^{(1)},n_0^{(1)},E_0^{(1)})-$$

$$DS(t)(m_0^{(1)},n_0^{(1)},E_0^{(1)})(m_0,n_0,E_0)\|_{\Sigma_1}\leqslant$$

$$C\|(m_0,n_0,E_0)\|_{\Sigma_1}^2 \tag{4.2.59}$$

其中

$$m_0=m_0^{(2)}-m_0^{(1)},n_0=n_0^{(2)}-n_0^{(1)},E_0=E_0^{(2)}-E_0^{(1)}$$

证明 令

$$w(t)=S(t)(m_0^{(2)},n_0^{(2)},E_0^{(2)})-S(t)(m_0^{(1)},n_0^{(1)},E_0^{(1)})-$$
$$DS(t)(m_0^{(1)},n_0^{(1)},E_0^{(1)})(m_0,n_0,E_0)=$$
$$G_1(t)-G(t)-\nu(t)$$

则有

$$\partial_t w(t)=L_1(G_1(t))-L_1(G(t))+L(G(t))\nu(t)=$$
$$L_1(G_1(t)+\nu(t)+w(t))-L_1(G_1(t))+L(G(t))\nu(t),\tag{4.2.60}$$

$$w(0)=0\tag{4.2.61}$$

其中

$$G_t=L(G)$$

为离散方程组(4.2.12)～(4.2.20)的算子形式，

$$\nu_t=-L(G(t))\nu$$

为线性化方程组(4.2.55)、(4.2.58)的算子形式。于是式(4.2.60)可写为

$$\partial_t w(t)+L(G(t))w(t)=\Lambda_0(G,\nu,w)\tag{4.2.62}$$

其中

$$\Lambda_0(G,\nu,w)=L_1(G(t)+\nu(t)+w(t))-$$
$$L_1(G(t))+L(G(t))(\nu(t)+w(t))$$

对上述线性方程(4.2.62)易得估计

$$\| w(t)\|_{\Sigma_1}\leqslant C\|(m_0,n_0,E_0)\|_{\Sigma_1}^2$$

这就推出半群算子 $S(t)$ 依 $\sum_1$ 模是可微的。

我们期望方程组(4.2.55)～(4.2.58)是指数衰减的。令

$$p=e^{\sigma t}u,\ q=e^{\sigma t}v,\ G=e^{\sigma t}F$$

则式(4.2.55)～(4.2.57)可写为

$$\frac{dp}{dt}=(\sigma-\epsilon)p+q\tag{4.2.63}$$

$$\frac{dq}{dt}+(\alpha\lambda^2-\epsilon-\sigma)q-\epsilon(\alpha\lambda^2-\epsilon)p-\lambda^2p_{x\bar{x}}=$$

$$2\lambda^2 \mathrm{Re}\,(E_{x\bar{x}}\overline{G}) + 2\lambda^2 \mathrm{Re}\,(G_{x\bar{x}}\overline{E}) +$$

$$2\lambda^2 \mathrm{Re}\,(G_x\overline{E}_x) + 2\lambda^2 \mathrm{Re}\,(G_{\bar{x}}E_{\bar{x}}), \tag{4.2.64}$$

$$\mathrm{i}G_t + G_{x\bar{x}} - pE - nG + \mathrm{i}(\gamma - \varepsilon)G = 0 \tag{4.2.65}$$

进一步(q,p,G)作能量估计，以求吸引子的维数。先作式(4.2.63)和 p 的 L^2 内积，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|p\|^2 = (\sigma - \varepsilon)\|p\|^2 + \sum_{j=1}^{J} q_j p_j h \tag{4.2.66}$$

同理，作式(4.2.64)和 q 的内积得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|q\|^2 + (\alpha\lambda^2 - \varepsilon - \sigma)\|q\|^2 -$$

$$-\varepsilon(\alpha\lambda^2 - \varepsilon)\sum_{j=1}^{J} p_j q_j h - \lambda^2 \sum_{j=1}^{J} p_{jx\bar{x}} q_j h =$$

$$2\lambda^2 \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} E_{jx\bar{x}}\overline{G}_j q_j h + 2\lambda^2 \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} G_{jx\bar{x}}\overline{E}_j q_j h +$$

$$2\lambda^2 \sum_{j=1}^{J} G_{jx}\overline{E}_{jx} q_j h + 2\lambda^2 \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} G_{j\bar{x}}\overline{E}_{j\bar{x}} q_j h \tag{4.2.67}$$

由于

$$\sum_{j=1}^{J} p_{jx\bar{x}} q_j h = \sum_{j=1}^{J} p_{jx\bar{x}} \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} h - (\sigma - \varepsilon)\sum_{j=1}^{J} p_{jx\bar{x}} p_j h$$

因此等式(4.2.67)可写为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|q\|^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda^2\|p_x\|^2) + (\alpha\lambda^2 - \varepsilon - \sigma)\|q\|^2 -$$

$$\lambda^2(\sigma - \varepsilon)\|p_x\|^2 - \varepsilon(\alpha\lambda^2 - \varepsilon)\sum_{j=1}^{J} p_j q_j h =$$

$$2\lambda^2 \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} E_{jx\bar{x}}\overline{G}_j q_j h + 2\lambda^2 \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} G_{jx\bar{x}} E_j q_j h +$$

$$2\lambda^2 \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} G_{jx}\overline{E}_{jx} q_j h + 2\lambda^2 \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} G_{j\bar{x}}\overline{E}_{j\bar{x}} q_j h$$

由于 ε 的如前选取，即得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|q\|^2 + \lambda^2\|p_x\|^2) + \frac{\varepsilon}{2}(\|q\|^2 + \lambda^2\|p_x\|^2) -$$

$$\sigma^2(\|q\|^2+\lambda^2\|p_x\|^2)=2\lambda^2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}E_{j,x\bar{x}}\overline{G}_j q_j h+$$

$$2\lambda^2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}G_{j,x\bar{x}}\overline{E}_j q_j h+2\lambda^2\sum_{j=1}^{J}G_{j,x}\overline{E}_{j,x}q_j h+2\lambda^2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}G_{j,\bar{x}}\overline{E}_{j,x}q_j h$$

(4.2.68)

现作式(4.2.65)和 G 的内积,取虚部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|G\|^2+(\gamma-\sigma)\|G\|^2=\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J}p_jE_j\overline{G}_jh$$

(4.2.69)

同样,作式(4.2.65)和 $G_{x\bar{x}}+(\gamma-\sigma)\overline{G}_{x\bar{x}}$的 L^2 内积,得

$$i\sum_{j=1}^{J}G_{jt}(\overline{G}_{j,x\bar{x}t}+(\gamma-\sigma)\overline{G}_{j,x\bar{x}})h+\sum_{j=1}^{J}G_{j,x\bar{x}}(\overline{G}_{j,x\bar{x}t}+$$

$$(\gamma-\sigma)\overline{G}_{j,x\bar{x}})h-\sum_{j=1}^{J}p_jE_j(\overline{G}_{j,x\bar{x}t}+(\gamma-\sigma)\overline{G}_{j,x\bar{x}})h-$$

$$\sum_{j=1}^{J}n_jG_j(\overline{G}_{j,x\bar{x}t}+(\gamma-\sigma)\overline{G}_{j,x\bar{x}})h+$$

$$\mathrm{i}(\gamma-\sigma)\sum_{j=1}^{J}G_j(\overline{G}_{j,x\bar{x}t}+(\gamma-\sigma)\overline{G}_{j,x\bar{x}})h=0$$

上式取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|G_{x\bar{x}}\|^2+(\gamma-\sigma)\|G_{x\bar{x}}\|^2-\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}p_jE_j\overline{G}_{j,x\bar{x}t}h-$$

$$(\gamma-\sigma)\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}p_jE_j\overline{G}_{j,x\bar{x}}h-\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}n_jG_j\overline{G}_{j,x\bar{x}t}h-$$

$$(\gamma-\sigma)\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}n_jG_j\overline{G}_{j,x\bar{x}t}h=0 \tag{4.2.70}$$

对于较困难的项 $\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}p_jE_j\overline{G}_{j,x\bar{x}t}h$ 和 $\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}n_jG_j\overline{G}_{j,x\bar{x}t}h$、只要注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j=1}^{J}p_jE_j\overline{G}_{j,x\bar{x}}h=\sum_{j=1}^{J}((\gamma-\sigma)p_j+q_j)E_j\overline{G}_{j,x\bar{x}}h+$$

$$\sum_{j=1}^{J}p_jE_{jt}\overline{G}_{j,x\bar{x}}h+\sum_{j=1}^{J}p_jE_j\overline{G}_{j,x\bar{x}t}h,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j=1}^{J} n_j G_j \overline{G}_{j,x\bar{x}} h =$$

$$\sum_{j=1}^{J} n_{jt} G_j \overline{G}_{j,x\bar{x}} h + \sum_{j=1}^{J} n_j G_{jt} \overline{G}_{jx\bar{x}} h + \sum_{j=1}^{J} n_j G_j \overline{G}_{j,x\bar{x}t} h$$

以及

$$G_t = \mathrm{i}(G_{x\bar{x}} - pE - nG + \mathrm{i}(\gamma - \sigma)G)$$

因此

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} n_j G_{jt} \overline{G}_{jx\bar{x}} h =$$

$$-\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J} n_j G_{jx\bar{x}} \overline{G}_{jx\bar{x}} h + \mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J} n_j p_j \overline{G}_{jx\bar{x}} h +$$

$$\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J} n_j^2 G_j \overline{G}_{jx\bar{x}} h - (\gamma - \sigma)\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} n_j G_j \overline{G}_{jx\bar{x}} h$$

于是式(4.2.67)可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\| G_{x\bar{x}} \|^2 - \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} p_j E_j \overline{G}_{jx\bar{x}} h - \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} n_j G_j \overline{G}_{jx\bar{x}} h\right) +$$

$$(\gamma - \sigma)\| G_{x\bar{x}} \|^2 + (\gamma - \varepsilon)\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} p_j E_j \overline{G}_{jx\bar{x}} h +$$

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} q_j E_j \overline{G}_{jx\bar{x}} h + \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} n_{jt} G_j \overline{G}_{jx\bar{x}} h +$$

$$\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J} n_j p_j \overline{G}_{jx\bar{x}} h + \mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J} n_j^2 G_j \overline{G}_{jx\bar{x}} h -$$

$$2(\gamma - \sigma)\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} n_j G_j \overline{G}_{jx\bar{x}} h = 0 \qquad (4.2.71)$$

作 μ 式(4.2.66)+式(4.2.67)+ν 式(4.2.68)+$2\lambda^2$ 式(4.2.71)并定义新的泛函

$$Q(t) = \lambda^2 \| G_{x\bar{x}} \|^2 - 2\lambda^2 \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} p_j E_j \overline{G}_{jx\bar{x}} h -$$

$$2\lambda^2 \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} n_j G_j \overline{G}_{jx\bar{x}} h + \frac{\nu}{2}\| G \|^2 +$$

$$\frac{1}{2}\| q \|^2 + \frac{\lambda^2}{2}\| p_x \|^2 + \frac{\mu}{2}\| p \|^2$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q(t)+2\lambda^2(\gamma-\sigma)\|G_{x\bar{x}}\|^2+\nu(\gamma-\sigma)\|G_{x\bar{x}}\|^2+$$

$$(\frac{\varepsilon}{2}-\sigma)(\lambda^2\|p_x\|^2+\|q\|^2)-\mu(\gamma-\varepsilon)\|p\|^2\leqslant A \tag{4.2.72}$$

其中

$$A=2\lambda^2(\varepsilon+\gamma-2\sigma)\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}p_jE_j\overline{G}_{jx\bar{x}}h-$$

$$2\lambda^2\sum_{j=1}^{J}p_jE_{jt}\overline{G}_{jx\bar{x}}h-2\lambda^2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}n_jG_j\overline{G}_{jx\bar{x}}h-$$

$$2\lambda^2\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J}n_jE_j\overline{G}_{jx\bar{x}}h-2\lambda^2\sum_{j=1}^{J}n_j^2G_j\overline{G}_{jx\bar{x}}h+$$

$$\nu\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J}p_jE_jG_jh+2\lambda^2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}E_{jx\bar{x}}G_jq_jh+$$

$$2\lambda^2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}G_{jx}\overline{E}_{jx}q_jh+2\lambda^2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}G_{jx}\overline{E}_{j\bar{x}}q_jh+$$

$$\mu\sum_{j=1}^{J}p_jq_jh+2(\gamma-\sigma)\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}n_jG_jG_{jx\bar{x}}h$$

估计 A 的上界，

$$A\leqslant 2\lambda^2(\varepsilon+\gamma-2\sigma)\|p\|\,\|E\|_\infty\|G_{x\bar{x}}\|+$$

$$2\lambda^2\|p\|\,\|E_t\|_\infty\|G_{x\bar{x}}\|+2\lambda^2\|n_t\|^2\|G_x\|_\infty\|G_{x\bar{x}}\|+$$

$$2\lambda^2\|n\|_\infty\|E\|_\infty\|p\|\,\|G_{x\bar{x}}\|+2\lambda^2\|n\|_\infty^2\|G\|\,\|G_{x\bar{x}}\|+$$

$$\nu\|p\|\,\|E\|_\infty\|G\|+2\lambda^2\|E_{x\bar{x}}\|\,\|G\|_\infty\|q\|+$$

$$4\lambda^2\|G_x\|\,\|E_x\|_\infty\|q\|+\mu\|p\|\,\|q\|+2|\gamma-$$

$$\sigma|\,\|n\|_\infty\|G\|\,\|G_{x\bar{x}}\|$$

因设 $(m_0,n_0,E_0)\in\sum_3$，解 $(m,n,E)\in L^\infty(\mathbf{R}_+,\sum_2)$，$\|E_x\|$，$\|E_{x\bar{x}}\|$，$\|n_x\|$，$\|n_t\|$ 均对时间一致有界。显然存在常数

$$C_0=C_0(\|E_x\|,\gamma,\sigma,\varepsilon,\|E_{tx}\|,\|n_x\|,\mu)$$

$$C_1=C_1(\|n_t\|,\gamma,\|m_x\|,\nu,\|E_{x\bar{x}}\|)$$

使得

$$A \leqslant C_0 \| p \|^2 + C_1 \| G_x \|^2 + \lambda^2 \gamma \| G_{x\bar{x}} \|^2 + \frac{\varepsilon}{4} \| q \|^2 \tag{4.2.73}$$

由不等式(4.2.72)、(4.2.73)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q(t) + 2\lambda^2(\gamma - \sigma - \frac{\gamma}{2}) \| G_{x\bar{x}} \|^2 + \nu(\gamma - \sigma) \| G \|^2 +$$

$$\lambda^2(\frac{\varepsilon}{2} - \sigma) \| p_x \|^2 + (\frac{\varepsilon}{2} - \sigma - \frac{\varepsilon}{4}) \| q \|^2 -$$

$$\mu(\sigma - \varepsilon) \| p \|^2 \leqslant C_0 \| p \|^2 + C_1 \| G_x \|^2 \tag{4.2.74}$$

现选取 $\sigma < \min(\frac{\gamma}{2}, \frac{\varepsilon}{4})$,因此 $2\lambda^2(\gamma - \sigma - \frac{\gamma}{2}) = 2\lambda^2(\frac{\gamma}{2} - \sigma) > 0$,且

$$\frac{\varepsilon}{2} - \sigma - \frac{\varepsilon}{4} = -\sigma + \frac{\varepsilon}{4} > 0$$

显然,$\sigma < \gamma$, $\sigma < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$。由式(4.2.74)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q(t) \leqslant C_0 \| p \|^2 + C_1 \| G_x \|^2 \leqslant C_2(\| p \|^2 + \| G_x \|^2) \tag{4.2.75}$$

我们进一步证明,当适当选取 μ 和 ν,使得 $Q(t)^{\frac{1}{2}}$是 $\sum_1$ 的等价模。事实上,

$$Q(t) = \lambda^2 \| G_{x\bar{x}} \|^2 - 2\lambda^2 \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{J} p_j E_j \overline{G}_{jx\bar{x}} h$$

$$- 2\lambda^2 \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{J} n_j G_j \overline{G}_{jx\bar{x}} h + \frac{\nu}{2} \| G \|^2 + \frac{1}{2} \| q \|^2$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2} \| p_x \|^2 + \frac{\mu}{2} \| p \|^2,$$

$$2\lambda^2 \left| \sum_{j=1}^{J} p_j E_j \overline{G}_{jx\bar{x}} h \right| \leqslant \frac{\nu}{2} \| p \|^2 + \frac{2\lambda^2}{\mu} \| E \|_\infty \| G_{x\bar{x}} \|^2,$$

$$2\lambda^2 \left| \sum_{j=1}^{J} n_j G_j \overline{G}_{jx\bar{x}} h \right| \leqslant \frac{\nu}{2} \| p \|^2 + \frac{2\lambda^2}{\nu} \| n \|_\infty \| G_{x\bar{x}} \|^2$$

由此可得

$$Q(t) \geqslant (\lambda^2 - \frac{2\lambda^4}{\mu}\|E\|_\infty^2 - \frac{2\lambda^4}{\nu}\|n\|_\infty^2)\|G_{x\bar{x}}\|^2 +$$

$$\frac{1}{2}\|q\|^2 + \frac{\lambda^2}{2}\|p_x\|^2$$

因 $\|E_r\|^2, \|n_r\|^2$ 是一致有界的，对于充分大的 μ 和 ν，有

$$\lambda^2 - \frac{2\lambda^4}{\mu}\|E\|_\infty^2 - \frac{2\lambda^4}{\nu}\|n\|_\infty^2 \geqslant \frac{\lambda^2}{2}, \ \forall t \geqslant 0$$

于是 $Q(t) \geqslant C(\|G_{x\bar{x}}\|^2 + \|p_x\|^2 + \|q\|^2)$，其中 $C = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda^2}{2}\right)$。另一方面，容易证明 $Q(t)$ 囿于 $C'(\|G_{x\bar{x}}\|^2 + \|p_x\|^2 + \|q\|^2)$，因此有

$$C(\|G_{x\bar{x}}\|^2 + \|p_x\|^2 + \|q\|^2) \leqslant Q(t) \leqslant$$
$$C'(\|G_{x\bar{x}}\|^2 + \|p_x\|^2 + \|q\|^2) \qquad (4.2.76)$$

这就意味着 $Q(t)^{\frac{1}{2}}$ 为 $\|\cdot\|_{\Sigma_1}$ 的等价模。由 $Q(t)$ 的平方形式，可构造它的双线性形式。

$$q(\xi_1, \xi_2) = \lambda^2 \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} G_{1x\bar{x}j} G_{2x\bar{x}j} h -$$
$$\lambda^2 \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} p_{1j} E_j \overline{G}_{2x\bar{x}j} h - \lambda^2 \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} p_{2j} E_j \overline{G}_{1x\bar{x}j} h -$$
$$\lambda^2 \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} n_j G_{1j} \overline{G}_{2x\bar{x}j} h - \lambda^2 \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} n_j G_{2j} \overline{G}_{1x\bar{x}j} h +$$
$$\frac{\nu}{2}\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} G_{1j}\overline{G}_{2j} h + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} q_{1j} q_{2j} h +$$
$$\frac{\lambda^2}{2}\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} p_{1j} p_{2j} h + \frac{\mu}{2}\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} p_{1j} p_{2j} h$$

考虑在 Σ_1 中 J 个线性无关的元素 $V_0^1, \cdots, V_0^J$，研究 Gramm 行列式

$$\|V^1(t) \wedge \cdots \wedge V^J(t)\|_{\Sigma_1}^2 = \det_{1 \leqslant i,j \leqslant J}(V^i(t), V^j(t))_{\Sigma_1}$$

随时间的发展。其中

$$V^i(t) = DS(t)(m_0,n_0,E_0)V_0^i$$

我们要证明这个行列式当 $t\to\infty$ 是指数衰减的。为此，令

$$(p,q,G) = e^{\sigma t}V(t) = e^{\sigma t}(V,u,F)$$

则

$$(V^i,V^j) = e^{-2\sigma t}(w^i,w^j)$$

$$\det_{1\leqslant i,j\leqslant J}(V^i,V^j) = e^{-2\sigma Jt}\det_{1\leqslant i,j\leqslant J}(w^i,w^j)$$

令

$$G_J(t) = \det_{1\leqslant i,j\leqslant J}(w^i,w^j),$$

$$H_J(t) = \det_{1\leqslant i,j\leqslant J} q(t,w^i(t),w^j(t))$$

由式(4.2.76)，有

$$C^J G_J(t) \leqslant H_J(t) \leqslant (C')^J G_J(t) \qquad (4.2.77)$$

为估计 $G_J(t)$，只需先估计 $H_J(t)$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_J(t) = \sum_{l=1}^{J}\det q(t,w^i,w^j)_l$$

其中

$$q(t,w^i,w^j)_l = (1-\delta_{ij})q(t,w^i,w^j) + \delta_{ij}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q(t,w^i,w^j)$$

δ_{ij} 为 Kronecker 符号。进一步有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q(t,w^i,w^j) = \frac{1}{4}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q(t,w^i+w^j) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q(t,w^i-w^j)$$

另一方面，由于式(4.2.72)，有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q(t)=R(t)$，

$$R(t) = A - 2\lambda^2(\gamma-\sigma)\|G_{xx}\|^2 - \nu(\gamma-\sigma)\|G\|^2 -$$

$$\left(\frac{\varepsilon}{2}-\sigma\right)(\lambda^2\|p_x\|^2 + \|q\|^2) + \mu(\gamma-\sigma)\|p\|^2$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q(t,w^i,w^j) = \frac{R(t,w^i+w^j) - R(t,w^i-w^j)}{4} =$$

$$\rho(t,w^j,w^j)$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}H_J(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{J}(1-\delta_{ij})q(t,w^i,w^j)+\delta_{ij}\rho(t,w^i,w^j)$$

(4.2.78)

按照 Ghidaglia 在文献[13]中的结果(线性代数中的一个引理),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_J(t)=H_J(t)\sum_{l=1}^{J}\max_{\substack{F\subset\mathbf{R}^J\\ \dim F=l}}\min_{\substack{x\in F\\ x\neq 0}}\frac{R(t,\sum_{j=1}^{J}x_jw^j(t))}{Q(t,\sum_{j=1}^{J}x_jw^j(t))}$$

(4.2.79)

这里

$$Q(t,\sum_{j=1}^{J}x_jw^j(t))=Q(t,\sum_{j=1}^{J}x_jDS(t)w_0^j)=Q(t,DS(t)w_0),$$

$$w_0=\sum_{j=1}^{J}x_jw_0^j$$

依式(4.2.75)有

$$R(t,q,p,G)\leqslant C_2(\|p\|^2+\|G_x\|^2)$$

注意到 $\|p\|^2+\|G_x\|^2$ 可用 $(K(q,p,G),(q,p,G))_{\sum_1}$ 表示,其中

$$K(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(0,(-\Delta)^{-1}\xi_2,(-\Delta)^{-1}\xi_3),$$

$$-\Delta y=-\frac{y_{j+1}-2y_j+y_{j-1}}{h^2}=\xi,$$

$$\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\sum\nolimits_1,\ y=(-\Delta)^{-1}\xi,$$

K 为对称紧算子。由式(4.2.76),式(4.2.79)可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_J\leqslant H_J(t)\times$$

$$\sum_{l=1}^{J} \max_{\substack{F\subset \mathbf{R}^J \\ \dim F=l}} \min_{\substack{\xi\in F \\ \xi\neq 0}} \frac{C_2(K(\sum x_j w^j), \sum x_j w^j)_{\Sigma_1}}{C\| \sum x_j w^j \|_{\Sigma_1}^2}$$

进一步

$$\min_{\substack{x\in F \\ x\neq 0}} \frac{(K(\sum x_j w^j), \sum x_j w^j)_{\Sigma_1}}{\| \sum x_j w^j \|_{\Sigma_1}^2} \leqslant$$

$$\max_{\substack{F_1\subset \Sigma_1 \\ \dim F_1=l}} \min_{\substack{x\in F_1 \\ x\neq 0}} \frac{(K(\xi),\xi)_{\Sigma_1}}{\| \xi \|_{\Sigma_1}^2}$$

它是算子 K 的第 l 个特征值。用 w_l 表示，依 K 的定义，$w_l=(A_l)^{-1}$，其中 λ_l 为离散 Laplace 算子的第 l 个特征值。因此式(4.2.79)可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_J \leqslant \frac{C_2}{C}(\sum_{l=1}^{J}\lambda_l^{-1})H_J(t)$$

令 $S_J=\sum_{l=1}^{J}\lambda_l^{-1}$，由 Gronwall 引理得

$$H_J(t) \leqslant H_J(0)\exp\ (\frac{C_2}{C}S_J t)$$

从式(4.2.77)

$$G_j(t) \leqslant \frac{H_J(0)}{C^J}\exp(\frac{C_2}{C}S_J t),$$

$$G_j(t) \leqslant (\frac{C'}{C})^J G_j(0)\exp\ (\frac{C_2}{C}S_J t)$$

最后，由 G_m 的定义有

$$\det_{1\leqslant i,j\leqslant J}(V^i,V^j)_{\Sigma_1} \leqslant (\frac{C'}{C})^J G_m(0)\exp\ (\frac{C_2}{C}S_J - 2\sigma J)t \tag{4.2.80}$$

引理 4.2.7[203]　0 是 $-\Delta=A$ 的简单特征值。

$$\lambda_k = J^2\sin\frac{k\pi}{J}(k=1,2,\cdots,[\frac{J}{2}]) \tag{4.2.81}$$

为 A 的双特征值。其中$[\frac{J}{2}]$表示最大整数 l, $l<\frac{J}{2}$,且

$$A = J^2\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{J\times J}$$

因 $\sin x \geqslant \frac{2x}{\pi}, x\in(0,\frac{\pi}{2})$,我们有

$$\sum_{l=1}^{J}\lambda_l^{-1} \leqslant 3 + 2\sum_{l=1}^{J}\frac{1}{J^2\sin^2(\frac{l\pi}{J})} \leqslant$$

$$3 + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^2} = \text{const} = s$$

定理 4.2.7 对任何 $U_0(m_0,n_0,E_0)\in\mathscr{A}_J, m\geqslant 1, t\geqslant 0$,有

$$\| DS(t)(U_0)V_0^1 \wedge \cdots \wedge DS(t)(U_0)V_0^J \|_{\Sigma_J}^2 \leqslant$$

$$\| V_0^1 \wedge \cdots \wedge V_0^J \|_{\Sigma_1}^2 (\frac{C'}{C})^J \exp (\frac{C_2}{C}s - 2\sigma J)t, \forall V_0^i \in \Sigma_1$$

这里实际上已证明 Constatin 等在文献[204]中定理 3.1 的假设成立,因而吸引子 $\mathscr{A}_J$ 具有有限维数。事实上,令

$$L = Ds(nt_0)(m_0,n_0,E_0),$$

$$U_0 = (m_0,n_0,E_0), V^i(t) = Ds(nt_0)U_0V^i$$

如定义

$$w_J(L(U_0)) = \sup_{\substack{(\xi)_{j=1}^{J} \\ \det(\xi^i,\xi^j)\leqslant 1}} (\det(L\xi^i,L\xi^j))^{\frac{1}{2}}$$

则从定理 4.2.7,可得

$$w_J(L(U_0)) = (\frac{C'}{C})^{J/2}\exp(\frac{C_2}{C}s - 2\sigma J)\frac{nt_0}{2}$$

因此，如选取 J 充分大，使得 $J\sigma>\frac{C_0 s}{2C}$，则有 $\omega_J(L(U_0))\leqslant 1$。即证明了

$$d_H(\mathscr{A}_J)\leqslant J+1$$

因此，它的维数是有限的。于是有

定理 4.2.8 离散耗散 Zakharov 方程组(4.2.12)～(4.2.20)整体吸引子 $\mathscr{A}_J$ 具有有限的 Hausdorff 维数和 fractal 维数。

4.3 时间离散化的惯性流形

1991 年 Demengel F 和 Ghidaglia J M 在文献[154]中考虑了一类非线性发展方程对时间离散化后惯性流形的存在性，收敛性。

设 H 为无限维实可分 Hilbert 空间，具有模 $|\cdot|$ 和内积 $(\cdot,\cdot)$。具线性闭的无界正定自共轭算子 A 定义在 H 上，$D(A)\subset H$，A^{-1} 为 H 上的紧算子。因此存在由 A 的特征函数 $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ 组成 H 的完备正交基，

$$Aw_j=\lambda_j w_j,\ j=1,2,\cdots$$

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_j\to\infty,\ j\to\infty \tag{4.3.1}$$

令 $\sigma(A)=\{\Lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$，$\Lambda_1<\Lambda_2<\cdots$ 表示不同的特征值，Λ_k 为具有重数 m_k 的特征值。谱投影算子 R_Λ 和 P_Λ 定义如下：

$$R_\Lambda v=\sum_{j:\lambda_j=\Lambda}(v,w_j)w_j,\ P_\Lambda=\sum_{\lambda\leqslant\Lambda}R_\lambda \tag{4.3.2}$$

给定 $f:C\to C$，算子 $f(A)$ 定义为

$$f(A)=\sum_{\Lambda}f(\Lambda)R_\Lambda v,$$

$$D(f(A))=\{v,\sum_{\Lambda}|f(\Lambda)|^2|R_\Lambda v|^2<\infty\}$$

给定 C 为线性有界的反对称算子：$D(A^{s_0})\to H$，$s_0\in\mathbf{R}_+^1$。设 $C\in\mathscr{L}(D(A^{\alpha+s_0}),D(A^{\alpha}))$，$\alpha\in\mathbf{R}$，$C$ 和 A 是可交换的：

$$AC=CA \tag{4.3.3}$$

$C_A=R_AC: R_AH\to R_AH$。考虑如下微分方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au+Cu+F(u)=0, \tag{4.3.4}$$

$$u(0)=u_0 \tag{4.3.5}$$

其中非线性函数 $F(u)$为 Lipschitz 函数：$D(A^{\alpha})\to D(A^{\alpha-\gamma})$，$\alpha\in\mathbf{R}$，$\gamma\in[0,t]$，

$$|A^{-\gamma}(F(v)-F(w))|_{\alpha}\leqslant L_F|v-w|_{\alpha},\forall\ v,w\in D(A^{\alpha}) \tag{4.3.6}$$

记$(v,w)_{\alpha}=(A^{\alpha}v,A^{\alpha}w)$，$|v|_{\alpha}=|A^{\alpha}v|$，且 L_F 还满足

$$|A^{-\gamma}F(v)|_{\alpha}\leqslant L_F(1+|v|_{\alpha}),\forall\ v\in D(A^{\alpha}) \tag{4.3.7}$$

式(4.3.4)的惯性流形是指：它是有限维 Lipschitz 流形 $M\subset D(A^{\alpha})$，并具有以下性质：它是式(4.3.4)的正不变流形，且指数吸引一切它的解，即

$$u_0\in M\Rightarrow u(t)\in M,\forall\ t\geqslant 0 \tag{4.3.8}$$

$$\forall\ R>0,\exists\ \sigma>0,C\geqslant 0,\text{使得}\ \forall\ t\geqslant 0,u_0\in D(A^{\alpha})$$

$$\text{且}\ |u_0|_{\alpha}\leqslant R,d_{\alpha}(u(t),M)=\inf_{m\in M}|u(t)-m|_{\alpha}\leqslant Ce^{-\sigma t} \tag{4.3.9}$$

由于式(4.3.6)，可证 $u_0\in D(A^{\alpha})$，则 Cauchy 问题(4.3.4)、(4.3.5)具有整体唯一解

$$u\in\mathscr{L}((0,\infty);D(A^{\alpha})\cap L^2(0,T;D(A^{\alpha+\frac{1}{2}})),\qquad\forall T>0 \tag{4.3.10}$$

如 $u_0\in D(A^{\alpha+\frac{1}{2}})$，则有更光滑的解

$$u\in\mathscr{L}([0,\infty);D(A^{\alpha+\frac{1}{2}})\cap L^2(0,T;D(A^{\alpha+1})),\qquad\forall T>0 \tag{4.3.11}$$

用 $S(t)$表示时间 t 在 $D(A^{\alpha})$或 $D(A^{\alpha+\frac{1}{2}})$的映照，

$$S(t)u_0=u(t),\ t\geqslant 0 \tag{4.3.12}$$

这些映照在 $D(A^{\alpha})$和 $D(A^{\alpha}+\frac{1}{2})$上为 Lipschitz 连续的，由式

(4.3.4)可知它是自治的，因而$\{S(t),t\geqslant 0\}$形成一个半群

$$S(0)=I, S(t_1+t_2)=S(t_1)S(t_2) \qquad (4.3.13)$$

现考虑离散惯性流形的构造。先设$C=0$。给定$u^0\in D(A^\alpha)$，$\tau>0$，构造序列$\{u^n, n\in\mathbf{N}\}\subset D(A^\alpha)$：

$$(u^{n+1}-u^n)/\tau+Au^{n+1}+F(u^n)=0, n\geqslant 0 \quad (4.3.14)$$

因算子$(I+\tau A)$是一个同构：$D(A^{\alpha+1})\to D(A^\alpha)$，置

$$R(\tau)=(I+\tau A)^{-1} \qquad (4.3.15)$$

再写式(4.3.14)为

$$u^{n+1}=R(\tau)(u^n-\tau F(u^n)), \qquad \forall n\geqslant 0 \qquad (4.3.16)$$

我们的目的在于寻找一个函数$\phi_\tau: PH\to QD(A^\alpha)$使得$M_\tau=M_{\phi_\tau}$为式(4.3.14)的惯性流形。映照$S^\tau$定义在$D(A^\alpha)$上

$$S^\tau v=R(\tau)(v-\tau F(v)), \qquad \forall v\in D(A^\alpha) \quad (4.3.17)$$

是 Lipschitz 连续的。

定义 4.3.1 式(4.3.14)的惯性流形是一个有限维的 Lipschitz 流形$M\subset D(A^\alpha)$，满足

$$S^\tau M\subset M \qquad (4.3.18)$$

$\forall R>0, \exists \sigma>0, C\geqslant 0$，使得：

$$d_\alpha((S^\tau)^n u^0, M)=d_\alpha(u^n, M)\leqslant Ce^{-\sigma n\tau}, \quad \forall u\geqslant 0, |u|_\alpha\leqslant R \qquad (4.3.19)$$

在离散情况，M也被认为是 Lipschitz 函数ϕ的图，使无限维循环公式(4.3.14)变为在$M=M_\phi$上的有限维迭代：

$$(p^{n+1}-p^n)/\tau+Ap^{n+1}+PF(p^n+\phi(p^n))=0 \qquad (4.3.20)$$

这也写为

$$p^{n+1}=S_\phi^\tau p^n, \ n\geqslant 0 \qquad (4.3.21)$$

其中S_ϕ^τ为在PH上定义的

$$S_\phi^\tau p=R(\tau)(p-\tau PF(p+\phi(p))) \qquad (4.3.22)$$

Lipschitz 连续映照。取$\phi\in\mathscr{F}_l$，即设ϕ为$l-\mathrm{lip}$，从式(4.3.22)可

知，S_ϕ^τ 对于小的 τ 是可逆的。实际上有以下结果：

引理 4.3.1 设 $\phi\in\mathscr{F}_l$，且

$$0<\tau<L_F^{-1}(1+l)^{-1}\Lambda_N^{-\gamma} \tag{4.3.23}$$

则映照 S_ϕ^τ 是 PH 的一个同胚，且 S_ϕ^τ 和 $(S_\phi^\tau)^{-1}PH$ 在上是 Lip 的。当式(4.3.23)成立时，从引理 4.3.1 可知，对于 $M=M_\phi$，式(4.3.18)等价于

$$(S^\tau)^n M=M,\quad \forall n\in\mathbf{Z} \tag{4.3.24}$$

和

$$(S_\phi^\tau)^n(m+\phi(m))=(S_\phi^\tau)^n+\phi((S_\phi^\tau)^n m),\quad \forall n\in\mathbf{Z},\forall m\in M_\phi \tag{4.3.25}$$

取 $u^0=p^0+\phi(p^0)\in M$，投影式(4.3.14)于 PH 和 QH 上，置 $p^n=(S_\phi^\tau)^n p^0$，$q^n=\phi(p^n)$，有

$$p^{n+1}=R(\tau)(p^n-\tau PF(p^n+\phi(p^n))),\ n\in\mathbf{Z} \tag{4.3.26}$$

$$q^{n+1}=R(\tau)(q^n-\tau QF(p^n+\phi(p^n))),\ n\in\mathbf{Z} \tag{4.3.27}$$

从式(4.3.27)可知，当 $m\leqslant n$ 时

$$q^n=R(\tau)^{n-m}q^m-\tau\sum_{k=m+1}^{n}R(\tau)^{n+1-k}QF(p^{k-1}+\phi(p^{k-1})) \tag{4.3.28}$$

我们假定 $\Lambda-\lambda$ 充分大，τ 充分小，此时式(4.3.28)右端第一项当 $m\to-\infty$ 时趋于零，导致

$$q^n=-\tau\sum_{k=-\infty}^{n}R(\tau)^{n+1-k}QF(p^{k-1}+\phi(p^{k-1})),\quad \forall n\in\mathbf{Z} \tag{4.3.29}$$

由 $q^0=\phi(p^0)$，有

$$\phi(p^0)=-\tau\sum_{k=1}^{\infty}R(\tau)^k QF((S_\phi^\tau)^{-k}p^0+\phi(S_\phi^\tau)^{-k}p^0) \tag{4.3.30}$$

当 τ 满足式(4.3.23)时，在 $\mathscr{F}_l$ 上定义映照 $\mathscr{F}_\tau$

$$(\mathscr{F}_\tau\phi)(p^0)=-\tau\sum_{k=1}^{\infty}R(\tau)^k QF((S_\phi^\tau)^{-k}p^0+\phi((S_\phi^\tau)^{-k}p^0)) \tag{4.3.31}$$

于是式(4.3.30)也认为是 $\phi=\mathscr{F}_\tau\phi$，即证明 ϕ 为 $\mathscr{F}_\tau$ 的不动点。

定理 4.3.1　设 $N\geqslant 1$，使得

$$\Lambda_{N+1}\geqslant 3L_F^2\Lambda_1^{2\gamma-1}/2$$

$$\Lambda_{N+1}-\Lambda_N\geqslant 30L_F(\Lambda_N^\gamma+\Lambda_{N+1}^\gamma)$$

则对任何 $\tau>0,\tau\Lambda_{N+1}\leqslant 1$，在 $D(A^\alpha)$ 上，离散无限维动力系统

$$(u^{n+1}-u^n)/\tau+Au^{n+1}+F(u^n)=0,\ n\geqslant 0$$

具有一个惯性流形 M_τ，它是 Lip 映照：$P_NH\to Q_ND(A^\alpha)$ 的图，而且存在两个常数 C_0 和 $\sigma>0$，使得

$$d_\alpha(u^n,M_\tau)\leqslant C_0e^{-\sigma n}d_\alpha(u^0,M_\tau),\quad \forall u^0\in D(A^\alpha)$$

为证明定理 4.3.1，我们还要作一些准备。

命题 4.3.1　设 N 满足

$$\Lambda_{N+1}-\Lambda_N\geqslant 6L_F(\Lambda_N^\gamma(1+l)+\Lambda_{N+1}^\gamma(1+l^{-1}))\tag{4.3.32}$$

则对任何 $\tau>0$，使得

$$\tau\Lambda_{N+1}\leqslant 1\tag{4.3.33}$$

映照 $\mathscr{F}_\tau:\mathscr{F}_l\to\mathscr{F}_l$，且

$$\|\mathscr{F}_\tau\phi_1-\mathscr{F}_\tau\phi_2\|\leqslant\kappa\|\phi_1-\phi_2\|_\alpha,\quad\forall\phi_i\in\mathscr{F}_l\tag{4.3.34}$$

其中 $\kappa=l(2+(1+l)^{-1})$

取 $l=\dfrac{1}{4}$ 可得如下推论

推论 4.3.1　设 N 满足

$$\Lambda_{N+1}-\Lambda_N\geqslant 10L_F(\Lambda_N^\gamma+\Lambda_{N+1}^\gamma)$$

则对任何 $\tau>0$ 满足式(4.3.33)，映照 $\mathscr{F}_\tau$ 是严格压缩的：$\mathscr{F}_{1/4}\to\mathscr{F}_{1/4}$。在证明命题 4.3.1 之前，我们必须估计式(4.3.26)。

引理 4.3.2　设式(4.3.33)成立。令

$$\eta=(1+\tau\Lambda_N)(1-\tau\Lambda_N^\gamma L_F(1+l))^{-1},$$

$$\beta=\tau^\gamma L_F(1+l)(1-\tau^\gamma L_F(1+l))^{-1}$$

则式(4.3.26)的解满足

$$|p^m|_\alpha \leqslant \eta^{-m}|p^0|_\alpha + \beta(\eta^{-m} - 1)/(\eta - 1), \quad \forall m \leqslant 0 \tag{4.3.35}$$

证明 这里及今后,记 $\lambda = \Lambda_N, \Lambda = \Lambda_{N+1}, P = P_N, Q = I - P_N = Q_N$。改写式(4.3.26)为

$$R(\tau)^{-1}p^{n+1} = p^n - \tau PF(p^n + \phi(p^n))$$

这个等式和 p^n 在 $D(A^\alpha)$上作内积得

$$|p^n|_\alpha^2 \leqslant \tau(PF(p^n + \phi(p^n)), p^n)_\alpha + (1 + \tau\lambda)|p^n|_\alpha|p^{n+1}|_\alpha \tag{4.3.36}$$

由式(4.3.6)、(4.3.7),对 $\phi \in \mathscr{F}_l$,有

$$|A^{-\gamma}F(p^n + \phi(p^n))|_\alpha \leqslant L_F(1 + l)(1 + |p^n|_\alpha)$$

因此

$$|PF(p^n + \phi(p^n), p^n)_\alpha| \leqslant \lambda^\gamma L_F(1 + l)(1 + |p^n|_\alpha)|p^n|_\alpha$$

连同式(4.3.36)即得

$$|p^n|_\alpha \leqslant \eta|p^{n+1}|_\alpha + \beta$$

其中 η, β 即为引理中所述。因此由归纳法对 $m \leqslant 0$ 即得式(4.3.35)。为了得到惯性流形的必要形式,我们在式(4.3.28)中设 $m \to -\infty$ 时 $R(\tau)^{n-m}q^m \to 0$,这其实是式(4.3.32)和式(4.3.35)的推论。事实上,对 $\phi \in \mathscr{F}_l$,则存在常数 C,使得 $|q^m|_\alpha \overset{\text{def}}{=} |\phi(p^m)| \leqslant C\eta^{-m}$。另一方面,$|R(\tau)^{n-m}q|_\alpha \leqslant (1 + \tau\Lambda)^{m-n}|q|_\alpha, q \in QD(A^\alpha)$。因此

$$|R(\tau)^{n-m}q^m|_\alpha \leqslant C(1 + \tau\Lambda)^m((1 + 2\Lambda)/\eta)^m \tag{4.3.37}$$

注意到

$$\tau\Lambda \leqslant 1, \Lambda - \lambda \geqslant \tau\lambda^\gamma L_F(1 + l) \Rightarrow 1 + \tau\Lambda > \eta \tag{4.3.38}$$

这就推出了我们的结论。现证明命题 4.3.1。取 $\phi \in \mathscr{F}_l$,设式(4.3.32)成立

$$\Lambda - \lambda \geqslant 6L_F(1 + l)\lambda^\gamma + (1 + l^{-1})\Lambda^\gamma \tag{4.3.39}$$

由此推出 $\Lambda > \tau(1+l)L_F\lambda^{\gamma}$。再由式(4.3.33)、可知式(4.3.35)成立。这就可依式(4.3.31)定义 $\mathscr{T}_{\tau}$。因为式(4.3.38)是满足的，此时方便改写式(4.3.31)为

$$(\mathscr{T}_{\tau}\phi)(p^0) = -\tau\sum_{k=1}^{\infty} R(\tau)^k Q G_{\phi}(p^{-k}) \tag{4.3.40}$$

其中

$$p^{-k} = (S_{\phi}^{\tau})^{-k}p^0, G_{\phi}(p) \stackrel{\text{def}}{=} F(p+\phi(p)) \tag{4.3.41}$$

为了证明命题 4.3.1，我们必须证明：

(i) $\mathscr{T}_{\tau}$ 映照 $\mathscr{T}_{l}$ 为它自己；

(ii) $\mathscr{T}_{\tau}$ 满足式(4.3.34)。

为此，考虑表达式 $\mathscr{T}_{\tau}\phi^1 - \mathscr{T}_{\tau}\phi^2$ 和 $(\mathscr{T}_{\tau}\phi)p_1^0 - (\mathscr{T}_{\tau}\phi)p_2^0$。注意到式(4.3.40)，必须估计

$$(\delta p)_k \stackrel{\text{def}}{=} (S_{\phi_1}^{\tau})p_1^0 - (S_{\phi_2}^{\tau})p_2^0, k \leqslant 0 \tag{4.3.42}$$

引理 4.3.3 如同引理 4.3.2 的假设，在式(4.3.42)中定义的 $(\delta p)_n$ 可估计如下：

$$\begin{aligned}|(\delta p)_n|_{\alpha} \leqslant & \eta^{-n}|p_1^0 - p_2^0|_{\alpha} \\ & - n\eta^{-n}(1+l)^{-1}\|\phi_1 - \phi_2\|_{\alpha}(1+|p_1^0|_{\alpha}),\end{aligned}$$

$$\forall n \leqslant 0 \tag{4.3.43}$$

我们容后一点去证明这个引理。取 $\phi \in \mathscr{T}_{l}, p_1^0, p_2^0 \in H$ 依式(4.3.40)

$$(\mathscr{T}_{\tau}\phi)(p_1^0) - (\mathscr{T}_{\tau}\phi)(p_2^0) =$$

$$-\tau\sum_{k=1}^{\infty} R(\tau)^k Q(G_{\phi}(p_1^{-k}) - G_{\phi}(p_2^{-k})),$$

利用式(4.3.6)和式(4.3.43)有

$$|(\mathscr{T}_{\tau}\phi)(p_1^0) - (\mathscr{T}_{\tau}\phi)(p_2^0)| \leqslant$$

$$\tau L_F(1+l)|p_1^0 - p_2^0|\sum_{k=1}^{\infty}\eta^k|A^{\gamma}R(\tau)^k Q|_{\mathscr{L}(D(A^{\alpha}))} \tag{4.3.44}$$

算子 $A^\gamma R(\tau)^k Q$ 在 $\mathscr{L}(D(A^\alpha))$ 中的模是有界的：

$$|A^\gamma R(\tau)^k Q|_{\mathscr{L}(D(A^\alpha))} \leqslant (\Lambda^\gamma + \tau^{-\gamma}k^{-\gamma})(1+\tau\Lambda)^{-k} \tag{4.3.45}$$

这是从不等式

$$\xi^\gamma(1+\tau\xi)^{-k} \leqslant (\Lambda^\gamma + \tau^{-\gamma}k^{-\gamma})(1+\tau\Lambda)^{-k},$$

$$\xi \geqslant \Lambda, k \geqslant 1, \gamma \in [0, \frac{1}{2}], \tau > 0$$

得到的。式(4.3.44)、(4.3.45)表明

$$|(\mathscr{T}_\tau\phi)(p_1^0) - (\mathscr{T}_\tau\phi)(p_2^0)|_\alpha \leqslant \omega|p_1^0 - p_2^0|_\alpha \tag{4.3.46}$$

其中

$$\omega = \tau L_F(1+l)\sum_{k=1}^{\infty}(\Lambda^\gamma + \tau^{-\gamma}k^{-\gamma})\eta^k(1+\tau\Lambda)^{-k} \tag{4.3.47}$$

我们现在的目的在于证明

$$\{\text{不等式}(4.3.39)\text{和}\ \tau\Lambda \leqslant 1\} \Rightarrow \omega \leqslant l \tag{4.3.48}$$

置 $r=\eta(1+\tau\Lambda)^{-1}$。要求 $r<1$，由引理 4.3.2 可知它等价于

$$1+\tau\lambda < (1+\tau\Lambda)(1-\tau L_F(1+l)\lambda^\gamma)$$

由式(4.3.33)和式(4.3.39)可知，上式是成立的。回到式(4.3.47)有

$$\omega \leqslant \tau L_F(1+l)\{\frac{2\Lambda^\gamma}{1-r} + \tau^{-\gamma}\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\gamma}r^k\} \tag{4.3.49}$$

上式中的无穷求和是有界的，

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\gamma}r^k \leqslant \int_0^\infty x^{-\gamma}r^x\mathrm{d}x = |\ln r|^{\gamma-1}$$

$$\int_0^\infty x^{-\gamma}\mathrm{e}^{-x}dx \leqslant 2|\ln r|^{\gamma-1}$$

于是

$$\omega \leqslant \tau L_F(1+l)\{\Lambda^\gamma \frac{r}{1-r} + 2\tau^{-\gamma}|\ln r|^{\gamma-1}\}$$

因 $|\ln r| \geqslant 1-r$，有

$$w \leqslant \tau L_F(1+l)\{\Lambda^\gamma \frac{r}{1-r} + 2\tau^{-\gamma}(1-r)^{\gamma-1}\}$$

由$1-r\leqslant 2\Lambda$，推出 $w\leqslant 3\tau L_F(1+l)\Lambda^\gamma(1-r)$。再用 r 的值代入可得

$$w \leqslant \frac{3L_F(1+l)\Lambda^\gamma(1+\tau\Lambda)}{\Lambda-\lambda-\lambda^\gamma L_F(1+l)(1+\tau\Lambda)}$$

由此得到式(4.3.48)。由式(4.3.46)，$\mathrm{Lip}_\alpha(\mathscr{T}_\tau(\phi))\leqslant l$。为了证明 $\mathscr{T}_\tau\phi\in\mathscr{T}_l$，余下来是验证 $|(\mathscr{T}_\tau\phi)(p^0)|_\alpha\leqslant l(1+|p^0|_\alpha)$，$\forall\ p^0\in PH$。由式(4.3.7)和式(4.3.40)有

$$|(\mathscr{T}_\tau\phi)(p^0)|_\alpha \leqslant$$

$$\tau(1+l)L_F\sum_{k=1}^{\infty}|A^\gamma R(\tau)^\gamma Q|_{\mathscr{L}(D(A^\alpha))}(1+|p^{-k}|_\alpha) \tag{4.3.50}$$

由式(4.3.35)有

$$1+|p^{-k}|_\alpha\leqslant \eta^k(1+|p^0|_\alpha),\ \forall\ k\geqslant 0 \tag{4.3.51}$$

再由式(4.3.50)和式(4.3.47)有$|(\mathscr{T}_\tau\phi)(p^0)|_\alpha\leqslant w(1+|p^0|_\alpha)$式(4.3.51)。推出 $\mathscr{T}_\tau\phi\in\mathscr{T}_l$。现证命题4.3.1中的不等式(4.3.34)。取 $p_1^0=p_2^0=p^0\in PH$。依式(4.3.40)有

$$\mathscr{T}_\tau(\phi_1)(p^0)-\mathscr{T}_\tau(\phi_2)(p^0)=$$

$$-\tau\sum_{k=1}^{\infty}R(\tau)^kQ(G_{\phi_1}(p_1^{-k})-G_{\phi_2}(p_2^{-k})) \tag{4.3.52}$$

记

$$G_{\phi_1}(p_1)-G_{\phi_2}(p_2)=G_{\phi_1}(p_1)-G_{\phi_1}(p_2)+G_{\phi_1}(p_2)-G_{\phi_2}(p_2)$$

可以估计

$$|A^{-\gamma}(G_{\phi_1}(p_1)-G_{\phi_2}(p_2))|_\alpha\leqslant$$

$$L_F\{(1+l)|p_1-p_2|_\alpha+\|\phi_1-\phi_2\|_\alpha(1+|p_2|_\alpha)\} \tag{4.3.53}$$

由式(4.3.43)和式(4.3.46)，取 $p_1^0=p_2^0=p^0$，有

$$|A^{-\gamma}(G_{\phi_1}(p_1^{-k})-G_{\phi_2}(p_2^{-k}))|_\alpha\leqslant$$

$$L_F(1+k\beta)\eta^k\|\phi_1-\phi_2\|_\alpha(1+|p^0|_\alpha)$$

由式(4.3.52)和式(4.3.45)连同上式估计可得

$$\|\mathscr{H}_\tau\phi_1 - \mathscr{H}_\tau\phi_2\|_\alpha \leqslant \bar{w}\ \|\phi_1 - \phi_2\|_\alpha$$

$$\bar{w} = \tau L_F \sum_{k=1}^{\infty}(\Lambda^\gamma + \tau^{-\gamma}k^{-\gamma})(1 + \tau\Lambda)^{-k}\eta^k(1 + k\beta) \tag{4.3.54}$$

和式(4.3.47)比较有

$$\bar{w} = w(1 + l)^{-1} + \tau L_F\beta\sum_{k=1}^{\infty}k(\Lambda^\gamma + \tau^{-1}k^{-\gamma})r^k \tag{4.3.55}$$

其中 $r=\eta(1+\tau\Lambda)^{-1}$。用式(4.3.48)和 $\sum_{k=1}^{\infty}kr^k=r(1-r^2)^{-1}$ 可得

$$\bar{w} \leqslant l(1 + l)^{-1} + \tau L_F\beta(r\Lambda^\gamma(1 - r^2)^{-1} + \tau^{-\alpha}I)$$

其中

$$I = \sum_{k=1}^{\infty}k^{-(1-\gamma)}r^k \leqslant \int_0^{\infty}x^{-(1-\gamma)}r^x dx \leqslant |\ln r|^{\gamma-2} \leqslant (1 - r)^{\gamma-2}$$

利用 $\tau\Lambda\leqslant 1$，有

$$\bar{w} \leqslant l(1 + l)^{-1} + \tau L_F\beta\eta^{-1}\Lambda^\gamma(r(1 - r^2))^{-1} + (1 - r)^{-2})$$

由 $\beta\eta^{-1}\leqslant 1$，$\tau\Lambda\leqslant 1$，以及

$$\frac{r}{1 + r} \leqslant \frac{1}{2},\ \tau L_F(1 + l)\Lambda^\gamma \leqslant \frac{l}{1 - r}$$

可知

$$\bar{w} \leqslant l(1 + l)^{-1} + 2l$$

这就证明了命题4.3.1。现来证明引理4.3.3。由式(4.3.26)、(4.3.31)有

$$R(\tau)^{-1}(\delta p)_{n-1} = (\delta p)_n + P(F(p_1^n + \phi_1(p_1^n)) - F(p_2^n + \phi_2(p_2^n)) \tag{4.3.56}$$

$$|P(F(p_1^n + \phi_1(p_1^n)) - F(p_2^n + \phi_2(p_2^n))|_\alpha \leqslant$$
$$\lambda^\gamma L_F(1 + l)(\delta p)_n|_\alpha + \|\phi_1 - \phi_2\|(1 + |p_1^n|_\alpha)$$

则由式(4.3.56)和$(\delta p)_n$作内积可得

$$|(\delta p)_n|_\alpha(1 - \tau\lambda^\gamma L_F(1 + l)) \leqslant$$

$$(1+\tau\lambda)\ |(\delta p)_{n-1}|_\alpha + \tau\lambda^\gamma L_F\|\phi_1-\phi_2\|_\alpha(1+|p_1^n|_\alpha)$$

由引理4.3.2

$$1+|p_1^n|_\alpha \leqslant \eta^{-n}(1+|p_1^0|_\alpha)+(\eta^{-n}-1)(\beta(\eta-1)^{-1}-1)$$

因 $\beta(\eta-1)^{-1}\leqslant 1$，可推出

$$|(\delta p)_n|_\alpha \leqslant \eta|(\delta p)_{n+1}|_\alpha +$$

$$\beta\eta^{-n}(1+l)^{-1}\|\phi_1-\phi_2\|_\alpha(1+|p_1^0|_\alpha)$$

由对 n 归纳法可得式(4.3.43)。

现考虑离散锥性质。设 $u_1^0,u_2^0\in D(A^\alpha)$，置 $w^n=u_1^n-u_2^n$，现估计 w^n，$n\geqslant 0$和 w^0，n 的关系。依式(4.3.14)，

$$R(\tau)^{-1}w^{n+1}=w^n-\tau(F(u_1^n)-F(u_2^n)) \quad (4.3.57)$$

作式(4.3.57)和 w^{n+1}的内积得

$$|w^{n+1}|_\alpha^2+\tau|A^{\frac{1}{2}}w^{n+1}|_\alpha^2\leqslant$$

$$|w^{n+1}|_\alpha|w^n|_\alpha+\tau L_F|A^\alpha w^{n+1}|_\alpha|w^n|_\alpha \quad (4.3.58)$$

由于

$$|A^\gamma w^{n+1}|_\alpha\leqslant \Lambda_1^{\gamma-\frac{1}{2}}|A^{\frac{1}{2}}w^{n+1}|_\alpha$$

于是

$$|w^{n+1}|_\alpha^2\leqslant |w^{n+1}|_\alpha|w^n|_\alpha+$$

$$\tau(L_F\Lambda_1^{\gamma-\frac{1}{2}}|w^n|_\alpha|A^{\frac{1}{2}}w^{n+1}|_\alpha-|A^{\frac{1}{2}}w^{n+1}|_\alpha^2),$$

$$|w^{n+1}|_\alpha^2\leqslant(1+\tau L_F^2\Lambda_1^{2\gamma-1}/2)|w^n|_\alpha^2,\quad \forall n\geqslant 0$$

其中我们用到了不等式 $x^2-L_F\Lambda_1^{\gamma-\frac{1}{2}}xy\geqslant -L_F^2\Lambda_1^{2\gamma-1}y^2/4$。由此即得

$$|u_1^n-u_2^n|_\alpha\leqslant(1+\tau L_F^2\Lambda_1^{2\gamma-1}/2)^{n/2}|u_1^0-u_2^0|_\alpha,\quad \forall n\geqslant 0$$

(4.3.59)

命题4.3.2 给定 $k>0$，设 N 满足

$$\Lambda_{N+1}-\Lambda_N\geqslant 4L_F(1+k^{-1})\Lambda_N^\gamma+(1+k)\Lambda_{N+1}^\gamma$$

(4.3.60)

则对 τ 满足式(4.3.33)，锥 $\mathscr{C}_k$

$$\mathscr{E}_k = \{v \in D(A^\alpha) : |Pv|_\alpha \geqslant k|Qv|_\alpha\}$$

其中 $P=P_N, Q=I-P_N$，在式(4.3.14)作用下是不变的，即如果

$$u_1^0 - u_2^0 \in \mathscr{E}_k, u_1^n - u_2^n \in \mathscr{E}_k, \quad \forall n \geqslant 0 \qquad (4.3.61)$$

进一步，有如下性质：或者

$$\exists\ k \geqslant 0, u_1^k - u_2^k \in \mathscr{E}_k \qquad (4.3.62)$$

或者

$$|u_1^n - u_2^n|_\alpha \leqslant (1 + 1/k)\rho^n |u_1^0 - u_2^0|_\alpha, \forall\ n \geqslant 0 \qquad (4.3.63)$$

$$\rho = (1 + \tau(1 + k)L_F\Lambda_{N+1}^\gamma)(1 + \tau\Lambda_{N+1})^{-1} < 1$$

证明 从式(4.3.61)开始，给定 $u_1^0, u_2^0 \in D(A^\alpha), u_1^0 - u_2^0 \in \mathscr{E}_k$，即 $|p^0|_\alpha \geqslant k|q^0|_\alpha$，其中 $p^0 = P(u_1^0 - u_2^0), q^0 = Q(u_1^0 - u_2^0)$。我们要证

$$|p^1|_\alpha \geqslant k|q^1|_\alpha \qquad (4.3.64)$$

其中 $p^1 = P(u_1^1 - u_2^1), q^1 = Q(u_1^1 - u_2^1)$，由式(4.3.14)有

$$R(\tau)^{-1}p^1 = p^0 - \tau P(F(u_1^0) - F(u_2^0))$$

作上式和 p^0 在 $D(A^\alpha)$ 的内积得

$$(1 + \tau\lambda)|p^1|_\alpha |p^0|_\alpha \geqslant |p^0|_\alpha^2 - \tau|A^{-\gamma}P(F(u_1^0) - F(u_2^0))|_\alpha |A^\gamma p^0|_\alpha$$

由式(4.3.6)有

$$(1 + \tau\lambda)|p^1|_\alpha |p^0|_\alpha \geqslant |p^0|_\alpha^2 - \tau L_F\lambda^\gamma |u_1^0 - u_2^0|_\alpha |p^0|_\alpha$$

因 $|p^0|_\alpha \geqslant k|q^0|_\alpha$ 推得

$$|p^0|_\alpha \leqslant \frac{1 + \tau\lambda}{1 - \tau L_F\left(1 + \frac{1}{k}\right)\lambda^\alpha}|p^1|_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \eta_k |A^\alpha p^1| \qquad (4.3.65)$$

注意到由式(4.3.33)和式(4.3.60)推出 $\eta_k \leqslant 4$，由式(4.3.33)有

$$R(\tau)q^1 = q^0 - \tau Q(F(u_1^0) - F(u_2^0))$$

上式和 q^1 在 $D(A^\alpha)$ 上作内积得

$$|q^1|_\alpha^2 + \tau|A^{\frac{1}{2}}q^1|_\alpha^2 \leqslant |q^0|_\alpha|q^1|_\alpha + \tau L_F|u_1^0 - u_2^0|_\alpha \Lambda^{\gamma-\frac{1}{2}}|A^{\frac{1}{2}}q^1|_\alpha$$

利用$|p^0|_\alpha \geqslant k|q^0|_\alpha$以及式(4.3.65)得

$$|q^1|_\alpha^2 + \tau|A^{\frac{1}{2}}q^1|_\alpha^2 \leqslant |q^0|_\alpha|q^1|_\alpha +$$

$$\tau L_F(1 + \frac{1}{k})\eta_k \Lambda^{\gamma-\frac{1}{2}}|A^{\frac{1}{2}}q^1|_\alpha|p^1|_\alpha \qquad (4.3.66)$$

由这个不等式可推出式(4.3.64)。事实上,如果不然,$|q^1|_\alpha \geqslant k^{-1}|p^1|_\alpha$,则

$$|A^{\frac{1}{2}}q^1|_\alpha \geqslant \Lambda^{\frac{1}{2}}|q^1|_\alpha \geqslant \Lambda^{\frac{1}{2}}k^{-1}$$

$$|p^1|_\alpha \geqslant L_F(1 + k^{-1})\eta_k \Lambda^{\gamma-\frac{1}{2}}|p^1|_\alpha/2$$

在式(4.3.66)中置换$|A^{\frac{1}{2}}q^1|_\alpha$为$\Lambda^{\frac{1}{2}}|q^1|_\alpha$得

$$(1 + \tau\Lambda)|q^1|_\alpha^2 \leqslant |q^0|_\alpha|q^1|_\alpha + \tau L_F(1 + k^{-1})\eta_k \Lambda^\gamma|q^1|_\alpha|p^1|_\alpha$$

由$k|q^0|_\alpha \leqslant |p^0|_\alpha \leqslant \eta_k|p^1|_\alpha$推出

$$(1 + \tau\Lambda)|q^1|_\alpha \leqslant (\eta_k k^{-1} + \tau L_F(1 + k^{-1})\eta_k \Lambda^\alpha)|p^1|_\alpha$$

因此由式(4.3.33)和式(4.3.60)推得式(4.3.64),式(4.3.61)得证。关于式(4.3.63),设$u_1^n - u_2^n \notin \mathscr{E}_k$, $\forall n \geqslant 0$,即

$$|p^n|_\alpha \leqslant k|q^n|_\alpha, p^n = P(u_1^n - u_2^n), q^n = Q(u_1^n - u_2^n), \forall n \geqslant 0 \qquad (4.3.67)$$

我们证明

$$|q^{n-1}|_\alpha \leqslant \rho|q^n|_\alpha, \ \forall n \geqslant 0 \qquad (4.3.68)$$

做式(4.3.14)和$-q^{n+1}$的内积得

$$|q^{n+1}|_\alpha^2 + |A^{\frac{1}{2}}q^{n+1}|_\alpha^2 \leqslant |q^n|_\alpha|q^{n+1}|_\alpha + \tau L_F|u_1^n - u_2^n|_\alpha|A^\gamma q^{n+1}|_\alpha,$$

$$|q^{n+1}|_\alpha^2 + |A^{\frac{1}{2}}q^{n+1}|_\alpha^2 \leqslant \qquad (4.3.69)$$

$$|q^n|_\alpha|q^{n+1}|_\alpha + \tau L_F(1 + k)\Lambda^{\gamma-\frac{1}{2}}|q^n|_\alpha|q^{n+1}|_\alpha$$

如果式(4.3.66)不成立,则

$$|A^{\frac{1}{2}}q^{n+1}|_\alpha \geqslant \Lambda^{\frac{1}{2}}|q^{n+1}|_\alpha \geqslant \rho\Lambda^{\frac{1}{2}}|q^n|_\alpha \geqslant L_F(1 + k)\Lambda^{\alpha-\frac{1}{2}}|q^n|_\alpha/2$$

在式(4.3.69)中置换$|A^{\frac{1}{2}}q^{n+1}|_\alpha$为$\Lambda^{\frac{1}{2}}|q^{n-1}|_\alpha$,可得

$$(1+\tau\Lambda)|q^{n-1}|_\alpha \leqslant |q^n|_\alpha(1+\tau L_F(1+k)\Lambda^\alpha)$$

此即式(4.3.68)。

现证明定理4.3.1 由 N 在定理中的假设可推出

$$\Lambda_{N+1} \geqslant 3L_F^2\Lambda^{2\gamma-1}/2 \qquad (4.3.70)$$

$$\Lambda_{N+1}-\Lambda_N \geqslant 30L_F(\Lambda_N^\gamma+\Lambda_{N+1}^\gamma) \qquad (4.3.71)$$

取 $l=\dfrac{1}{4}$，$k=4$，则式(4.3.71)推出式(4.3.63)和式(4.3.60)，因此推论4.3.1和命题4.3.2成立。因此可找到 $\mathscr{F}_\tau$ 的不动点 $\phi_\tau\in\mathscr{F}_{\frac{1}{4}}$。式(4.3.62)、(4.3.63)在 ϵ_4 中满足。为了完成定理4.3.1的证明，必须证明指数吸引性。

取 $u^0\in D(A^\alpha)$，$v^0\in M_\tau$ 使得 $d_\alpha(u^0,M_\tau)=|u^0-v^0|_\alpha$，置 $u^n=(S_{\phi_\tau}^\tau)^n u^0$，$v^n=(S_{\phi_\tau}^\tau)^n v^0=Pv^n+\phi_\tau(Pv^n)$。由式(4.3.69)和式(4.3.71)以及 $\tau\Lambda\leqslant 1$有

$$(1+\tau L_F^2\Lambda_1^{2\gamma-1}/2)(1+(1+k)L_F\Lambda^\gamma)\leqslant(1+\tau\Lambda),\ k=4 \qquad (4.3.72)$$

置 $n_0=1+[(2\ln(1+\tau L_F^2\Lambda_1^{2\gamma-1}/2)^{-1}\ln 2]$，这里$[x]$表示 x 的整数部分，则由式(4.3.69)可得

$$(1+\tau L_F^2\Lambda_1^{2\gamma-1}/2)^{n_0}\leqslant\exp(\lg 2^{\frac{1}{2}}(1+\tau L_F^2\Lambda_1^{2\gamma-1}/2))\leqslant 4\sqrt{2}/3 \qquad (4.3.73)$$

其中用到了 $\tau L_F^2\Lambda_1^{2\gamma-1}/2\leqslant\tau\Lambda/2\leqslant\dfrac{1}{2}$。另一方面($k=4$)，由(4.3.73)和 n_0的定义有

$$(1+(1+k)\tau L_F\Lambda^\gamma)^{2n_0}(1+\tau\Lambda)^{-2n_0}\leqslant$$

$$(1+\tau L_F^2\Lambda_1^{2\gamma-1}/2)^{-2n_0}\leqslant\frac{1}{2} \qquad (4.3.74)$$

其次，取 $n\in\mathbf{N}$，满足 $n_0\leqslant n\leqslant 2n_0$，发生下面两种情况：

(i)或者 $u^n-v^n\in\mathscr{E}_4$，则

$$d_\alpha(u^n,M_\tau)\leqslant$$

$$|Qu^n-\phi_\tau(Pu^n)|_\alpha(因\ Pu^n+\phi_\tau(Pu^n)\in M_\tau)$$

$$\leqslant |Q(u^n - v^n)|_\alpha - |\phi_\tau(Pu^n) - \phi_\tau(Pv^n)|_\alpha$$

(因 $u^n - v^n \in \mathscr{E}_4$ 和 $\phi_\tau \in \mathscr{F}_{\frac{1}{4}}$)

$$\leqslant |u^n - v^n|_\alpha/2 \quad (\text{由}(4.3.59)\text{和} n \leqslant 2n_0)$$

$$\leqslant |u^n - v^n|_\alpha(1 + \tau L_F^2 \Lambda_1^{2\gamma-1}/2)^{n_0}/2$$

$$\leqslant 2\sqrt{2}|u^n - v^n|_\alpha/3$$

因此，

$$n_0 \leqslant n \leqslant 2n_0,\ u^n - v^n \in \mathscr{E}_4$$

$$\Rightarrow d_\alpha(u^n, M_\tau) \leqslant (2\sqrt{2}/3)d_\alpha(u^0, M_2) \qquad (4.3.75)$$

(ii)或者，$u^n - v^n \notin \mathscr{E}_4$，由命题4.3.2，$u^k - v^k \notin \mathscr{E}_4$，$k = 0, 1, \cdots, n_0$，由式(4.3.63)，$u_1^k = u^k$，$u_2^k = v^k$，则有($k=4$)

$$d_\alpha(u^n, M_\tau) \leqslant |u^n - v^n|_\alpha \leqslant$$

$$(1 + \frac{1}{4})(1 + 5\tau L_F \Lambda^\gamma)^{2n_0}(1 + \tau\Lambda)^{-2n_0}|u^0 - v^0|_\alpha \leqslant$$

$$(5/8)|u^0 - v^0|_\alpha$$

其中

$$n_0 \leqslant n \leqslant 2n_0,\ u^n - v^n \notin \mathscr{E}_4 \Rightarrow$$

$$d_\alpha(u^n, M_\tau) \leqslant (5/4\sqrt{2})d_\alpha(u_n^0, M_\tau)$$

由这些及式(4.3.75)可得

$$d_\alpha(u^n, M_\tau) \leqslant (2\sqrt{2}/3)d_\alpha(u^0, M_\tau),\ n_0 \leqslant n \leqslant 2n_0 \qquad (4.3.76)$$

如 $n \geqslant 2n_0$，对 $k \in \mathbf{N}$，$r \in [n_0 + 1, 2n_0]$，使得 $n = k_{n_0} + r$，依式(4.3.76)有

$$d_\alpha(u^n, M_\tau) \leqslant (2\sqrt{3}/3)^k d_\alpha(u^0, M_\tau),\ n \geqslant n_0$$

这就表明惯性流形具有指数吸引：$\sigma = [\ln(3/2\sqrt{2})]n_0$

现考虑一般情况，$C \neq 0$。此时离散方程为

$$(u^{n-1} - u^n)/\tau + (A + C)u^{n+1} + F(u^n) = 0,\ n \geqslant 0 \qquad (4.3.77)$$

现提出分数步法：

$$\frac{u^{n+\frac{1}{2}}-u^{n}}{\tau}+Au^{n+\frac{1}{2}}+F(u^{n})=0 \tag{4.3.78}$$

$$\frac{u^{n+1}-u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau}+C\frac{u^{n+1}+u^{n+\frac{1}{2}}}{2}=0 \tag{4.3.79}$$

当$C=0$时，它为古典隐式格式。式(4.3.78)可写为

$$u^{n+\frac{1}{2}}=R(\tau)(u^{n}-\tau F(u^{n})) \tag{4.3.80}$$

其中 $R(\tau)=(I+\tau A)^{-1}$。至于式(4.3.79)，置

$$U(\tau)v=\sum_{\Lambda\in\sigma(A)}U_{\Lambda}(\tau)R_{\Lambda}v \tag{4.3.81}$$

其中 $U_{\Lambda}(\tau)$ 为在 $R_{\Lambda}H$ 上的酉算子；$U_{\Lambda}(\tau)=(I+\tau C_{\Lambda}/2)^{-1}=(I-\tau C_{\Lambda}/2)$，$U(\tau)$为在 $D(A^{s})$，$(s\in\mathbf{R})$上的酉算子，式(4.3.79)可写为

$$u^{n+1}=U(\tau)u^{n+\frac{1}{2}} \tag{4.3.82}$$

因此式(4.3.78)、(4.3.79)可写为

$$u^{n+1}=\overline{R}(\tau)(u^{n}-\tau F(u^{n})),\ n\geqslant 0 \tag{4.3.83}$$

其中

$$\overline{R}(\tau)\overset{\text{def}}{=\!=}U(\tau)R(\tau)=R(\tau)U(\tau),\ \forall\tau>0$$

和式(4.3.16)比较，只需把$\overline{R}(\tau)$换成 $R(\tau)$，则形式相同，因此有

定理4.3.2 设 $N\geqslant 1$使得

$$\Lambda_{N-1}\geqslant 3L_{F}^{2}\Lambda_{1}^{2\gamma-1}/2\text{。}$$

$$\Lambda_{N+1}-\Lambda_{N}\geqslant 30L_{F}(\Lambda_{N}^{\gamma}+\Lambda_{N+1}^{\gamma}) \tag{4.3.84}$$

则对任何 $\tau>0$，使得 $\tau\Lambda_{N+1}\leqslant 1$离散无穷维动力系统

$$\frac{u^{n+\frac{1}{2}}-u^{n}}{\tau}+Au^{n+\frac{1}{2}}+F(u^{n})=0,$$

$$\frac{u^{n+1}-u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau}+C\frac{u^{n+1}+u^{n+\frac{1}{2}}}{2}=0$$

具有惯性流形 M_{τ}，它是一个 Lip 函数：$P_{N}H\rightarrow Q_{N}D(A^{\gamma})$的图。更进一步，存在两个常数 C_{0}和 $\sigma>0$使得对任何 $u^{0}\in D(A^{\gamma})$，有

$$d_\alpha(u^n, M_\tau) \leqslant C_0 e^{-\alpha n} d_\alpha(u^0, M_\tau), \ \forall\ n \geqslant 0 \qquad (4.3.85)$$

设 N 使得

$$\Lambda_{N-1} \geqslant 3L_F^2 \Lambda_1^{2\gamma-1}/2,$$

$$\Lambda_{N+1} - \Lambda_N \geqslant 30 L_F(\Lambda_N^\gamma + \Lambda_{N+1}^\gamma) \qquad (4.3.86)$$

则可证方程(4.3.4)具有 M 维($M=\dim P_N H$)的惯性流形 M，$M=M_d=\{p+\phi(p), p\in PH\}$。对于充分小的 τ，$\tau\Lambda_{N+1}\leqslant 1$，则由定理4.3.2，存在离散方程(4.3.78)、(4.3.79)的 M 维惯性流形 M_τ。我们问：当 $\tau\to 0$时，M_τ 是否收敛于 M?

定理4.3.3 设 N 满足式(4.3.84)，$\tau\Lambda_{N-1}\leqslant 1$，则存在常数 K，它与 $\tau>0$无关，使得

$$\|\phi - \phi_\tau\|_\sigma \leqslant K\tau^\xi (1 + |\ln \tau\Lambda_{N-1}|)^\varepsilon$$

其中

$$\xi = 1, \qquad \varepsilon = 1, \quad s_0 \leqslant 1, \gamma = 0;$$

$$\xi = 1-\gamma, \qquad \varepsilon = 0, \quad s_0 \leqslant 1, \gamma > 0;$$

$$\xi = (1-\gamma)(2s_0 - 1)^{-1}, \quad \varepsilon = 1, \quad s_0 > 1$$

我们稍后证明它。先考虑有限维部分的误差估计。

设 $\phi\in\mathscr{F}_l$，考虑如下两种动力系统：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + Ap + Cp + PF(p+\phi(p)) = 0 \qquad (4.3.87)$$

$$p^{n+1} = \overline{R}(\tau)(p^n - \tau PF(p^n + \phi(p^n))) \qquad (4.3.88)$$

其中 $P=P_N$，τ 满足式(4.3.23)，$\overline{R}(\tau) = R(\tau)U(\tau) = (I+\tau A)^{-1}(I+\tau\frac{C}{2})^{-1}(I-\tau\frac{C}{2})$，$N$ 为固定整数，ϕ 为惯性流形的图。令

$$e_n = p(n\tau) - p^n, \ n\in\mathbf{Z} \qquad (4.3.89)$$

命题4.3.3 在前面假定下，设 $p^0\in H$，设 $p(t)$，$t\in\mathbf{R}$(p^n，$n\in\mathbf{Z}$)表示式(4.3.87)、(4.3.88)的解满足 $p(0)=p^0$($p_0=p^0$)。则对于负整数 n，有

$$|e_n|_\alpha \leqslant \frac{\tau^2 K(\lambda)}{1-\tau L_F(1+l)\lambda^\alpha}(\eta^{-n}-\mathrm{e}^{-n\tau\bar{\lambda}}) \times$$
$$(\eta \mathrm{e}^{-\tau\lambda}-1)(1+|p^0|_\alpha) \qquad (4.3.90)$$

其中 $K(\lambda)$ 与 τ, n 无关，

$$\eta = (1+\tau\lambda)(1-\tau L_F(1+l)\lambda^\gamma)^{-1},$$
$$\bar{\lambda} = \lambda + \lambda^\gamma L_F(1+l),\ \lambda = \Lambda_N$$

证明 这是很古典的事，只需叙述证明的主要步骤。引入相容性误差 ε_n

$$\bar{R}(\tau)^{-1}p((n+1)\tau) = (p^n - \tau PF(p(n\tau)+\phi(p(n\tau)))) + \varepsilon_n \qquad (4.3.91)$$

和式(4.3.88)比较有

$$\bar{R}(\tau)^{-1}e_{n+1} = (e_n - \tau P(G(pn(\tau)) - G(p^n))) + \varepsilon_n \qquad (4.3.92)$$

其中 $G(p)=GF(p+\phi(p))$，作式(4.3.92)和 e_n 在 $D(A^\alpha)$中的内积得

$$|e_n|_\alpha \leqslant \eta|e_{n+1}|_\alpha + |\varepsilon_n|_\alpha/(1-\tau(1-\tau(1+l)L_F\lambda^\alpha)) \qquad (4.3.93)$$

这就表明 $(e_0=0)$

$$|e_n| \leqslant \sum_{k=-n}^{-1}\eta^{k-n}|\varepsilon_k|_\alpha(1-\tau L_F(1+l))^{-1},\ \forall\, n\leqslant 0 \qquad (4.3.94)$$

余下来是估计 ε_k，记

$$\phi(s) = \bar{R}(s)^{-1}p(\sigma+s) - p(\sigma) + sPF(p(\sigma)+\phi(p(\sigma)))$$

σ 固定 $s\geqslant 0$则有

$$\varepsilon_n = \phi(\tau),\ \sigma = n\tau \qquad (4.3.95)$$

因 $\phi(0)=0$，所以存在 $\theta\in[0,1]$使得

$$|\varepsilon_n|_\alpha \leqslant \tau|\phi'(\theta\tau)|_\alpha,\ \sigma = n\tau \qquad (4.3.96)$$

计算 $\phi'(s)$，

$$\phi'(s)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{R}(s)^{-1}\right)p(\sigma+s)\quad(A+C)p(\sigma)+$$

$$\overline{R}(s)^{-1}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}(\sigma+s)-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}(\sigma)$$

可写 $\phi'(s)$ 为

$$\phi'(s)=\Psi_1(s)-\Psi_2(s) \tag{4.3.97}$$

其中：$\Psi_2(s)=\overline{R}(s)^{-1}\left(\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}\right)(\sigma+s)-\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}\right)(\sigma)\right)$；函数 Ψ_1 是可微的，$\Psi_1(0)=0$。因此存在 $\theta_1\in[0,1]$ 使得

$$\Psi_1(s)=s\Psi_1'(\theta_1 s) \tag{4.3.98}$$

关于 Ψ_2，记

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}(s)-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}(\sigma+s)=(A-C)(p(\sigma+s)-p(\sigma))+$$

$$P(G(p(\sigma+s))-G(p(\sigma)))$$

因此

$$\left|\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(\sigma+s)-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(\sigma)\right|_\alpha\leqslant(\lambda+\lambda^{\epsilon_0}+(1+l)L_F\lambda^\alpha)\times$$

$$|p(\sigma+s)-p(\sigma)|_\alpha$$

因 $|\overline{R}(\tau)^{-1}|_{\mathscr{L}(D(A^\alpha))}\leqslant(1+s\lambda)$，故存在 $\theta_2\in[0,1]$使得

$$|\Psi_2(s)|_\alpha\leqslant sA+s\lambda(\lambda+a\lambda^{\epsilon_0}+(1+l)L_F\lambda^\alpha)\left|\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(\sigma+\theta_2 s)\right|_\alpha \tag{4.3.99}$$

其中

$$a=|C|_{\mathscr{L}(D(A^{\epsilon_0}),H)} \tag{4.3.100}$$

为了从式(4.3.98)、(4.3.100)得到 ϵ_n 的估计，必须估计 $|p(\sigma)|_\alpha$，$\sigma\leqslant 0$。回到式(4.3.87)，利用式(4.3.6)、(4.3.7)可得

$$|p(\sigma)|_\alpha\leqslant(1+|p^0|_\alpha)\mathrm{e}^{-\bar{\lambda}\sigma},\ \forall\,\sigma\leqslant 0 \tag{4.3.101}$$

其中$\bar{\lambda}=\lambda+\lambda^\gamma L_F(1+l)$。由式(4.3.87)、(4.3.101)、(4.3.99)可得

$$|\Psi_2(s)|_\alpha\leqslant s(1+s\lambda)K_1(1+|p^0|_\alpha)\mathrm{e}^{-\bar{\lambda}(s+n\tau)},\ \forall\,s\leqslant 0 \tag{4.3.102}$$

其中 K_1 以及以下的 K_2 为仅依赖于 λ, L_F, l, s_0 和 a 的常数，式(4.3.98)的估计是类似的。我们得到

$$|\Psi_1(s)|_\alpha \leqslant s(2\lambda + (1+s\lambda)a\lambda^{s_0})K_2(1+|p^0|_\alpha)e^{-\lambda s},\ \forall\, s \geqslant 0 \tag{4.3.103}$$

由式(4.3.102)和式(4.3.103)，取 $\sigma = n\tau \leqslant 0, s = \tau$ 可得

$$|\varepsilon_n|_\alpha \leqslant \tau^2 K(\lambda)(1+|p^0|_\alpha)e^{-\lambda n\tau},\ \forall\, n \leqslant 0$$

于是式(4.3.90)从式(4.3.94)和式(4.3.103)推得。

现考虑 $\mathscr{F}_\tau$ 当 $\tau\to 0$ 时的收敛性。

命题4.3.4 在命题4.3.3的相同假设下，设 N 满足

$$\Lambda_{N+1} - \Lambda_N \geqslant \tau L_F(1+l)\Lambda_N^\gamma \tag{4.3.104}$$

则对任何 $\tau>0, \tau\Lambda_{N+1}\leqslant 1$，任何 $p^0\in PH, \phi\in\mathscr{F}_l$，有

$$|(\mathscr{F}_\tau\phi - \phi)(p^0)|_\alpha \leqslant C_0(1+|p^0|_\alpha)\tau^\xi(1+|\ln\tau\Lambda_{N+1}|)^\varepsilon \tag{4.3.105}$$

其中常数 C_0 仅依赖于 $\Lambda_N, \Lambda_{N+1}, s_0$ 和 γ，但不依赖于 τ；$\xi, \varepsilon\in\{0,1\}$，如下所示：

$\xi = 1,\qquad \varepsilon = 1,\ \gamma = 0,\quad 0 < s_0 \leqslant 1;$

$\xi = 1-\gamma,\qquad \varepsilon = 0,\ \gamma\in[0,1],\quad 0 < s_0 \leqslant 1;$

$\xi = (1-\gamma)(2s_0-1)^{-1},\qquad \varepsilon = 1,\ \gamma\in[0,1]\quad s_0 \geqslant 1$

证明 由于

$$(\mathscr{F}\phi)(p_0) = -\int_{-\infty}^0 e^{(A+C)\sigma}QF(s_\phi(\sigma)p_0 + \phi(s_\phi(\sigma)p_0))d\sigma$$

$$(\mathscr{F}_\tau\phi)(p_0) = -\tau\sum_{k=1}^{\infty} R(\tau)^k QF((s_\phi^\tau)^{-k}p^0 + \phi((s_\phi^\tau)^{-k}p^0))$$

因而

$$(\mathscr{F}_\tau\phi - \mathscr{F}\phi)(p^0) = \int_{-\infty}^0 e^{(A+C)\sigma}QG(p(\sigma))d\sigma - \tau\sum_{k=1}^{\infty} R(\tau)^k QG(p^{-k})$$

其中 $G(p) = F(p+\phi(p))$。上式可分为几个式之和，

$$(\mathscr{F}_\tau\phi - \mathscr{F}\phi)(p_0) = 式(4.3.107) + 式(4.3.108) + 式(4.3.109) \tag{4.3.106}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-k\tau-\tau}^{-k\tau} e^{(A+C)\sigma}Q(G(p(\sigma)) - G(p^{-k}))d\sigma \tag{4.3.107}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-k\tau-\tau}^{-k\tau} (e^{(A-C)\sigma} - \overline{R}(\tau)^k)QG(p^{-k})d\sigma \tag{4.3.108}$$

$$\int_{-\tau}^{0} e^{(A+C)\sigma}QG(p(\sigma))d\sigma \tag{4.3.109}$$

容易证明，存在常数$\overline{C}$与τ无关，$\tau\Lambda\leqslant 1$使得

$$|A^{\gamma\Lambda}式(4.3.109)|_\alpha \leqslant \overline{C}\tau^{1-\gamma}(1 + |p^0|_\alpha) \tag{4.3.110}$$

其它的证明分为两部分。首先估计式(4.3.107)，其次为式(4.3.108)。

(i)式(4.3.107)的估计。对$k\geqslant 0, -k\tau-\tau<\sigma\leqslant -k\tau$

$$p(\sigma) - p^{-k} = p(\sigma) - p(-k\tau) + p(-k\tau) - p^{-k}$$

则由式(4.3.87)、(4.3.101)可知，存在$\theta\in[0,1]$使得

$$\begin{cases} |p(\sigma) - p^{-k}|_\alpha \leqslant \tau\left|\dfrac{dp}{dt}(-k\tau - \theta\tau)\right|_\alpha + |p(-k\tau) - p^{-k}|_\alpha, \\ |p(\sigma) - p^{-k}|_\alpha \leqslant \tau K_1(1 + |p^0|_\alpha)\exp(\tilde{\lambda}(k+1)\tau) + \\ \qquad |p(-k\tau) - p^{-k}|_\alpha \end{cases} \tag{4.3.111}$$

其中K_i表示与τ无关的常数($\tau\Lambda\leqslant 1$)。式(4.3.90)中令$n=-k$，有

$$|p(-k\tau) - p^{-k}|_\alpha \leqslant \tau^2 K_2(\eta^k - e^{k\tilde{\lambda}\tau})(\eta e^{-\tau\tilde{\lambda}} - 1)^{-1}(1 + |p^0|_\alpha),$$

因$(\eta^k - e^{k\lambda})(\eta e^{-\lambda} - 1)^{-1}\leqslant ke^{\tilde{\lambda}k}$。由式(4.3.111)推得

$$|p(\sigma) - p^{-k}|_\alpha \leqslant \tau(K_1 + k\tau K_2)(1 + |p^0|_\alpha)e^{\tilde{\lambda}k\tau},$$
$$k\tau \leqslant -\sigma \leqslant (k+1)\tau,\ k\geqslant 0 \tag{4.3.112}$$

回到式(4.3.107)，令$v = A^{-\gamma}(G(p(\sigma)) - G(p^{-k}))$，利用

$$|v|_\alpha \leqslant L_P(1 + l)|p(\sigma) - p^{-k}|_\alpha$$

则由

$$|A^\gamma e^{A\sigma}Qv|_\alpha \leqslant (\Lambda^\gamma + (\tau|\gamma|^{-1})^\gamma)e^{\Lambda\sigma}|Qv|_\alpha,$$

$$\forall\ v \in D(A^\alpha),\ \forall\ \sigma \leqslant 0 \tag{4.3.113}$$

可得

$$|\text{式}(4.3.107)|_\alpha \leqslant \tau L_F(1+l)(1+|p^c|_\alpha)\times$$
$$\int_{-\infty}^{0}(\Lambda+(2|\sigma|^{-1}))(K_1+|\sigma|K_2)\exp(\Lambda-\bar{\lambda})\,\sigma\mathrm{d}\sigma \tag{4.3.114}$$

由式(4.3.104)，$\Lambda-\bar{\lambda}\geqslant L_F(1+l)\lambda^\gamma>0$，因 $\gamma\in[0,1]$，式(4.3.114)积分是收敛的。因此可找到 K_3 使得

$$|\text{式}(4.3.107)|_\alpha \leqslant \tau K_3(1+|p^c|_\alpha) \tag{4.3.115}$$

(ii)估计式(4.3.108)。将此和分为以下两项之和

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-k\tau-\tau}^{-k\tau}(\mathrm{e}^{(A+C)\sigma}-\mathrm{e}^{-(A+C)k\tau})QG(p^{-k})\mathrm{d}\sigma \tag{4.3.116}$$

$$\tau\sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{e}^{-(A+C)k\tau}-\overline{R}(\tau)^k)QG(p^{-k}) \tag{4.3.117}$$

为了估计这两项，我们需要以下引理

引理4.3.4 存在常数 C_1，它与 N 和 τ 无关，$\tau\Lambda\leqslant 1$，使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\bar{\lambda}k\tau}\int_{-k\tau-\tau}^{-k\tau}|A^\gamma(\mathrm{e}^{(A+C)\sigma}-\mathrm{e}^{-(A+C)k\tau})|_{\mathscr{L}(QD(A^\alpha))}\mathrm{d}\sigma\leqslant$$
$$C_1\tau^{\xi_1}(1+|\lg\tau\Lambda|)^{\varepsilon_1} \tag{4.3.118}$$

其中 $\xi_1\in[0,1]$，$\varepsilon_1\in\{0,1\}$ 为下表中给定的常数

γ	s_0	ξ_1	ε_1
$\gamma=0$	$1<s_0\leqslant 1$	1	1
$\gamma=0$	$s_0>1$	$1/s_0$	1
$0<\gamma<1$	$0<s_0\leqslant 1$	$1-\gamma$	0
$0<\gamma<1$	$s_0>1$	$(1-\gamma)/s_0$	1

证明 如果我们选取 Hilbert 空间的基，算子 A^γ，$\mathrm{e}^{(A+C)\sigma}$，…是容易计算的。我们知道，对于每一个有限维空间 $R_\mu H$，$\mu\in\sigma(A)$，算子 $R_\mu C$ 是反对称的，由 H 的复化，可构造 H 的基 $\{e_p\}_{p\in\mathbf{N}^*}$，使得

$$Ae_p=\mu_p e_p,\ Ce_p=\mathrm{i}\xi_p e_p,\ \mu_p\in\mathbf{R}_+^*,\ \xi_p\in\mathbf{R}$$

我们有关系($a=|C|_{\mathscr{L}(D(\Lambda^{s_0}),H)}$)

$$|\xi_p|\leqslant a|\mu_p|^{s_0},\ \forall\ p\in\mathbf{N}^*$$

如果 B 在基$(e_p)_{p\in\mathbf{N}^*}$下是一个对角型算子，则

$$|B|_{\mathscr{L}(D(\Lambda^{s}))}=\sup_{p\geqslant1}|(Be_p,e_p)|$$

为了估计式(4.3.118)，必须考虑

$$\mu^\gamma(\mathrm{e}^{(\mu+\mathrm{i}\xi)\sigma}-\mathrm{e}^{-(\mu+\mathrm{i}\xi)k\tau}),k\geqslant0,-k\tau-\tau\leqslant\sigma\leqslant-k\tau \tag{4.3.119}$$

其中 $\mu\geqslant\Lambda$，$|\xi|\leqslant a|\mu|^{s_0}$. $\mathrm{i}\xi$ 为 C 的特征值。再写式(4.3.119)为

$$式(4.3.119)=\mu^\gamma(\mathrm{e}^{\mu\sigma}-\mathrm{e}^{-\mu k\tau})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\sigma}+\mu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\sigma}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi k\tau})\mathrm{e}^{-\mu k\tau},$$

上述各项分别估计

$$\mu^\gamma|\mathrm{e}^{\mu\sigma}-\mathrm{e}^{-\mu k\tau}|\leqslant\tau\mu^{1+\gamma}\mathrm{e}^{-\mu k\tau},$$

$$\mu^\gamma|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\sigma}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi k\tau}|=2\mu^\gamma\left|\sin\frac{\xi(\sigma-k\tau)}{2}\right|\leqslant2^{1-\delta_1}\mu^\gamma|\xi\tau|^{\delta_1}$$

其中 $\delta_1\in[0,1]$是任意的。于是

$$|式(4.3.119)|\leqslant(\tau\mu^{1+\gamma}+\tau^{1-\delta_1}a^{\delta_1}\tau^{\delta_1}\mu^{\gamma+\delta_1 s_0})\mathrm{e}^{-\mu k\tau} \tag{4.3.120}$$

当 $k\geqslant k_0=(1+\gamma)(\tau\Lambda)^{-1}$，$\mu\geqslant\Lambda$，函数 $\mu\to\mu^{1+\gamma}\mathrm{e}^{-\mu k\tau}$是减少的，因此

$$\mu^{1+\gamma}\mathrm{e}^{-\mu k\tau}\leqslant\Lambda^{1+\gamma}\mathrm{e}^{-\Lambda k\tau},k\geqslant(1+\gamma)(\tau\Lambda)^{-1} \tag{4.3.121}$$

对于 $k\leqslant k_0$，这个函数的最大值在 $\mu=(1+\gamma)(k\tau)^{-1}$，且有

$$\mu^{1+\gamma}\mathrm{e}^{-\mu k\tau}\leqslant((1+\gamma)(\tau k)^{-1})^{(1+\gamma)}\mathrm{e}^{-(1+\gamma)},\quad k\leqslant(1+\gamma)(\tau\Lambda)^{-1} \tag{4.3.122}$$

从式(4.3.121)、(4.3.122)推得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\lambda k\tau}\sup_{\mu\geqslant\Lambda}\tau\mu^{1+\gamma}\mathrm{e}^{-\mu k\tau}\leqslant K_7\begin{cases}(1+|\lg(\tau\Lambda)|),&\gamma=0\\ \tau^{-\gamma},&\gamma>0\end{cases} \tag{4.3.123}$$

关于式(4.3.120)的第二项，考虑两种情况。首先，$s_0\leqslant1$，可取 $\delta_1=1-\gamma$，则类似于式(4.3.123)有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\lambda k\tau}\sup\ \tau^{\delta_1}\mu^{\gamma+\delta_1 s_0}\mathrm{e}^{-\mu k\tau}\leqslant K_8\tau^{-\gamma} \tag{4.3.124}$$

其中除去 $\gamma=0, s_0=1$。当此时发生，则置换式(4.3.124)的右端为 $K_8(1+|\lg\tau\Lambda|)$。其中 $s_0>1$。取 $\delta_1<(1-\gamma)/s_0$，类似式(4.3.123)得

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\bar{\lambda}k\tau} \sup_{\mu\geqslant\Lambda} \tau^{\delta_1}\mu^{\gamma+\delta_1 s_0}e^{-\mu k\tau} \leqslant K_{10}\tau^{-1+(1-\gamma)/s_0}(1+\lg|\tau\Lambda|) \tag{4.3.125}$$

回到式(4.3.118)。我们必须对式(4.3.123)、(4.3.124)和(4.3.125)对 σ 积分，因它们均与 σ 无关，即得

$$|\text{式}(4.3.118)\text{左端}| \leqslant$$

$$\tau\left[|\text{式}(4.3.123)| + \begin{cases}|\text{式}(4.3.124)|, & s_0\leqslant 1\\ |\text{式}(4.3.125)|, & s_0>1\end{cases}\right]$$

即得式(4.3.118)。

引理4.3.5 存在常数 C_2，它与 N 和 τ 无关，$\tau\Lambda\leqslant 1$，使得

$$\tau\sum_{k=1}^{\infty}|A^{\gamma}(e^{-(A-C)k\tau}-\overline{R}(\tau)^k)|_{\mathscr{L}(QD(A^{\epsilon}))}e^{\bar{\lambda}k\tau}\leqslant$$

$$C_2\tau^{\xi_2}(1+|\lg\tau\Lambda|)^{\epsilon_2} \tag{4.3.126}$$

其中 $\xi_2\in[0,1]$，$\epsilon_2\in\{0,1\}$，

$$\xi_2=1-\gamma, \epsilon_2=0, s_0<1; \epsilon_2=1, \gamma=0$$

$$\xi_2=(1-\gamma)(2s_0-1)^{-1}, \epsilon_2=1,\ s_0\geqslant 1$$

证明 考虑

$$\mu^{\gamma}\left(e^{-(\mu+i\xi)k\tau}-(1+\tau\mu)^{-k}\left(\frac{1-i\tau\xi/2}{1+i\tau\xi/2}\right)^k\right) \tag{4.3.127}$$

其中 $\mu\geqslant\Lambda$，$|\xi|\leqslant a|\mu|^{s_0}$，$k\geqslant 1$，写

$$(4.3.127)=\mu^{\gamma}(e^{-ik\tau\xi}-e^{-ik\theta})e^{-\mu k\tau}$$

$$+\mu^{\gamma}(e^{-\mu k\tau}-(1+\tau\mu)^{-k})e^{-ik\theta}$$

这里 $\theta\overset{\text{def}}{=\!=}2\arctan(\tau\xi/2)$，因此 $(1+i\tau\xi/2)/(1-i\xi\tau/2)=\exp i\theta$。我们再次分别估计上式的两项。首先有

$$|e^{ik\tau\xi}-e^{-ik\theta}|=2|\sin(k(\theta-\tau\xi)/2)|\leqslant 2^{1-\delta_2}|k|^{\delta_2}|\theta-\tau\xi|^{\delta_2}$$

其中 $\delta_2\in[0,1]$为任意的,则对任何 $x\in\mathbf{R}$, $|\arctan x-x|\leqslant\frac{x^2}{2}$,有

$$|e^{-ik\tau\xi}-e^{-ik\theta}|\leqslant 2^{1-2\delta_2}k^{\delta_2}\tau^{2\delta_2}|\xi|^{2\delta_2},\ \forall\ \delta_2\in[0,1] \tag{4.3.128}$$

因$|\xi|\leqslant a\mu^{s_0}$可得

$$|\mu^\gamma(e^{-ik\tau\xi}-e^{ik\theta})e^{-\mu k\tau}|\leqslant 2^{1-2\delta_2}a^{2\delta_2}\tau^{2\delta_2}\mu^{(\gamma+2\delta_2 s_0)}k^{\delta_2}e^{-\mu k\tau} \tag{4.3.129}$$

式(4.3.127)的其它项是有界的。由一阶 Taylor 公式有

$$|\mu^\gamma(e^{-\mu k\tau}-(1+\tau\mu)^{-k})|\leqslant\mu^{\gamma+\tau}\tau^2k(1+\tau\mu)^{-k}/2 \tag{4.3.130}$$

当 $k=1$, $k=2$时,有更好的界

$$|\mu^\gamma(e^{-\mu k}-(1+\tau\mu)^{-k})|\leqslant\tau^{-\alpha},k=1,2 \tag{4.3.131}$$

小心注意出现在式(4.3.130)右端 μ 的函数,有

$$\sum_{k=3}^{\infty}(\sup|\mu^\gamma(e^{-\mu k\tau}-(1+\tau\mu)^{-k})|)e^{\bar{\lambda}k}\leqslant K_{11}\tau^{-\alpha} \tag{4.3.132}$$

关于式(4.3.129),写

$$\begin{aligned}S=&\sum_{1}^{\infty}(\sup_{\mu\geqslant\Lambda}|\mu^\gamma(e^{-ik\tau\xi}-e^{-ik\theta})e^{-\mu k\tau}|)e^{\bar{\lambda}k\tau}\leqslant 2^{1-\delta_2}a^{2\delta_2}\tau^{2\delta_2}\times\\&(\sum_{k\leqslant(\gamma-2\delta_2 s_0)/2\Lambda}k^{\delta_2}\left(\frac{k\tau}{\gamma+2\delta_2 s_0}\right)^{-(\gamma+2\delta_2 s_0)}e^{\bar{\lambda}k\tau}e^{-(\gamma+2\delta_2 s_0)})+\\&\sum_{k>(\gamma+2\delta_2 s_0)/2\Lambda}k^{\delta_2}\Lambda^{\gamma+\delta_2 s_0}e^{(\bar{\lambda}-\Lambda)k\tau}=\\&2^{1-\delta_2}a^{2\delta_2}\tau^{2\delta_2}\{S_1+S_2\}\end{aligned} \tag{4.3.133}$$

关于 S_2,注意到对于 $k>(\gamma+2\delta_2 s_0)/2\Lambda$,函数 $x\to x^{\delta_2}e^{(\bar{\lambda}-\Lambda)x\tau}$为减少的,有

$$S_2\leqslant\Lambda^{\gamma+2\delta_2 s_0}\int_0^{\infty}x^{\delta_2}e^{(\bar{\lambda}-\Lambda)x\tau}dx=K_{12}\Lambda^{\gamma-2\delta_0 s_0}((\bar{\lambda}-\Lambda)\tau)^{-(\delta_2+1)}$$

至于 S_1,如 $\delta_2(1-2s_0)-\gamma>-1$,则有

$$S_1=K_{13}\tau^{-(\gamma+2\delta_2 s_0)}\sum_{k\leqslant(\gamma+2\delta_2 s_0)/2\Lambda}k^{\delta_2(1-2s_0)-\gamma}\leqslant$$

$$K_{14}\tau^{-(\gamma-2\delta_2 s_0)}(\tau^{-1})^{\delta_2(1-2s_0)-\gamma+1} =$$

$$K_{14}\tau^{-(\gamma+2\delta_2 s_0)-\delta_2(1-2s_0)+\gamma-1}$$

如 $\delta_2(1-2s_0)-\gamma=-1$，有

$$S_1 \leqslant K_{13}\tau^{-(\gamma+2\delta_2 s_0)}\lg|\tau\Lambda|$$

先设 $s_0<1$，选取 $\delta_2=1-\gamma$，则有 $\delta_2(1-2s_0)-\gamma<1$于是

$$S_1 \leqslant \tau^{(1-\gamma)/(2s_0-1)-1}$$

因此，回到式(4.3.127)，由式(4.3.131)、(4.3.132)和式(4.3.133)可得式(4.3.126)的右端。

式(4.3.126)的左端 =

$$\begin{cases} \leqslant K_{15}\tau^{1-\gamma}, & s_0<1,\ \gamma\in[0,1]; \\ \leqslant K_{15}\tau(1+|\lg(\tau\Lambda)|), & s_0<1,\ \gamma=0; \\ \leqslant K_{15}\tau^{(1-\gamma)/(2s_0-1)}(1+|\lg(\tau\Lambda)|), & s_0\geqslant 1 \end{cases}$$

有了这两个引理，我们能估计式(4.3.116)和式(4.3.117)。事实上，利用式(4.3.7)、(4.3.101)和式(4.3.118)可得

$$|\text{式}(4.3.116)|_\alpha \leqslant K_4(1+|p^0|_\alpha)\tau^{\xi_1}(1+|\lg\tau\Lambda|)^{\varepsilon_1} \tag{4.3.134}$$

同样，利用式(4.3.126)有

$$|\text{式}(4.3.117)|_\alpha \leqslant K_5(1+|p^0|_\alpha)\tau^{\xi_2}(1+|\lg\tau\Lambda|)^{\varepsilon_2} \tag{4.3.135}$$

联系式(4.3.134)、(4.3.135)得

$$|\text{式}(4.3.108)|_\alpha \leqslant K_6(1+|p^0|_\alpha)\tau^{\xi}(1+|\lg\tau\Lambda|)^{\varepsilon} \tag{4.3.136}$$

$$\xi=\min(\xi_1,\xi_2),\ \varepsilon=\max(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$$

最后，式(4.3.106)的估计由式(4.3.110)、(4.3.115)和式(4.3.136)得到。

现来证明定理4.3.3；它由命题4.3.4直接推出。事实上，在满足谱间隙条件下，可知 $\phi=\mathscr{F}\phi,\phi\in\mathscr{F}_{1/4}$。另一方面，当 $\tau\Lambda\leqslant 1$时，由定理4.3.2，可知 $\phi_\tau=\mathscr{F}_\tau\phi_\tau,\phi_\tau\in\mathscr{F}_{\frac{1}{4}}$。因此

$$\phi - \phi_\tau = \mathscr{F}\phi - \mathscr{F}_\tau\phi_\tau = \mathscr{F}\phi - \mathscr{F}_\tau\phi + \mathscr{F}_\tau\phi - \mathscr{F}_\tau\phi_\tau$$

依式(4.3.34)($k=7/10, l=1/4$)，有

$$\|\phi - \phi_\tau\|_\alpha \leqslant 10/3\|\mathscr{F}\phi - \mathscr{F}_\tau\phi\|_\alpha \leqslant$$
$$(10C_0/3)\tau^\varepsilon(1 + |\lg\tau A|^\varepsilon)(\text{命题 } 3.12)$$

定理4.3.3证毕。

现举两例具体说明之。

例： 复振幅方程

考虑如下形式的非线性发展方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (1 + \mathrm{i}\alpha)\Delta u + (1 + \mathrm{i}\beta)f(|u|^2)u = ru \quad (4.3.137)$$

其中 :α, β, γ 为实常数；$u=u(x,t)$为定义在 $\Omega\times\mathbf{R}_+$ 上的复值函数；$\Omega\subset\mathbf{R}^d$ ($d=1$或2)为有界开集。两个典型情况：$f(s)=s$ 和 $f(s)=\pm s(1+\delta s)^{-1}, \delta>0$。第一种情况称为 Ginzburg-Landau 方程；后一种情况为激光方程，其它情况为 $f(s)=-s+s^2$，对于方程(4.3.137)可能多种边界条件：

Dirichlet BC $\quad u(x,t) = 0,\ x\in\partial\Omega, t\geqslant 0 \quad (4.3.138)$

Neumann BC $\quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = 0,\ x\in\partial\Omega, t\geqslant 0 \quad (4.3.139)$

Periodic BC $\quad u(\cdot,t)$ 为 Ω 周期，$\Omega = [0,L]^d \quad (4.3.140)$

其中 ν 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向向量。设 $f\in\epsilon^2(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ 满足以下两个假设之一：

$$\left.\begin{array}{l}\exists\ \sigma > 0, C_1\geqslant 0, R\geqslant 0, \underline{f}>0, \overline{f}>0, \quad \text{使得}\\ f(s)\geqslant \underline{f}s^\sigma - C_1, |f'(s)|\leqslant \overline{f}s^{\sigma-1}, \forall s\geqslant R\end{array}\right\}$$
$$(4.3.141)$$

或者

$$\exists\ w\geqslant 0, z_1 f(|z_1|^2) - z_2 f(|z_2|^2)\leqslant w|z_1 - z_2|, \forall z_i\in\mathbf{C}$$
$$(4.3.142)$$

注意到 $f(s)=s, f(s)=-s+s^2$满足式(4.3.141)，$f(s)=\pm s(1+\delta s)^{-1}$满足式(4.3.142)。设 $H=L^2(\Omega)^2$，有界算子 A

$$Av = -\Delta v + v, v\in D(A) \quad (4.3.143)$$

其中

$$D(A)=\begin{cases}\{v\in H^2(\Omega),v|_{\partial\Omega}=0\} \text{ 或者}\\ \{v\in H^2(\Omega),\dfrac{\partial v}{\partial \nu}|_{\partial\Omega}=0\} \text{ 或者}\\ \{v\in H^2(\Omega),v \text{ 和}\dfrac{\partial v}{\partial \nu} \text{ 为 }\Omega\text{ 周期}\}\end{cases}$$

依边界条件(4.3.138)～(4.3.140)而定。算子 C 是无界的，

$$C=\mathrm{i}\alpha(A-I) \tag{4.3.144}$$

它和 A 是可交换的，是反对称的，是连续的：$D(A^{s+1})\to D(A^s)$，$\forall s\in\mathbf{R}$。这里 $s_0=1$，

$$F(v)=(\mathrm{i}\alpha-\gamma)v+(1+\mathrm{i}\beta)f(|v|^2)v \tag{4.3.145}$$

考虑抽象方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au+Cu+F(u)=0 \tag{4.3.146}$$

$$u(0)=u_0 \tag{4.3.147}$$

当 $f(s)=s$ 时，不能期望 F 在 $D(A^\alpha)$上，$\alpha\in\mathbf{R}$ 为整体 Lip 连续的。我们先考虑满足式(4.3.142)的情况，即有

$$\int_\Omega|F(v)-F(w)|^2\mathrm{d}x\leqslant((\alpha^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}+(1+\beta^2)^{\frac{1}{2}}w)\int_\Omega|v-w|^2\mathrm{d}x$$

此时式(4.3.6)、(4.3.7)满足，$\alpha=\gamma=0$，$L_F=((\alpha^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}+(1+\beta^2)^{\frac{1}{2}}w)$。

现考虑式(4.3.141)的情况，式(4.3.137)、(4.3.138)～(4.3.140)局部解的存在、唯一性是很古典的。给定 $u_0\in H$，$S(t)u_0=u(t)$ 为最大解

$$u\in\varepsilon([0,T];L^2(\Omega^2))\cap\varepsilon([0,T];H^1(\Omega)^2),T=T_{\max}(u_0)$$

满足 $u(0)=u_0$。我们将看到关于 u 的先验估计，将证明 $T_{\max}(u_0)=+\infty$，$\forall u_0\in H$。事实上，$S(t)$在 H 上是有界的：

命题4.3.5 设 f 满足式(4.3.141)，$d=1,\sigma\leqslant2$；$d=2$，

$\sigma\leqslant 1$，则存在 $\rho\geqslant 0$ 仅依赖于 $\alpha,\beta,\gamma,\Omega$ 和 f，使得对任何 $v_0\in H$，$|u_0|\leqslant R$，存在 $t_0(R)$ 对于式(4.3.137)、(4.3.138)～(4.3.140)具有初值 u_0 的解满足

$$\|u\|_1^2 \overset{\text{def}}{=\!=} \int_\Omega (|u(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2)\mathrm{d}x \leqslant \rho^2,$$

$$\forall t \geqslant t_0(R) \qquad (4.3.148)$$

这表明半群 $S(t)$ 具有有界吸收集 $B_\rho=\{v\in H^1(\Omega)^2, \|v\|_1\leqslant\rho\}$。在给出这个命题证明之前，我们先讨论一下前面给出的抽象框架如何具体应用于问题(4.3.137)、(4.3.138)～(4.3.140)。

(i) 一维情况。此时依 $H^1(\Omega)$ 模有界，因此推出 $S(t)$ 在 $L^\infty(\Omega)$ 中具有一个有界吸收集 B_∞：$\exists\ \rho_\infty>0$，使得 $B_\infty=\{v\in L^\infty(\Omega), \sup\limits_{x\in\Omega}|v(x)|\leqslant\rho_\infty\}$ 是吸收集。我们置换在式(4.3.145)中的 F 为

$$F(v) = (\mathrm{i}\alpha - \gamma)v + (1 + \mathrm{i}\beta)\theta(|v|^2\rho_\infty^{-2})f(|v|^2)\,v \qquad (4.3.149)$$

其中 θ 为截断函数：$\theta\in C^\infty(\mathbf{R}_+)$，$\theta(s)=1$，$s\in[0,2]$，$\theta(s)=0$，$s\geqslant 3$。此时，可看到新的 $f(s)=\theta(s\rho_\infty^{-1})f(s)$ 满足式(4.3.142)，在式(4.3.6)～(4.3.7)中，$\alpha=\gamma=0$。

(ii)二维情况。代替式(4.3.145)，取

$$F(v) = (\mathrm{i}\alpha - \gamma)v + (1 - \mathrm{i}\beta)\theta(\|v^2\|_1^2\rho^{-2})f(|v|^2)v \qquad (4.3.150)$$

其中：θ 为前面所定义；ρ 为命题4.3.5所给定。我们要求存在常数 w_1，它仅依赖于 $\gamma,\beta,\alpha,\rho,\Omega$ 和 f，使得

$$\|F(v) - F(w)\|_1 \leqslant w_1\|v - w\|_1,\quad \forall v,w \in H^1(\Omega)^2 \qquad (4.3.151)$$

依式(4.3.151)可知，式(4.3.6)～(4.3.7)成立，只要取 $\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\gamma=0$，$\dfrac{L_F}{\omega_1}$。关于式(4.3.151)的证明，对式(4.3.150)的线性部分是显然的，对于非线性部分，因它在 $H^1(\Omega)^2$ 中有紧支集，仅需验证 $v\to\theta(\|v\|_1^2,\rho^{-2})f(|v|^2)$ 为局部 Lip 连续：$H^1(\Omega)\to H^1(\Omega)$。当 $\Omega\subset$

$\mathbf{R}^2$ 时，可从 $H^1(\Omega)$是连续嵌入 $L^p(\Omega)$，$\forall p<\infty$而得到。

先考虑把抽象结果应用一维情况。$\Omega=[0,L]$，$L>0$，A 的特征值是已知的。在式(4.3.138)和式(4.3.139)情况下，特征值 $\lambda_k=\Lambda_k$，$k\geqslant 1$是不同的，$\Lambda_k=1+(k-1)^2\pi^2L^2$。在式(4.3.140)情况下，$\Lambda_k=1+4(k-1)^2\pi^2L^{-2}$具有重数 $m_k=2$，$m_1=1$。条件 $\Lambda_{N+1}\geqslant 3L_F^2\Lambda^{2\gamma-1}/2$是满足的，取 $\gamma=0$，$\Lambda_1=1$

$$N\geqslant C_0L_FL$$

其中 C_0为绝对常数。条件 $\Lambda_{N+1}-\Lambda_N\geqslant 30L_F(\Lambda_N^\gamma+\Lambda_{N+1}^\gamma)$为

$$N\geqslant C_1L_FL^2,\ L\geqslant 1 \tag{4.3.152}$$

分数步法格式为

$$\begin{cases} (u^{n+\frac{1}{2}}-u^n)/\tau-\Delta u^{n+\frac{1}{2}}+(1+\mathrm{i}\beta)f(|u^n|^2)u^n=\gamma u^n \\ (u^{n+1}-u^{n+\frac{1}{2}})/\tau-\mathrm{i}\alpha\Delta(u^{n+1}+u^{n+\frac{1}{2}})/2=0 \end{cases} \tag{4.3.153}$$

补充边界条件(4.3.138)～(4.3.140)。当 f 满足式(4.3.142)时，$L_F=((\alpha^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}+(1+\beta^2)^{\frac{1}{2}}w)$。由4.3.1和定理4.3.1有

定理 4.3.4 设 f 满足式(4.3.142)。方程(4.3.137)、(4.3.138)～4.3.140)在 $\Omega=[0,L]$上($L>0$)具有依 $L^2(\Omega)^2$模的 M 维惯性流形，$M=M_\phi$，其中

$$M\leqslant C_3((\alpha^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}+(1+\beta^2)^{\frac{1}{2}}w)L^2 \tag{4.3.154}$$

其中：C_2为绝对常数，对任何 $\tau>0$，满足 $\tau L^2((\alpha^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}+(1+\beta^2)^{\frac{1}{2}}w)^2\leqslant C_3$；$C_3$为绝对常数。离散格式(4.3.153)也具有 M 维惯性流形，$M_\tau=M\phi_\tau$，而且有误差估计

$$\|\phi-\phi_\tau\|_0\leqslant K\tau(1+|\lg\tau|)$$

如果 f 满足式(4.3.141)，取 F 为式(4.3.150)形式，替代方程(4.3.137)为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-(1+\mathrm{i}\alpha)\Delta u+(1+\mathrm{i}\beta)\theta\times$$

$$(\|u\|_1^2\rho^{-2})f(|u|^2)u=ru \tag{4.3.155}$$

此时惯性流形在 $H^1(\Omega)^2$中得到。同时得到误差估计。

现考虑二维情况。已知特征值 $\lambda_k=(4\pi k/\mathrm{vol}\ \Omega+o(k))$，其中 vol Ω 表示 Ω 的面积，当 N 充分大时，$\Lambda_{N+1}\geqslant 3L_F^2/2\Lambda_1^{2\gamma-1}$ 是满足的。为证明满足谱间隔条件，$\Lambda_{N+1}-\Lambda_N\geqslant 60L_F$，$L_F$ 为任意的，必须有

$$\lim_{N\to\infty}\sup\ (\Lambda_{N+1}-\Lambda_N)=+\infty \tag{4.3.156}$$

当 $\Omega=[0,L_1]\times[0,L_2]$ 为矩形，$\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2$ 为有理数时可证明式(4.3.156)成立。

命题4.3.5的证明概要 考虑式(4.3.137)、(4.3.138)～(4.3.140)的光谱解。乘式(4.3.137)以$\bar{u}(-\Delta\bar{u})$，在 Ω 上积分，再取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega f(|u|^2)|u|^2\mathrm{d}x=\gamma\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x \tag{4.3.157}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega|\Delta u|^2\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\ (1+\mathrm{i}\beta)\times$$

$$\int_\Omega\nabla(f|u|^2)u)\nabla\bar{u}\mathrm{d}x=\gamma\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x \tag{4.3.158}$$

依式(4.3.141)，存在常数 C_1使得 $f(|u|^2)\geqslant \underline{f}|u|^{2\sigma}-C_1$，存在常数 C_2，使得 $f_1s^{2\sigma+2}-(C_1+1+\gamma)s^2\geqslant s^2\underline{f}s^{2\sigma+2}/2-C_2$，于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x+2\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\underline{f}\int_\Omega|u|^{2\sigma+2}\leqslant C_3 \tag{4.3.159}$$

由此推出

$$\int_\Omega|u(x,t)|^2\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_\Omega|u_0(x)|^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{-t}+C_3(1-\mathrm{e}^{-t}),$$

$$\forall\, t\geqslant 0 \tag{4.3.160}$$

关于式(4.3.158)，有

$$\mathrm{Re}(1+\mathrm{i}\beta)\int_\Omega(\nabla f(|u|^2)u)\nabla\bar{u}\mathrm{d}x=\int_\Omega f(|u|^2)|\nabla u|^2\mathrm{d}x+$$

$$\mathrm{Re}\ (1+\mathrm{i}\beta)\int_{\Omega} f'(|u|^{2}) u \nabla \bar{u} \mathrm{Re}\ (u \cdot \nabla \bar{u}) \mathrm{d}x$$

因 $f(|u|^2) \geqslant -C_1$，由式(4.3.141)有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x+\int_{\Omega}|\Delta u|^{2}\mathrm{d}x \leqslant (r+C_{1})\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x+$$

$$C_{4}\int_{\Omega}|u|^{2\sigma}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x \tag{4.3.161}$$

由 Hölder 不等式

$$\int_{\Omega}|u|^{2\sigma}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\left(\int_{\Omega}|u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\right)^{\sigma/(\sigma+1)}\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{2(\sigma+1)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\sigma+1}} \tag{4.3.162}$$

由二维 Gagliardo-Nirenberg 不等式

$$\int_{\Omega}|\nabla u|^{2(\sigma+1)}\mathrm{d}x \leqslant C_{\sigma}\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\Omega}|\Delta u|^{2}\mathrm{d}x\right)^{\sigma}$$

其中 C_σ 仅依赖于 σ 和 Ω，于是有

$$\int_{\Omega}|u|^{2\sigma}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x \leqslant C_{5}\left(\int_{\Omega}|u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\right)^{\sigma/(\sigma+1)}\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)^{1/(\sigma+1)}\cdot$$

$$\left(\int_{\Omega}|\Delta u|^{2}\mathrm{d}x\right)^{\sigma/(\sigma+1)} \leqslant \frac{1}{2C_{4}}\int_{\Omega}|\Delta u|^{2}\mathrm{d}x+$$

$$C_{6}\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\Omega}|u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\right)^{\sigma} \tag{4.3.163}$$

由式(4.3.161)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x+\int_{\Omega}|\Delta u|^{2}\mathrm{d}x \leqslant$$

$$2\left(r+C_{1}+C_{6}\left(\int_{\Omega}|u|^{2\sigma+2}\right)^{\sigma}\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x \tag{4.3.164}$$

由此可得问题(4.3.137)、(4.3.157)整体解的存在性。积分式(4.3.159)可得

$$\int_{0}^{T}\int_{\Omega}(|u|^{2\sigma+2}+|\nabla u|^{2})\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C_{7}(T)<\infty \tag{4.3.165}$$

当为空间二维时，设 $\sigma \leqslant 1$ 利用式(4.3.165)从式(4.3.164)可得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_{\Omega}|\nabla u(x,t)|^{2}\mathrm{d}x \leqslant C_{8}(T)<\infty$$

于是可得解的整体存在性。但用这种方法，我们不能得到$|u(t)|$关于时间一致性估计，此时要利用一致 Gronwall 引理来证明。

空间一维时，基于 Gagliardo-Nirenberg 不等式

$$\int_\Omega |\nabla u|^{2(\sigma+1)}\mathrm{d}x \leqslant C_6\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{1+\frac{\sigma}{2}}\left(\int_\Omega |\Delta u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{\sigma}{2}}$$

此时代替式(4.3.165)为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x + \int_\Omega |\Delta u|^2\mathrm{d}x \leqslant$$

$$2\left(r + C_1 + C_7\left(\int_\Omega |u|^{2\sigma-2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2\sigma}{\sigma+2}}\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)$$

当 $\sigma\leqslant 2$，则$2\sigma/(\sigma+2)\leqslant 1$，我们可以得到如前的结论。

例2 KdV-Burgers 型方程

$$\partial_t u + \partial_x^{2p+1}u + \kappa u\partial_x u + (-\partial_x^2)^s u = f \quad (4.3.166)$$

其中未知函数 $u(x,t)$是实的，具有2π 周期

$$u(x+2\pi,t) = u(x,t),\forall\ x\in\mathbf{R},t\geqslant 0 \quad (4.3.167)$$

函数 f 和常数 κ 为给定，p 为整数(通常 $p=1$或2)，$(-\partial_x^2)^s$ 为拟微分算子具有符号$|k|^{2s}$。

2π 周期函数 $v(x)$的傅氏系数为 v_k，$k\in\mathbf{Z}$ 即

$$v(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} v_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

H_L^σ表示通常周期函数的分指数 Sobolev 空间，

$$H_L^\sigma = \{v\in L^2(0,L),\sum_{k\in\mathbf{Z}}(1+|k|^2)^\sigma|v_k|^2<\infty\}$$

$H_L^0=L_L^2=L^2(0,L)$，$\overset{0}{H}{}_L^\sigma=\{v\in H_L^\sigma,v_0=0\}$，取 $H=\overset{0}{L}{}^2(0,L)$，

$$(Av)_k = |k|^{2s}v_k,(Cv)_k = (-1)^p\mathrm{i}k^{2p+1}v_k,D(A) = \overset{0}{H}{}_L^{2s},$$

这里 C 是反对称的，连续映照：$D(A^{s-s_0})\to D(A^{s_0})$，$s_0=(2p+1)/(2s)$。设 $f\in\overset{0}{L}{}_L^2$，函数 $F=F(v)=\kappa v\partial_x v-f$ 为局部 Lip 连续：$H_L^1\to H_L^2$，事实上，设 $v\in H_L^1=D(A^{1/(2s)})$，$F(v)=\partial_x(\kappa v^2/2)-f$。因 H_L^1 是一个代数，$\kappa v^2/2\in H_L^1$，则 $F(v)\in L_L^2$。更进一步有

$$F(v)-F(w)=\kappa\partial_x(v^2-w^2)/2$$

$$|F(v)-F(w)|_0\leqslant\frac{\kappa}{2}|v^2-w^2|_0\leqslant\frac{\kappa}{2}|v+w|_{L^\infty}|v-w|_0$$

$|w|_{L_\infty}$囿于$\|\cdot\|_{1/(2s)}$，它为 $H_L^1(\Omega)$的模。因此 F 为局部 Lip 连续：$D(A^{\alpha})\rightarrow D(A^{\alpha\ \gamma})$，$\alpha=\dfrac{1}{2s}$。显然 F 不是整体 Lip 的。如果要证明有界吸收集存在，必须采用截断方法。

设 $u_0\in L_L^2$，$f\in L_L^2$，则问题(4.3.166)、(4.3.167)($s\geqslant1$)取初值 $u(0)=u_0$具有唯一解

$$u\in\varepsilon(\mathbf{R}_+;L_L^2)\cap L^2(0,T;H_L^s),\ \forall T>0$$

以 $S(t)$表示半群 $u_0\rightarrow S(t)u_0=u(t)$，我们有

命题4.3.6 有界集 B_ε

$$B_\varepsilon=\{v\in\overset{0}{H}{}_L^1,|v|_0^2\leqslant(1+\varepsilon)|f|_0^2,|v_x|_0^2\leqslant C_\varepsilon(f)\}$$

其中 $C_\varepsilon(f)=|f|_0^2+C_0(1+\varepsilon)^4\kappa^8|f|_0^{10}$，$C_0$为数值常数，$B_\varepsilon$ 为 $S(t)$的正不变集。即有

$$S(t)B_\varepsilon\subset B_\varepsilon,\forall\ \varepsilon\geqslant0,\forall t\geqslant0$$

更进一步，对任何 $\varepsilon>0$，B_ε 是 $S(t)$在$\overset{0}{H}{}_L^1$ 中的有界吸收集，即有对 H_L^1 的任何集 B，存在 $T_\varepsilon(B)$使得

$$S(t)B\subset B_\varepsilon,\forall\ t\geqslant T_\varepsilon(B),\forall\ \varepsilon>0$$

证明 由式(4.3.166)、(4.3.167)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int u^2\mathrm{d}x+\int u(-\partial_x^2)^s u\mathrm{d}x=\int ufdx,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int(\partial_x u)^2\mathrm{d}x+\int(-\partial_x^2u)(-\partial_x^2)^s u\mathrm{d}x=$$

$$\kappa\int u(\partial_x u)(\partial_{xx}u)\mathrm{d}x+\int(-\partial_x^2u)f\mathrm{d}x$$

因此有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|_0^2+|u_x|_0^2\leqslant\int uf\mathrm{d}x \tag{4.3.168}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_x|_0^2+|u_{xx}|_0^2\leqslant\kappa\int uu_xu_{xx}\mathrm{d}x-\int u_{xx}f\mathrm{d}x \tag{4.3.169}$$

因$|u_x|_0 \geqslant |u|_0$，从式(4.3.168)推出

$$|u(t)|_0 \leqslant |u_0|e^{-t} + |f|_0(1 - e^{-t}) \tag{4.3.170}$$

令

$$M_{L^\infty}^2 = \sup_{0 \leqslant x \leqslant L} |v(x)|^2 \leqslant 2|v|_0|v_x|_\infty, \quad \forall v \in H_L^1 \tag{4.3.171}$$

$$\int u u_x u_{xx} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int u(u_x^2)_x \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int u_x^3 \mathrm{d}x \leqslant |u_x|_{L^\infty} |u_x|_0^2/2 \leqslant$$

$$2^{-\frac{1}{2}} |u_x|_0^{\frac{5}{2}} |u_{xx}|_0^{\frac{1}{2}}$$

因$|u_x|_0^2 \leqslant |u|_0 |u_{xx}|_0$，从 Young 不等式：$8ab \leqslant 7a^{8/7} + b^8$，得

$$\kappa\int u u_x u_{xx} \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4}|u_{xx}|_0^2 + \frac{C_0\kappa^8}{2}|u|^{10} \tag{4.3.172}$$

其中C_0为数值常数$(7^7 2^{-13})$。回到式(4.3.169)，利用式(4.3.172)和

$$\left|\int u_{xx} f \mathrm{d}x\right| \leqslant |f|_0 |u_{xx}|_0 \leqslant |f|_0^2 + |u_{xx}|_0^2/4, \quad |u_x|_0 \leqslant |u_{xx}|_0$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_x|_0^2 + |u_x|_0^2 \leqslant |f|_0^2 + C_0\kappa^8|u|^{10} \tag{4.3.173}$$

现证明B_ε是$S(t)$的正不变集。取$u_0 \in B_\varepsilon, \varepsilon \geqslant 0$，依式(4.3.170)有

$$|u(t)|_0^2 \leqslant (1 + \varepsilon)|f|_0^2, \ \forall\, t \geqslant 0$$

由式(4.3.173)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_x|_0^2 + |u_x|_0^2 \leqslant |f|_0^2 + C_0\kappa^8(1 + \varepsilon)^5|f|_0^5 = C_\varepsilon(f)$$

因$|u_{0_x}|^2 \leqslant C_\varepsilon(f) \Rightarrow |u_x(t)|_0^2 \leqslant C_\varepsilon(f), \forall\, t \geqslant 0$。

其次，对$\varepsilon > 0$，考虑在H_L^1中的任何有界集B，$B \subset \{v \in H_L^1, |v|_0^2 + |v_x|_0^2 \leqslant R^2\}$。依式(4.3.170)，对$u_0 \in B$有

$$|u(t)|_0 \leqslant (1 + \varepsilon)|f|_0^2, \ t \geqslant t_\varepsilon(\Omega) = \lg(\varepsilon|f|_0^2/R) \tag{4.3.174}$$

另一方面，由式(4.3.170)和式(4.3.173)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_x|_0^2 + |u_x|_0^2 \leqslant |f|_0^2 + C_0\kappa^8(|u_0|^{10}e^{-t} + |f|_0^{10}(1 - e^{-t})),$$

积分后得

$$|u_x(t)|_0^2 \leqslant (R^2 + C_0\kappa^8 R^{10} t)\mathrm{e}^{-t} + |f|_0^2 + C_0 k^8 |f|_0^{10}, \forall\ t \geqslant 0 \tag{4.3.175}$$

这就清楚地表明,存在 $T_\varepsilon(R) \geqslant t_\varepsilon(R)$ 使得式(4.3.175)的右端小于 $C_\varepsilon(f)$,($t > T_\varepsilon(R)$)。由此及式(4.3.174)可得

$$S(t)B \subset B_\varepsilon, \forall\ t \geqslant T_\varepsilon(R),$$

命题4.3.6证毕。

现考虑 F 的 Lip 性质。引入截断函数 $\xi(x) \in C_0^\infty$:$\xi(x)=1$,$x \in [0\ ,2]$;$\xi(x)=3-x$,$x \in [2.3,3]$;$\xi(x)=0$,$x \geqslant 3$。置

$$F(v) = f - \xi(|v_x|_0^2/2C_1(f))\kappa v \partial_x v \tag{4.3.176}$$

其中 $C_1(f)$ 为命题4.3.6所给定。考虑问题(4.3.166)、(4.3.167)写为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au + Cu + F(u) = 0 \tag{4.3.177}$$

要求证明式(4.3.176)中的 F 满足式(4.3.6)、(4.3.7),$\alpha = \gamma = \frac{1}{2s}$。注意到

F: $H_L^1 = D(A^{\frac{1}{2s}}) \to D(A^0) = H = L_L^2$ 取 $v, w \in \overset{0}{H}{}_L^1$,有

$$F(v) - F(w) = \tilde{\xi}(v) v \partial_x v - \tilde{\xi}(w) w \partial_x w,$$

其中 $\tilde{\xi}(x) = \kappa\xi(|v_x|^2)/2C_1(f)$。

利用

$$|\xi(x) - \xi(y)| \leqslant |x - y|,$$

$$|F(v) - F(w)|_0 \leqslant |\kappa| |(v^2 - w^2)_x|_0/2 + |\kappa|(|v_x|_0^2 - |w_x|_0^2)|w\partial_x w|_0/2C_1(f)$$

可得

$$|F(v) - F(w)|_0 \leqslant |\tilde{\xi}(v)(v^2 - w^2)_x/2|_0 + |(\tilde{\xi}(v) - \tilde{\xi}(w)) w \partial_x w|_0$$

可以证明

$$|F(v)-F(w)|_0 \leqslant C_2|\kappa|(|f|_0+\kappa^4|f|_0^5)|v_x-w_x|_0$$

(4.3.178)

其中 C_2 为数值常数。事实上，如 $|v_x|_0^2$ 和 $|w_x|_0^2$ 都大于 $2C_1(f)$，则 $F(v)=F(w)=0$，式(4.3.178)显然成立。由对称性设 $|v_x|_0^2 \leqslant 2C_1(f)$ 则考虑二种情况(i) $|v_x-w_x|_0^2 \geqslant 8C_1(f)$；(ii) $|v_x-w_x|_0^2 \leqslant 8C_1(f)$ 可推出式(4.3.178)。

现来构造惯性流形。由于式(4.3.178)，可知式(4.3.6)成立，$\alpha=\gamma=\dfrac{1}{2}$。另一方面，$A$ 的特征值 $\Lambda_k=|\kappa|^{2s}, \kappa\geqslant 1$，有重数为2，$N$ 的条件

$$(N+1)^{2s} \geqslant 3C_2^2\kappa^2(|f|_0+\kappa^4|f|_0^5)^2/2 \qquad (4.3.179)$$

$$(N+1)^{2s}-N^{2s} \geqslant 30C_2^2|\kappa|(|f|_0+\kappa^4|f|_0^5)(N+(N+1))$$

(4.3.180)

$s=1$，式(4.3.180)不一定成立，但当 $s>1$ 是成立的。因 $(N+1)^{2s} \geqslant N^{2s}+2sN^{2s-1}$。由此推出，存在数值常数 C_3(与 s 无关)使得式(4.3.179)、(4.3.180)成立，

$$2N \geqslant C_3\left(\frac{|\kappa|}{s}(|f|_0+\kappa^4|f|_0^5)\right)^{1/(2s-2)} \qquad (4.3.181)$$

分数步长法式(4.3.177)如下：u_k^n 表示 u^n 的第 k 个傅氏分量，$u_k^n \otimes u_k^n = \sum_{l\in Z} u_{k-l}^n \bar{u}_l^n$ 为 u^2 的第 k 个傅氏分量，则分数步法为

$$\begin{cases}(u_k^{n+1/2}-u_k^n)\gamma+|k|^{2s}u^{n+1/2}+\mathrm{i}k\kappa\xi(|u_k^n|_0^2/2C_1(f))u_k^n\otimes u_k^n=0\\ u_k^{n+1}=(1+\mathrm{i}\tau(-1)^pk^{2p+1}/2)(1-\mathrm{i}\tau(-1)^pk^{2p+1}/2)^{-1}u_k^{n+1/2}\\ |u_x^n|_0=\sum\limits_{k\in Z}|k|^2|u_k^n|^2, k\in \mathbf{Z}\end{cases}$$

(4.3.182)

这个格式用物理变量 x,t 表示是隐式的，但在傅氏变量下是显式的，于是利用抽象框架定理，可得

定理4.3.5 方程(4.3.177)在 $\overset{0}{H}{}_L^1$ 中具有 M 维惯性流形 M

$=M_{\phi}$，其中

$$M \leqslant C_3\left(\frac{|\kappa|}{s} + |f|_0 + \kappa^4 |f|_0^5\right)^{\frac{1}{2s-2}}$$

对每个 $\tau>0$，满足 $\tau C_4^{2s}(|\kappa|/s)(|f|_0+\kappa^4|f|_0^5)^{\frac{1}{s-1}}$，$C_3$ 和 C_4 为数值常数；离散方程组(4.3.182)在 $\overset{0}{H}{}_L^1$ 中具有 M 维惯性流形，$M_\tau=M_{\phi\tau}$，进一步有误差估计

$$\|\phi-\phi_\tau\|_{1/2s} \leqslant K\tau^{\xi}(1+|\lg\tau|)$$

其中

$$\xi=(2s-1)(4p+2-2s)^{-1},\ s\in\left[1,p-\frac{1}{2}\right],$$

$$\xi=(2s-1)/(2s),\ s\geqslant p+\frac{1}{2}$$

4.4 Landau-Lifschitz 方程

1997年，郭、鲁等在文献[155]中研究了以下 Landau-Lifschitz 方程周期初值问题

$$\begin{cases}\partial_t\mathbf{u}=-\alpha_1\mathbf{u}\times(\mathbf{u}\times\Delta\mathbf{u})+\alpha_2(\mathbf{u}\times\Delta\mathbf{u}), & x\in\Omega,t>0,\\ \mathbf{u}(x+2\pi,t)=\mathbf{u}(x,t), & x\in\Omega,t\geqslant 0,\\ \mathbf{u}(x,0)=\mathbf{u}_0(x), & x\in\Omega\end{cases}\tag{4.4.1}$$

的离散吸引子问题，其中 $\Omega=[0,2\pi]$，"$\times$"表示 $\mathbf{R}^3$ 中两个向量的叉积，$\mathbf{u}=(u^1,u^2,u^3):\Omega\times[0,\infty)\rightarrow\mathbf{R}^3$ 为旋矢量函数，$\alpha_1\geqslant 0$ 为 Gilbert 阻尼常数，α_2 为常数。如文献[77]所知，在古典意义下，文献[77]中问题(1.1)的解等价于如下方程相同定解问题的解：

$$\partial_t\mathbf{u}=-\alpha_1(\mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{u})\mathbf{u}+\alpha_1|\mathbf{u}|^2\Delta\mathbf{u}+\alpha_2\mathbf{u}\times\Delta\mathbf{u}\tag{4.4.2}$$

现在对文献[77]中问题(1.1)作空间离散化，设 J 为非负整数，$h=\frac{2\pi}{J}$ 为空间步长，将区域 Ω 分为离散网格 $\Omega_h=\{x_1,x_2,\cdots,$

$x_J\}$，其中 $x_j=jh$。离散未知向量函数 $\mathbf{u}=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_J)^T$，$\mathbf{u}_j=\mathbf{u}(x_j)$。

空间差分定义为

$$\nabla_h \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_{jx} = \frac{1}{h}(\mathbf{u}_{j+1}-\mathbf{u}_j),$$

$$\Delta_h \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_{jx\bar{x}} = \frac{1}{h^2}(\mathbf{u}_{j+1}-2\mathbf{u}_j+\mathbf{u}_{j-1})$$

则问题(4.4.1)空间有限差分离散为

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}_j = -\alpha_1 \mathbf{u}_j \times (\mathbf{u}_j \times \Delta_h \mathbf{u}_j) + \alpha_2(\mathbf{u}_j \times \Delta_h \mathbf{u}_j) \\ \mathbf{u}_j(x+2\pi,t) = \mathbf{u}_j(x,t) \\ \mathbf{u}_j(x,0) = \mathbf{u}_0(x_j) \end{cases} \tag{4.4.3}$$

为了对式(4.4.3)的解作先验估计，我们引入两个离散周期函数 $\mathbf{u}=\{\mathbf{u}_j \mid j=1,2,\cdots,J\}$和 $\mathbf{v}=\{\mathbf{v}_j \mid j=1,2,\cdots,J\}$的数量内积为

$$(\mathbf{u},\mathbf{v}) = h\sum_{j=1}^{J}\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_j$$

其中 $\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{v}_j=u_j^1v_j^1+u_j^2v_j^2+u_j^3v_j^3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中两个向量的点积，定义 $L_2(\Omega_h)$中的离散模为

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u},\mathbf{u})^{\frac{1}{2}}$$

$L_\infty(\Omega_h)$的离散模为

$$\|\mathbf{u}\|_\infty = \max_{1\leqslant j\leqslant J}|\mathbf{u}_j|$$

引理4.4.1　对于问题(4.4.3)的离散解，有

$$|\mathbf{u}_j| = |\mathbf{u}_0(x_j)| \text{ 和 } \|\mathbf{u}\|_\infty = \|\mathbf{u}_0\|_\infty \tag{4.4.4}$$

证明　用 $\mathbf{u}_j$ 点乘(4.4.3)的第一个方程，可得：

$$\mathbf{u}_j \cdot \partial_t \mathbf{u}_j = 0,\ \forall\ 1\leqslant j\leqslant J, t\in \mathbf{R}^+$$

因此$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{u}_j|^2=0$，由此即得式(4.4.4)。

引理4.4.2　如果问题(4.4.3)的解满足 $\mathbf{u}_0\in C^1(\Omega)$，则

$$\|\nabla_h \mathbf{u}\| \leqslant \|\nabla_h \mathbf{u}_0\|,\int_0^T \|\mathbf{u}\times\Delta_h \mathbf{u}\|^2 \mathrm{d}\tau \leqslant \frac{1}{2\alpha_1}\|\nabla_h \mathbf{u}_0\|^2 \tag{4.4.5}$$

证明　用 $\Delta_h \mathbf{u}_j$ 点乘式(4.4.3)的第一个方程，得：

$$\Delta_h \mathbf{u}_j \cdot \partial_t \mathbf{u}_j = -\alpha_1 \Delta_h \mathbf{u}_j \cdot (\mathbf{u}_j \times (\mathbf{u}_j \times \Delta_h \mathbf{u}_j)) =$$
$$\alpha_1 (\mathbf{u}_j \times \Delta_h \mathbf{u}_j) \cdot (\mathbf{u}_j \times \Delta_h \mathbf{u}_j) =$$
$$\alpha_1 |\mathbf{u}_j \times \Delta_h \mathbf{u}_j|^2$$

于是式(4.4.3)的第一个方程与 $\Delta_h \mathbf{u}_j$ 作内积即得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla_h \mathbf{u}\|^2 + 2\alpha_1 \|\mathbf{u} \times \Delta_h \mathbf{u}\|^2 = 0 \qquad (4.4.6)$$

由此推出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla_h \mathbf{u}\|^2 \leqslant 0$$

故得 $\|\nabla_h \mathbf{u}\| \leqslant \|\nabla_h \mathbf{u}_0\|$，由式(4.4.6)对 t 积分得式(4.4.5)的第二个不等式成立。

引理4.4.3 设 $\mathbf{u}$ 为区间 $[0, l]$ 上的离散函数，则对任何 $j_0 (1 \leqslant j_0 \leqslant J)$，有

$$\|\mathbf{u}\|^2 \leqslant 2l[|\mathbf{u}_{j_0}|^2 + l\|\nabla_h \mathbf{u}\|^2] \qquad (4.4.7)$$

$$\|\mathbf{u}\|^2 \leqslant \frac{l^2}{2}\|\nabla_h \mathbf{u}\|^2 + l^{-1}\left|h\sum_{j=1}^{J}\mathbf{u}_j\right|^2 \qquad (4.4.8)$$

证明

(i)对任何 $j_0 (1 \leqslant j_0 \leqslant J)$，有

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_{j_0} + h\sum_{s=j_0}^{j-1}\nabla_h \mathbf{u}_s$$

因此

$$|\mathbf{u}_j|^2 \leqslant 2[|\mathbf{u}_{j_0}|^2 + (h\sum_{s=1}^{J}|\nabla_h \mathbf{u}_s|)^2]$$

$$(1, \nabla_h \mathbf{u}) \leqslant \|1\|\|\nabla_h \mathbf{u}\| = \sqrt{l}\,\|\nabla_h \mathbf{u}\|$$

由此可得

$$|\mathbf{u}_j|^2 \leqslant 2[|\mathbf{u}_{j_0}|^2 + l\|\nabla_h \mathbf{u}\|^2]$$

上式对 j 从1到 J 求和得

$$\|\mathbf{u}\|^2 = h\sum_{j=1}^{J}|\mathbf{u}_j|^2 \leqslant 2l[|\mathbf{u}_{j_0}|^2 + l\|\nabla_h \mathbf{u}\|^2]$$

(ii)注意到如下等式

$$|\mathbf{u}_i|^2+|\mathbf{u}_j|^2-2\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_j=(h\sum_{s=j}^{i-1}\nabla_h\mathbf{u}_s)\cdot(h\sum_{s=j}^{i-1}\nabla_h\mathbf{u}_s)\leqslant l\|\nabla_h\mathbf{u}\|^2$$

以 h^2 乘上式并对 i,j 从1到 J 求和得,

$$2l\|\mathbf{u}\|^2-2h^2\sum_{i,j=1}^{J}\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_j\leqslant l^3\|\nabla_h\mathbf{u}\|^2 \tag{4.4.9}$$

因

$$\left|h\sum_{j=1}^{J}\mathbf{u}_j\right|^2=h^2\sum_{i,j=1}^{J}\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{u}_i \tag{4.4.10}$$

由式(4.4.9)和式(4.4.10),即得式(4.4.8)。

推论4.4.1

(i)设 $\mathbf{u}$ 为一离散函数,且设存在 j_0,使得 $\mathbf{u}_{j_0}=0$,则有

$$\|\mathbf{u}\|\leqslant\sqrt{2}\,l\|\nabla_h\mathbf{u}\| \tag{4.4.11}$$

(ii)设 $\mathbf{u}$ 为 l 周期离散函数,则对任何整数 $k>0$,有

$$\|\nabla_h^k\mathbf{u}\|\leqslant l\|\nabla_h^{k+1}\mathbf{u}\| \tag{4.4.12}$$

以下恒设为磁饱和状态,即 $|\mathbf{u}_0|=\sum_{j=1}^{3}(u_0^j)^2=1$。则由引理4.4.1,可知 $|\mathbf{u}_j|=1$, $\forall\ t\in\mathbf{R}$, $j(1\leqslant j\leqslant J)$。

引理4.4.4 设 $|\mathbf{u}_0|=1$,则对任何 j

$$\mathbf{u}_j\cdot\Delta_h\mathbf{u}_j=-\frac{1}{2}[\nabla_h\mathbf{u}_j\cdot(\nabla_h\mathbf{u}_j+\nabla_h\mathbf{u}_{j-1})-\nabla_h\mathbf{u}_{j-1}\cdot(\nabla_h\mathbf{u}_j-\nabla_h\mathbf{u}_{j-1})] \tag{4.4.13}$$

证明 由引理假设及引理4.4.1,推出 $\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{u}_j=1$, $t\in\mathbf{R}^+$。对 $\mathbf{u}_{j-1}\cdot\mathbf{u}_{j-1}=1$ 作用算子 ∇_h,并注意到

$$\nabla_h(\mathbf{u}_{j-1}\cdot\mathbf{v}_{j-1})=\mathbf{u}_j\nabla_h\mathbf{v}_{j-1}+\nabla\mathbf{u}_{j-1}\cdot\mathbf{v}_{j-1} \tag{4.4.14}$$

有

$$\nabla_h\mathbf{u}_{j-1}\cdot\mathbf{u}_j+\nabla_h\mathbf{u}_{j-1}\cdot\mathbf{u}_{j-1}=0 \tag{4.4.15}$$

对式(4.4.15)作用算子 ∇_h,有

$$\nabla_h\mathbf{u}_j\cdot\nabla_h\mathbf{u}_j+\Delta_h\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{u}_j+\nabla_h\mathbf{u}_j\cdot\nabla_h\mathbf{u}_{j-1}+\Delta_h\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{u}_{j-1}=0$$

因此

$$(\mathbf{u}_j+\mathbf{u}_{j-1})\cdot\Delta_h\mathbf{u}_j=-(\nabla_h\mathbf{u}_j\cdot\nabla_h\mathbf{u}_j+\nabla_h\mathbf{u}_j\cdot\nabla_h\mathbf{u}_{j-1})$$

其中，$\Delta_h\mathbf{u}_j=\frac{1}{h}(\nabla_h\mathbf{u}_j-\nabla_h\mathbf{u}_{j-1})$，于是可得

$$\begin{aligned}2\mathbf{u}_j\cdot\Delta_h\mathbf{u}_j&=h\nabla_h\mathbf{u}_{j-1}\cdot\Delta_h\mathbf{u}_j-\\&\quad(\nabla_h\mathbf{u}_j\cdot\nabla_h\mathbf{u}_j+\nabla_h\mathbf{u}_j\cdot\nabla_h\mathbf{u}_{j-1})=\\&\quad\nabla_h\mathbf{u}_{j-1}(\nabla_h\mathbf{u}_j-\nabla_h\mathbf{u}_{j-1})-\nabla_h\mathbf{u}_j(\nabla_h\mathbf{u}_j+\nabla_h\mathbf{u}_{j-1})\end{aligned}$$

对于离散函数 $\mathbf{u}$ 及其 k 阶($k\geqslant 0$)差商$\nabla_h^k\mathbf{u}$，其模有表达式

$$\|\nabla_h^k\mathbf{u}\|_p=\left(h\sum_{j=1}^{J-k}|\nabla_h^k\mathbf{u}_j|^p\right)^{\frac{1}{p}},1\leqslant p<+\infty$$

$$\|\nabla_h^k\mathbf{u}\|_\infty=\max_{j=1,2,\cdots,J-k}|\nabla_h^k\mathbf{u}_j|$$

其中$\nabla_h^k=\nabla_h\cdot\nabla_h\cdots\nabla_h$

引理4.4.5[148]　对任何定义在区间$[0,L]$上的离散函数 $\mathbf{u}=\{\mathbf{u}_j\,|\,j=1,\cdots,J\}$，有

$$\|\mathbf{u}\|_\infty\leqslant K_1\|\mathbf{u}\|^{\frac{1}{2}}(\|\nabla_h\mathbf{u}\|+\|\mathbf{u}\|)^{\frac{1}{2}}\tag{4.4.16}$$

$$\|\nabla_h\mathbf{u}\|\leqslant K_2\|\mathbf{u}\|^{\frac{1}{2}}(\|\Delta_h\mathbf{u}\|+\|\mathbf{u}\|)^{\frac{1}{2}}\tag{4.4.17}$$

$$\|\nabla_h^k\mathbf{u}\|_p\leqslant K_3\|\mathbf{u}\|^{1-\frac{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}{m}}(\|\nabla_h^m\mathbf{u}\|+\|\mathbf{u}\|)^{\frac{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}{m}}\tag{4.4.18}$$

其中 K_1,K_2 和 K_3 为不依赖于离散函数 $\mathbf{u}$ 及步长 h 的常数，$2\leqslant p\leqslant\infty,0\leqslant k<m$。

引理4.4.6　设 $\mathbf{u}_0\in C^1$，$|\mathbf{u}_0|=1$，则有

$$\|\nabla_h\mathbf{u}\|^2\leqslant\|\nabla_h\mathbf{u}_0\|^2\mathrm{e}^{-ct}+E(1-\mathrm{e}^{-ct})\tag{4.4.19}$$

其中 $c=\frac{\alpha_1}{4\pi^2}$，$E=32\pi^2K_3^4(27K_3^4\|\nabla_h\mathbf{u}_0\|^2+1)\|\nabla_h\mathbf{u}_0\|^4$

证明　由(4.4.2)可得

$$\partial_t\mathbf{u}_j=-\alpha_1(\mathbf{u}_j\cdot\Delta_h\mathbf{u}_j)\mathbf{u}_j+\alpha_1|\mathbf{u}_j|^2\Delta_h\mathbf{u}_j+\alpha_2\mathbf{u}_j\times\Delta_h\mathbf{u}_j\tag{4.4.20}$$

式(4.4.20)乘以 $\Delta_h\mathbf{u}$，注意到$(\Delta_h\mathbf{u},\mathbf{u}\times\Delta_h\mathbf{u})=0$，$|\mathbf{u}_0|=1$，则有

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla_h\mathbf{u}\|^2=\alpha_1\|\mathbf{u}_0\|_\infty^2\|\Delta_h\mathbf{u}\|^2-\alpha_1(\Delta_h\mathbf{u},(\mathbf{u}\cdot\Delta_h\mathbf{u})\mathbf{u})\tag{4.4.21}$$

由引理4.4.5,推出

$$\|\nabla_h \mathbf{u}\|_4 \leqslant K_3 \|\nabla_h \mathbf{u}\|^{\frac{3}{4}} (\|\Delta_h \mathbf{u}\| + \|\nabla_h \mathbf{u}\|)^{\frac{1}{4}}$$

由引理4.4.4,有

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(\Delta_h \mathbf{u}, (\mathbf{u} \cdot \Delta_h \mathbf{u})\mathbf{u}) \leqslant \\
&\alpha_1 \|\Delta_h \mathbf{u}\| \|(\mathbf{u} \cdot \Delta_h \mathbf{u})\mathbf{u}\| \leqslant \\
&2\alpha_1 \|\Delta_h \mathbf{u}\| \|\mathbf{u}\|_\infty \|\nabla_h \mathbf{u}\|_4^2 \leqslant \\
&2\alpha_1 K_3^2 [(\|\Delta_h \mathbf{u}\| \|\nabla_h \mathbf{u}\|)^{\frac{3}{2}} + \|\nabla_h \mathbf{u}_0\|^2 \|\Delta_h \mathbf{u}\|] \leqslant \\
&2\alpha_1 K_3^2 (2\varepsilon \|\Delta_h \mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\nabla_h \mathbf{u}_0\|^4 + \frac{27}{256\varepsilon^3} \|\nabla_h \mathbf{u}_0\|^6)
\end{aligned} \tag{4.4.22}$$

将式(4.4.22)代人式(4.4.21),得

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\nabla_h \mathbf{u}\|^2 + \alpha_1 (1 - 4K_3^2 \varepsilon) \|\Delta_h \mathbf{u}\|^2 \leqslant$$

$$2\alpha_1 K_3^2 (\frac{27}{256\varepsilon^3} \|\nabla_h \mathbf{u}_0\|^6 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\nabla_h \mathbf{u}_0\|^4) \tag{4.4.23}$$

取 $\varepsilon = (8K_3^2)^{-1}$,由式(4.4.23),即得

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\nabla_h \mathbf{u}\|^2 + \frac{\alpha_1}{2} \|\Delta_h \mathbf{u}\|^2 \leqslant D$$

其中 $D = 4\alpha_1 K_3^4 (27K_3^4 \|\nabla_h \mathbf{u}_0\|^2 + 1) \|\nabla_h \mathbf{u}_0\|^4$。

最后从推论4.4.1(ii)推出,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\nabla_h \mathbf{u}\|^2 + \frac{\alpha_1}{4\pi^2} \|\nabla_h \mathbf{u}\|^2 \leqslant 2D$$

由 Gronwall 不等式即得式(4.4.19)。

引理4.4.7 设 $\mathbf{u}_0 \in C^2(\Omega)$, $|\mathbf{u}_0| = 1$,则存在常数 δ 和 γ 依赖于 $\|\mathbf{u}\|_{H_p^1(\Omega_h)}$ 但与步长 h 无关,使得

$$\|\Delta_h \mathbf{u}\|^2 \leqslant \frac{\delta}{\gamma} (1 - \mathrm{e}^{-\gamma t}) + \|\Delta_h \mathbf{u}_0\|^2 \mathrm{e}^{-\gamma t} \tag{4.4.24}$$

其中 $\gamma = \frac{\alpha_1}{2\pi^2}$, $\delta = 2187 K_4^{12} (2 + 7^7 K_4^4 + \frac{3.21^7 \alpha_2^8 K_4^4}{16^4 \alpha_1^7}) \|\nabla_h \mathbf{u}_0\|^{10}$。

证明 作用(4.4.20)以算子 Δ_h,再与 $\Delta_h \mathbf{u}$ 作数量内积得,

$$(\Delta_h \mathbf{u}, \partial_t \Delta_h \mathbf{u}) = -\alpha_1(\Delta_h \mathbf{u}, \Delta_h((\mathbf{u}\cdot\Delta_h \mathbf{u})\mathbf{u})) + \alpha_1(\Delta_h \mathbf{u}, \Delta_h^2 \mathbf{u}) + \alpha_2(\Delta_h \mathbf{u}, \Delta_h(\mathbf{u}\times\Delta_h \mathbf{u})) \tag{4.4.25}$$

其中

$$(\Delta_h \mathbf{u}, \partial_t \Delta_h \mathbf{u}) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta_h \mathbf{u}\|^2 \tag{4.4.26}$$

$$\alpha_1(\Delta_h \mathbf{u}, \Delta_h^2 \mathbf{u}) = -\alpha_1\|\nabla_h^3 \mathbf{u}\|^2 \tag{4.4.27}$$

$$-\alpha_1(\Delta_h \mathbf{u}, \Delta_h(\mathbf{u}\cdot\Delta_h \mathbf{u})\mathbf{u})) = \alpha_1(\nabla_h\Delta_h \mathbf{u}, \nabla_h((\mathbf{u}\cdot\Delta_h \mathbf{u})\mathbf{u})) \leqslant \alpha_1\|\nabla_h^3 \mathbf{u}\|\|\nabla_h((\mathbf{u}\cdot\Delta_h \mathbf{u})\mathbf{u})\| \tag{4.4.28}$$

置

$$Q_j = -\frac{1}{2}[\nabla_h \mathbf{u}_j\cdot(\nabla_h \mathbf{u}_j + \nabla_h \mathbf{u}_{j-1}) - \nabla_h \mathbf{u}_{j-1}\cdot(\nabla_h \mathbf{u}_j - \nabla_h \mathbf{u}_{j-1})]$$

由引理4.4.4,有

$$\|\nabla_h((\mathbf{u}\cdot\Delta_h \mathbf{u})\mathbf{u})\|^2 \leqslant h\sum_{j=1}^{J}|\nabla_h(Q_j \mathbf{u}_j)|^2 \leqslant 2h\sum_{j=1}^{J}(|(\nabla_h Q_j)\mathbf{u}_{j+1}|^2 + |Q_j\nabla_h \mathbf{u}_j|^2) \leqslant 4(\|\nabla_h \mathbf{u}\|_\infty^2\|\nabla_h \mathbf{u}\|_4^4 + 2\|\nabla_h \mathbf{u}\|_\infty^2\|\mathbf{u}\|_\infty^2\|\Delta_h \mathbf{u}\|^2)$$

因此

$$\|\nabla_h((\mathbf{u}\cdot\Delta_h \mathbf{u})\mathbf{u})\| \leqslant 2(\|\nabla_h \mathbf{u}\|_\infty\|\|\nabla_h \mathbf{u}\|_4^2 + \sqrt{2}\|\nabla_h \mathbf{u}\|_\infty\|\mathbf{u}\|_\infty\|\Delta_h \mathbf{u}\|) \tag{4.4.29}$$

由引理4.4.4和式(4.4.5),可得

$$\begin{cases} \|\nabla_h \mathbf{u}\|_\infty \leqslant K_3\|\nabla_h \mathbf{u}_0\|^{\frac{3}{4}}(\|\nabla_h^3 \mathbf{u}\| + \|\nabla_h \mathbf{u}_0\|)^{\frac{1}{4}} \\ \|\Delta_h \mathbf{u}\|_\infty \leqslant K_3\|\nabla_h \mathbf{u}_0\|^{\frac{1}{2}}(\|\nabla_h^3 \mathbf{u}\| + \|\nabla_h \mathbf{u}_0\|)^{\frac{1}{2}}, \\ \|\nabla_h \mathbf{u}\|_4^2 \leqslant K_3^2\|\nabla_h \mathbf{u}_0\|^{\frac{7}{4}}(\|\nabla_h^3 \mathbf{u}\| + \|\nabla_h \mathbf{u}_0\|)^{\frac{1}{4}} \end{cases} \tag{4.4.30}$$

将式(4.4.30)代人式(4.4.29),得

$$\|\nabla_h((\mathbf{u}\cdot\Delta_h\mathbf{u})\mathbf{u})\|\leqslant$$

$$2K_3^2(K_3\|\nabla_h\mathbf{u}_0\|^{\frac{10}{4}}(\|\nabla_h^3\mathbf{u}\|+\|\nabla_h\mathbf{u}_0\|)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\sqrt{2}\|\nabla_h\mathbf{u}_0\|^{\frac{5}{4}}(\|\nabla_h^3\mathbf{u}\|+\|\nabla_h\mathbf{u}_0\|)^{\frac{3}{4}}) \tag{4.4.31}$$

由式(4.4.28)、(4.4.31)可得

$$-\alpha_1(\Delta_h\mathbf{u},\Delta_h((\mathbf{u}\cdot\Delta_h\mathbf{u})\mathbf{u}))\leqslant 4\varepsilon\|\nabla_h^3\mathbf{u}\|^2+C_1 \tag{4.4.32}$$

其中

$$C_1=\frac{\alpha_1^4K_3^{12}}{16\varepsilon^3}(27+\frac{7^7\alpha_1^4K_3^4}{256\varepsilon^4})\|\nabla_h\mathbf{u}_0\|^{10}+$$

$$\alpha_1^2K_3^4\|\nabla_h\mathbf{u}_0\|^4/\varepsilon(K_3^2\|\nabla_h\mathbf{u}_0\|^2+2)$$

这就完成了$-\alpha_1(\Delta_h\mathbf{u},\Delta_h((\mathbf{u}\cdot\Delta_h\mathbf{u})\mathbf{u}))$的估计。以下估计$\alpha_2(\Delta_h\mathbf{u},\Delta_h(\mathbf{u}\times\Delta_h\mathbf{u}))$

$$\alpha_2(\Delta_h\mathbf{u},\Delta_h(\mathbf{u}\times\Delta_h\mathbf{u}))=-\alpha_2(\nabla_h\Delta_h\mathbf{u},\nabla_h(\mathbf{u}\times\Delta_h\mathbf{u}))=$$

$$-\alpha_2(\nabla_h\Delta_h\mathbf{u},\nabla_h\mathbf{u}\times\Delta_h\mathbf{u}+\mathbf{u}\times\nabla_h\Delta_h\mathbf{u})=$$

$$-\alpha_2(\nabla_h\Delta_h\mathbf{u},\nabla_h\mathbf{u}\times\Delta_h\mathbf{u})\leqslant$$

$$3|\alpha_2|\|\nabla_h^3\mathbf{u}\|\|\nabla_h\mathbf{u}\|_\infty\|\Delta_h\mathbf{u}\| \tag{4.4.33}$$

由式(4.4.30)、(4.4.31)可得

$$\alpha_2(\Delta_h\mathbf{u},\Delta_h(\mathbf{u}\times\Delta_h\mathbf{u}))\leqslant 2\varepsilon\|\nabla_h^3\mathbf{u}\|^2+C_2 \tag{4.4.34}$$

其中$C_2=\frac{7^7\cdot 3^8\alpha_2^8K_3^{15}}{8^8\varepsilon^7}\|\nabla_h\mathbf{u}_0\|^{10}+\frac{9\alpha_2^2}{4\varepsilon}K_3^2\|\nabla_h\mathbf{u}_0\|^3$。将式(4.4.26)、(4.4.27)、(4.4.32)和式(4.4.34)代入式(4.4.25)，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta_h\mathbf{u}\|^2+(\alpha_1-6\varepsilon)\|\nabla_h^3\mathbf{u}\|^2\leqslant C_3 \tag{4.4.35}$$

其中$C_3=C_1+C_2$。由推论4.4.1(ii)，由式(4.4.35)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta_h\mathbf{u}\|^2+\frac{\alpha_1-6\varepsilon}{2\pi^2}\|\Delta_h\mathbf{u}\|^2\leqslant C_3 \tag{4.4.36}$$

取 $\varepsilon=\frac{\alpha_1}{12}$，则(4.4.36)可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta_h \mathbf{u}\|^2+\frac{\alpha_1}{2\pi^2}\|\Delta_h \mathbf{u}\|^2\leqslant 2C_3 \tag{4.4.37}$$

其中

$$C_3=12\alpha_1K_3^4\|\nabla_h\mathbf{u}_0\|^4(K_3^2\|\nabla_h\mathbf{u}_0\|^2+2)+\frac{3^3\alpha_2^2K_3^4}{\alpha_1}\|\nabla_h\mathbf{u}_0\|^3+$$

$$4\cdot3^6\alpha_1K_3^{12}(1+3\cdot7^7K_3^4+\frac{3^9\cdot7^7K_3^4\alpha_2^8}{4^6\alpha_1})\|\nabla_h\mathbf{u}_0\|^{10}$$

由 Gronwall 引理，即得引理结论。

由以上引理，依常规手段可以证明

定理4.4.1 对 $\mathbf{u}_0\in H^2_{\mathrm{per}}(\Omega_h)$，$|\mathbf{u}_0|=1$，则存在式(4.4.3)的唯一解

$$\mathbf{u}\in H^2_{\mathrm{per}}(\Omega_h)\cap\{\mathbf{u};|\mathbf{u}|=1,\|\mathbf{u}\|=\sqrt{2\pi}\}$$

且映照 $\mathbf{u}_0\in H^2_{\mathrm{per}}(\Omega_h)\to\mathbf{u}(t)\in H^2_{\mathrm{per}}(\Omega_h)$ 为对 t 的连续半群。

定理4.4.2 设 $\Omega=[0,2\pi]$，$|\mathbf{u}_0|=1$，$\mathbf{u}_0\in H^2(\Omega_h)$，$\|\nabla_h\mathbf{u}_0\|\leqslant r_0(r_0\in\mathbf{R}^+)$。则由式(4.4.3)所形成的半群 $S(t)$ 具有有界吸引子 $\mathscr{A}\subset\mathscr{U}$，其中 $\mathscr{U}=\{\mathbf{u}\in H^2_{\mathrm{per}}(\Omega_h);|\mathbf{u}|=1,\|\nabla_h\mathbf{u}\|+\|\Delta_h\mathbf{u}_0\|\leqslant r_0\}$，$\mathscr{A}$ 吸引子在 $H^2_{\mathrm{per}}(\Omega_h)$ 中有界，它是凸的，连通的。

证明 由引理4.4.1，引理4.4.2和引理4.4.6，存在有界吸收集

$$\mathscr{B}_0=\{\mathbf{u}\in H^2_{\mathrm{per}}(\Omega_h);\|\mathbf{u}\|_{H^2_{\mathrm{per}}(\Omega_h)}\leqslant\rho(r_0)\}$$

其中 $\rho_0(r_0)=(2\pi+r_0^2+\frac{\delta}{\gamma})^{\frac{1}{2}}$。即对任意球 $B(0,R)\subset\mathscr{U}$ 当 $\rho'\geqslant\rho(r_0)$ 时，必存在 $t_0(B,\rho')$，使得

$$S(t)\mathscr{B}\subset B(0,\rho')\ ,t\geqslant t_0=\frac{1}{\gamma}\ln\frac{R^2-\delta/\gamma}{(\rho')^2-\delta/\gamma}$$

由文献[80]中定理1.1，可知 $\mathscr{A}=\omega(B_0)$ 为紧的吸引子，它吸引 $\mathscr{U}$ 的有界集，$\mathscr{A}$ 是凸的和连通的。

附论： 由定理4.4.2，可知，LL 方程具有局部吸引子，这种

吸引子具有特别的性质：依 $L_p^2(\Omega_h)$ 模是守恒的，依 $H_p^1(\Omega_h)$ 模是不增的，依 $H_{\mathrm{per}}^2(\Omega_h)$ 模是指数衰减的。

以下估计吸引子的维数。

考虑方程组(4.4.3)的线性变分方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{U}_j(t) + L(\mathbf{u}_j(t))\mathbf{U}_j = 0 \\ \mathbf{U}_{j+rJ}(t) = \mathbf{U}_j(t), 1 \leqslant j \leqslant J, r = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\ \mathbf{U}_j(0) = \mathbf{U}_0(x_j) \end{cases} \tag{4.4.38}$$

其中 $L(\mathbf{u}(t))$ 定义为

$$L(\mathbf{u}_j(t))\mathbf{U}_j = -(\alpha_1 + \alpha_2 A(\mathbf{u}_j))\Delta_h \mathbf{U}_j - 2\alpha_1(\nabla_h \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_j)\nabla_h \mathbf{U}_j + (\alpha_1(\mathbf{u}_j \cdot \Delta_h \mathbf{u}_j) - \alpha_2 A(\Delta_h \mathbf{u}_j))U_j, 0 \leqslant j \leqslant J \tag{4.4.39}$$

其中3×3矩阵 $A(\mathbf{u}_j)$ 由 $\mathbf{u}_j \times \Delta_h \mathbf{u}_j$ 生成，具有如下形式

$$\begin{bmatrix} 0 & -u_j^3 & u_j^2 \\ u_j^3 & 0 & -u_j^1 \\ -u_j^2 & u_j^1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{u}=S(t)\mathbf{u}_0$ 为(4.4.3)的解。

引理4.4.8　对于反对称矩阵 $A(\mathbf{u})$，具有以下性质：

(1) $A^T(\mathbf{u}) = -A(\mathbf{u})$

(2) $(A(\mathbf{u})\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$

(3) $A(\mathbf{u})\mathbf{u} = 0$

(4) $(\mathbf{v}, A(\mathbf{u})\mathbf{w}) = -(A(\mathbf{u})\mathbf{v}, \mathbf{w})$

其中 $A^T(\mathbf{u})$ 为 $A(\mathbf{u})$ 的转置矩阵。

引理4.4.9[156]　对于反对称矩阵 $A(\mathbf{u})(\forall\ \mathbf{u} \in \mathbf{R}^3)$，有

$$\|A(\mathbf{u})\| \leqslant 3\|\mathbf{u}\|$$

其中 $\|A(\mathbf{u})\| = \sup\limits_{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}} \dfrac{\|A(\mathbf{u})\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}$。

因式(4.4.3)的解 $\mathbf{u}$ 在适当初值下，是中等光滑的。我们容易证明线性问题(4.4.38)的解是整体存在的，且 $\mathbf{U}(t) \in L^\infty(0,\infty); H_{\mathrm{per}}^2(\Omega_h))$。令 $G(t)\mathbf{U}_0 = G(t;\mathbf{u}_0)\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}(t)$ 为问题(4.4.38)的解。可以证明 $G(t)$ 实际上是半群 $S(t)$ 在 $\mathbf{u}_0$ 处的切映照。

命题4.4.1　问题(4.4.3)所形成的半群 $S(t)$ 依 $L^2(\Omega_h)$ 模是 Fréchet 可微的，而且其导数为 $L(t,\mathbf{u}_0):\mathbf{U}_0\to\mathbf{U}(t)\in L^2(\Omega_h)$，其中 $\mathbf{U}(t)$ 为问题(4.4.38)的解。

证明　置 $\mathbf{w}=S(t)\mathbf{u}_1-S(t)\mathbf{u}_0-G(t;\mathbf{u}_0)\mathbf{U}_0=\mathbf{w}_1(t)-\mathbf{u}(t)-\mathbf{U}(t)$。则有

$$\begin{cases}\partial_t\mathbf{w}(t)=F(\mathbf{w}_1(t))-F(\mathbf{u}(t))+L(\mathbf{u}(t))\mathbf{U}(t)=\\ \qquad F(\mathbf{u}(t)+\mathbf{U}(t)+\mathbf{w}(t))-\\ \qquad F(\mathbf{u}(t))+L(\mathbf{u}(t))\mathbf{U}(t)\\ \mathbf{w}(0)=0\end{cases}\tag{4.4.40}$$

其中式(4.4.2)在 $\mathbf{u}_j$ 处等价于

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_j(t)}{\mathrm{d}t}=F(\mathbf{u}_j(t))\tag{4.4.41}$$

式(4.4.40)的第一个方程可写为如下形式

$$\partial_t\mathbf{w}(t)+L(\mathbf{u}(t))\mathbf{w}(t)=\Lambda(\mathbf{u},\mathbf{U},\mathbf{w})\tag{4.4.42}$$

其中

$$\Lambda(\mathbf{u},\mathbf{U},\mathbf{w})=F(\mathbf{u}(t)+\mathbf{U}(t)+\mathbf{w}(t))-\\ F(\mathbf{u}(t))+L(\mathbf{u}(t))(\mathbf{U}(t)+\mathbf{w})\tag{4.4.43}$$

作式(4.4.42)和 $\mathbf{w}$ 的内积得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{w}\|^2+(L(\mathbf{u}(t))\mathbf{w}(t),\mathbf{w}(t))\leqslant\\ C(\|\mathbf{w}\|^2+\|\Lambda(\mathbf{u},\mathbf{U},\mathbf{w})\|^2)\tag{4.4.44}$$

现估计式(4.4.44)的各项。

$$-\alpha_1(\Delta_h\mathbf{w},\mathbf{w})=\alpha_1\|\nabla_h\mathbf{w}\|^2\tag{4.4.45}$$

由引理4.4.8，有

$$\alpha_2(A(\mathbf{u})\Delta_h\mathbf{w},\mathbf{w})=-\alpha_2(\nabla_h\mathbf{w},\nabla_h(A(\mathbf{u})\mathbf{w}))=\\ \alpha_2(\nabla_h\mathbf{w},A(\nabla_h\mathbf{u})\mathbf{w})+\alpha_2(\nabla_h\mathbf{w},A(\mathbf{u})\nabla_h\mathbf{w})\leqslant\\ C\|\mathbf{w}\|^2+\varepsilon\|\nabla_h\mathbf{w}\|^2\tag{4.4.46}$$

$$2\alpha_1((\nabla_h\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\nabla_h\mathbf{w},\mathbf{w})\leqslant C\|\mathbf{w}\|^2+\varepsilon\|\nabla_h\mathbf{w}\|^2\tag{4.4.47}$$

由引理4.4.4有

$$-\alpha_1((\mathbf{u}\cdot\Delta_h\mathbf{u})\mathbf{w},\mathbf{w})+\alpha_2(A(\Delta_h\mathbf{u})\mathbf{w},\mathbf{w})\leqslant$$
$$C\|\mathbf{w}\|^2+\varepsilon\|\nabla_h\mathbf{w}\|^2 \qquad (4.4.48)$$

由式(4.4.33)和 $L(\mathbf{u}(t))=-F'(\mathbf{u}(t))$,有

$$\|A(\mathbf{u},\mathbf{U},\mathbf{w})\|\leqslant C\|\mathbf{U}+\mathbf{w}\|^2=$$
$$C\|S(t)\mathbf{u}_1-S(t)\mathbf{u}_0\|^2\leqslant$$
$$C\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_0\|^2 \qquad (4.4.49)$$

由式(4.4.44)～(4.4.49),有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{w}\|^2+(\alpha_1-3\varepsilon)\|\nabla_h\mathbf{w}\|^2\leqslant C\|\mathbf{w}\|^2+$$
$$D\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_0\|^4 \qquad (4.4.50)$$

由 Gronwall 不等式,可得

$$\|\mathbf{w}(t)\|\leqslant C\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_0\|^2,\ t\in[0,T] \qquad (4.4.51)$$

因此

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{\substack{\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_1\in L_p^2(\Omega_h)\\ \|\mathbf{u}_0-\mathbf{u}_1\|<\delta}}\frac{\|S(t)\mathbf{u}_1-S(t)\mathbf{u}_0-G(t;\mathbf{u}_0)\mathbf{U}_0\|}{\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_0\|}=0$$
$$(4.4.52)$$

命题(4.4.1)证毕。

设 $\mathbf{U}_1,\cdots,\mathbf{U}_m$ 为线性方程(4.4.38)具初值 $\mathbf{U}_1(0)=\xi_1,\cdots,\mathbf{U}_m(0)=\xi_m$ 的解,其中 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_m)\in(L_p^2(\Omega_h))^m$,由计算可得

$$\|\mathbf{U}_1(t)\wedge\cdots\wedge\mathbf{U}_m(t)\|_{\wedge^m L_p^2(\Omega_h)}=\|\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_m\|_{\wedge^m L_p^2(\Omega_h)}\times$$
$$\exp\left(\int_0^t\inf\left[\mathrm{tr}(L(S(\tau)\mathbf{u}_0)\cdot Q_m(\tau))\right]\mathrm{d}\tau\right) \qquad (4.4.53)$$

其中:$L(\mathbf{u}(t))=L(S(t)\mathbf{u}_0)$ 为线性映照:$\mathbf{v}\to L(\mathbf{u}(t))\mathbf{v}$;$\wedge$ 为外积;tr 表示算子的迹;$Q_m(t)$ 为 $L_p^2(\Omega_h)$ 到子空间 span$\{\mathbf{U}_1(t),\cdots,\mathbf{U}_m(t)\}$ 的正交投影。从式(4.4.53)可知 m 维立方体的体积 $\wedge_{j=1}^m\xi_j$ 的变化为

$$\omega_m(t) = \sup_{u_0 \in \mathscr{A}} \sup_{\substack{\xi_j \in L_p^2(\Omega_h) \\ \|\xi_j\| \leq 1}} \|U_1(t) \wedge \cdots \wedge U_m(t)\|^2_{\wedge^m L_p^2} \leqslant$$

$$\sup_{u_0 \in \mathscr{A}} \exp\left(\int_0^t \inf\ (\mathrm{tr}(L(S(\tau)u_0) \cdot Q_m(\tau)))\mathrm{d}\tau\right) \qquad (4.4.54)$$

设 $\varphi_k \in L_p^2(\Omega_h), k \in \mathbf{N}$ 为算子 $-\Delta_h$ 的特征向量所组成的正交基。特征值 $\lambda_k = \frac{J^2}{\pi^2}\sin^2\left(\frac{k\pi}{J}\right), k = 1, 2, \cdots, \left[\frac{J}{2}\right]$。我们有

$$\mathrm{tr}(L(S(\tau)u_0) \cdot Q_m(\tau)) = \sum_{k=1}^{\infty}(L(S(\tau)u_0) \cdot Q_m(\tau)\varphi_k, \varphi_k) =$$

$$\sum_{k=1}^{m}(L(S(\tau)u_0)\varphi_k, \varphi_k) \qquad (4.4.55)$$

注意到 $\|\varphi_k\| = 1, \|\nabla_h\varphi_k\| = \lambda_k^{1/2}\|\Delta_h\varphi_k\| = \lambda_k$,

$$-\alpha_1(\Delta_h\varphi_k, \varphi_k) = \alpha_1\lambda_k \qquad (4.4.56)$$

由引理4.4.9和引理4.4.8,有

$$-\alpha_2(A(u)\Delta_h\varphi_k, \varphi_k) = \alpha_2(\Delta_h\varphi_k, A(u)\varphi_k) =$$

$$-\alpha_2(\nabla_h\varphi_k, A(\nabla_h u)\varphi_k + A(u)\nabla_h\varphi_k) =$$

$$-\alpha_2(\nabla_h\varphi_k, A(\nabla_h u)\varphi_k) + A(u)\nabla_h\varphi_k) \leqslant$$

$$|\alpha_2|\|A(\nabla_h u)\|\|\nabla_h\varphi_k\|\|\varphi_k\| \leqslant (3|\alpha_2|\|\nabla_h u_0\|)\lambda_k^{1/2} \leqslant$$

$$\frac{\alpha_1}{4}\lambda_k + \frac{9\alpha_2^2\|\nabla_h u_0\|^2}{\alpha_1} \qquad (4.4.57)$$

$$-2\alpha_1((\nabla_h u \cdot u)\nabla_h\varphi_k, \varphi_k) \leqslant 2\alpha_1\|\nabla_h u \cdot u\|_\infty\lambda_k^{1/2} \leqslant$$

$$2\alpha_1\|\nabla_h u_0\|_\infty\lambda_k^{1/2} \leqslant \frac{\alpha_1}{4}\lambda_k + 4\alpha_1\|\nabla_h u_0\|_\infty^2 \qquad (4.4.58)$$

由引理4.4.4,有

$$\alpha_1((u \cdot \Delta_h u)\varphi_k, \varphi_k) \leqslant 3|\alpha_2|\|\nabla_h u_0\|_\infty^2 \qquad (4.4.59)$$

由引理4.4.9,有

$$-\alpha_2(A(\Delta_h u)\varphi_k, \varphi_k) \leqslant 3|\alpha_2|\|\Delta_h u\| \qquad (4.4.60)$$

由式(4.4.55)~(4.4.60),可得

$$\mathrm{tr}\ (L(S(\tau)\mathbf{u}_0)\cdot Q_m(\tau)) \geqslant \frac{\alpha_1}{2}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k - C_1 m \quad (4.4.61)$$

其中 $C_1 = \dfrac{9\alpha_2^2\|\nabla_h\mathbf{u}_0\|^2}{\alpha_1} + (4\alpha_1 + 3|\alpha_2|)\|\nabla_h\mathbf{u}_0\|_\infty^2 +$ $3|\alpha_2|\|\Delta_h\mathbf{u}_0\|$。

由于 $\sin(x)/x > \dfrac{2}{\pi}, x\in(0,\dfrac{\pi}{2}]$，有

$$\frac{\alpha_1}{2}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k \geqslant \frac{2\alpha_1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m}k^2 = \frac{\alpha_1 m(m+1)(2m+1)}{3\pi^2} \quad (4.4.62)$$

将式(4.4.62)代入式(4.4.61)，可得

$$\mathrm{tr}\ (L(S(\tau)\mathbf{u}_0)\cdot Q_m(\tau)) \geqslant$$

$$\frac{m\alpha_1}{3\pi^2}[(m+1)(2m+1) - \frac{3\pi^2 C_1}{\alpha_1}] \quad (4.4.63)$$

令 $m_0 = \dfrac{1}{4}(\sqrt{1+24\pi^2 C_1/\alpha_1} - 3)$，则当 $m \geqslant m_0$ 时，

$$\mathrm{tr}\ (L(S(\tau)\mathbf{u}_0)\cdot Q_m(\tau)) \geqslant 0 \quad (4.4.64)$$

因此有

定理 4.4.3 在定理 4.4.2 的条件下，离散方程组(4.4.3)的吸引子 $\mathscr{A}$ 的 Hausdorff 维数和 fractal 维数是有限的，即有

$$d_H(\mathscr{A}) \leqslant m_0,\ d_F(\mathscr{A}) \leqslant 2m_0$$

其中

$$m_0 = \frac{1}{4}(\sqrt{1+24\pi^2 C_1/\alpha_1} - 3),$$

$$C_1 = \frac{9\alpha_2^2\|\nabla_h\mathbf{u}_0\|^2}{\alpha_1} + (4\alpha_1 + 3|\alpha_2|)\|\nabla_h\mathbf{u}_0\|_\infty^2 +$$

$$3|\alpha_2|\|\Delta_h\mathbf{u}_0\|$$

4.5 非线性 Galerkin 方法

在有关混沌、惯性流形和整体吸引子等 $t\to\infty$ 时的数值计算

中，通常的计算方法是不适当的，这是因为它具有形式 $c(h)e^T$ 的误差估计，其中 $c(h)$ 是一个与 h 有关的适当小的常数，但当 $T\to\infty$ 时，就可能导致很大的误差。从理论上，也必须建立起 $t\to\infty$ 时的近似解的误差估计及收敛性。一种新型的数值方法——非线性 Galerkin 方法现已应运而生，而且在长时间的数值计算中显示出巨大的优越性。本节将以一类非线性演化方程为例，来说明这种方法。

设非线性演化方程具有如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\nu Au-R(u) \tag{4.5.1}$$

其中

$$R(u)=B(u)-Cu-f \tag{4.5.2}$$

这里 $\nu>0$ 是粘性参数，算子 A 是在 Hilbert 空间上的线性无界自共轭算子，A 是正的和闭的，$D(A)$ 在 H 中是稠的。定义 A 的幂 $A^s, s\in\mathbf{R}$；$D(A^s)$ 具模 $|A^s\cdot|$，是 Hilbert 空间。定义 $V=D(A^{\frac{1}{2}})$，$\|\cdot\|=|A^{\frac{1}{2}}\cdot|$。

因 A^{-1} 是紧的和自共轭的，因此存在 H 的正交基 $\{w_j\}$，它是由 A 的特征向量所组成：

$$Aw_j=\lambda_j w_j \tag{4.5.3}$$

其中 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots,\lambda_j\to\infty, j\to\infty$。

非线性项 $R(u)$ 满足式(4.5.2)，其中 $B(u)=B(u,u)$，$B(\cdot,\cdot)$ 是从 $V\times V$ 到 V' 上的双线性算子。C 是从 V 到 H 的线性算子，$f\in H$。令 b 表示在 V 上的三线性形式

$$b(u,v,w)=(B(u,v),w)_{V',V},\ (\forall u,v,w\in V)$$

设

$$b(u,v,w)=-b(u,w,v),(\forall u,v,w\in V) \tag{4.5.4}$$

$$|b(u,v,w)|\leqslant C_1|u|^{\frac{1}{2}}\cdot\|u\|^{\frac{1}{2}}\cdot\|v\|\cdot|w|^{\frac{1}{2}}\|w\|^{\frac{1}{2}},\quad(\forall u,v,w\in V) \tag{4.5.5}$$

$$|Cu|\leqslant C_2\|u\|,(\forall u\in V) \tag{4.5.6}$$

其中 C_1, C_2 以及以后 $C_i(i>2)$ 均表示正常数。假设 B 映射 $V\times D(A)$ 到 B，有

$$|B(u,v)|\leqslant C_3|u|^{\frac{1}{2}}\cdot\|u\|^{\frac{1}{2}}\cdot\|v\|^{\frac{1}{2}}\cdot|Av|^{\frac{1}{2}} \quad (4.5.7)$$

$$|B(u,v)|\leqslant C_4|u|^{\frac{1}{2}}\cdot|Au|^{\frac{1}{2}}\cdot\|v\|,$$

$$\forall u\in V, v\in D(A) \quad (4.5.8)$$

最后，设 $\nu A+C$ 是正的，即有

$$((\nu A+C)u,u)\geqslant\alpha\|u\|^2, \forall u\in D(A) \quad (4.5.9)$$

其中 $\alpha>0$。对于式(4.5.1)，考虑具初值

$$u(0)=u_0, u_0\in H \quad (4.5.10)$$

的柯西问题。可以证明，问题(4.5.1)、(4.5.10)具有唯一解 $u(t)$，$t>0$；而且

$$u\in\mathscr{C}(\mathbf{R}^+;H)\cap L^2(0,T;V) \quad \forall T>0$$

更进一步，如 $u_0\in V$，则有

$$u\in\mathscr{C}^1(\mathbf{R}^+;H)\cap L^2(0,T;D(A)) \quad \forall T>0$$

现寻求问题(4.5.1)、(4.5.10)如下形式的近似解

$$u_m(t)=\sum_{j=1}^{m}g_{jm}(t)w_j,$$

$$u_m:\mathbf{R}^+\to w_m=\text{span}\{w_1,w_2,\cdots,w_m\}$$

函数 u_m 连同另一未知函数 z_m 一起求解，其中

$$z_m(t)=\sum_{j=m+1}^{2m}h_{jm}(t)w_j,$$

$$z_m:\mathbf{R}^+\to\widetilde{w}_m=\text{span}\{w_{m+1},\cdots,w_{2m}\}$$

(u_m,z_m) 满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_m,v)+\nu((u_m,v))+(Cu_m,v)+b(u_m,u_m,v)+$$

$$b(z_m,u_m,v)+b(u_m,z_m,v)=(f,v), \forall v\in w_m \quad (4.5.11)$$

$$v((z_m,\tilde{v}))+(cz_m,\tilde{v})+b(u_m,u_m,\tilde{v})=$$

$$(f,\tilde{v}),\quad \forall\tilde{v}\in\widetilde{w}_m \quad (4.5.12)$$

连同

$$u_m(0) = P_m u_0 \tag{4.5.13}$$

其中 P_m 表示 H 在 w_m 上的正交投影。

方程组(4.5.11)、(4.5.12)等价于 u_m 的一个常微分方程。事实上，式(4.5.12)对 z_m 是线性的，能写为

$$\nu A z_m + (P_{2m} - P_m) C z_m = (P_{2m} - P_m)(f - B(u_m)) \tag{4.5.14}$$

由于假设(4.5.9)，保证算子 $\nu A + (P_{2m} - P_m)C$ 在 $\tilde{w}_m$ 上是强制的和可逆的，因此 z_m 可显式求解为

$$z_m = (\nu A + (P_{2m} - P_m)C)^{-1}(P_{2m} - P_m)(f - B(u_m)) \tag{4.5.15}$$

因此，方程组(4.5.11)、(4.5.12)等价于常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t} + \nu A u_m + P_m(C u_m + B(u_m) + B(u_m, z_m)) = P_m f \tag{4.5.16}$$

其中 z_m 是式(4.5.15)所给定。显然，当 $z_m=0$ 时，即为古典的 Garlekin 方法。

问题(4.5.16)、(4.5.13)的解 $u_m(t)$ 在最大时间区间 $[0, T_m]$ 的存在唯一性，由标准的常微分方程理论可得到。在以下的先验估计中，可知 $T_m=\infty$。因而我们可考虑 $m\to\infty$ 时近似解的收敛性。

定理 4.5.1 设满足式(4.5.4)、(4.5.9)，u_0 给定于 H 中，则问题(4.5.16)、(4.5.13)的解 u_m 当 $m\to\infty$ 时收敛于问题(4.5.1)、(4.5.10)的解 u。即有

$u_m \to u$ 依 $L^2(0,T;V)$ 和 $L^p(0,T;H)$ 中强收敛 A#，对一切 $T>0, 1\leqslant p<+\infty$,

$$u_m \to u \text{ 依 } L^\infty(\mathbf{R}^+;H) \text{ 弱 * 收敛} \tag{4.5.17}$$

为了证明定理 4.5.1，我们对式(4.5.11)、(4.5.12)的解作先验估计。

取 $v=u_m$ 在式(4.5.11)中，$\tilde{v}=z_m$ 在式(4.5.12)中，并将两等式相加，并由式(4.5.14)得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_m|^2+\nu\|u_m\|^2+(Cu_m,u_m)+$$

$$\nu\|z_m\|^2+(Cz_m,z_m)=(f,u_m+z_m)\qquad(4.5.18)$$

由式(4.5.9),有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_m|^2+\alpha(\|u_m\|^2+\|z_m\|^2)\leqslant|f|\cdot|u_m+z_m|$$

$$(4.5.19)$$

因

$$\|v\|=|A^{\frac{1}{2}}v|\geqslant\lambda_1^{\frac{1}{2}}|v|,\forall v\in V\qquad(4.5.20)$$

则从式(4.5.19)推得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_m|^2+\alpha(\|u_m\|^2+\|z_m\|^2)\leqslant\lambda_1^{-\frac{1}{2}}|f|\cdot\|u_m+z_m\|\leqslant$$

$$\frac{\alpha}{2}(\|u_m\|^2+\|z_m\|^2)+\frac{1}{\alpha\lambda_1}|f|^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_m|^2+\alpha\lambda_1|u_m|^2\leqslant\frac{2}{\alpha\lambda_1}|f|^2\qquad(4.5.21)$$

积分之,得

$$|u_m(t)|^2\leqslant|u_m(0)|^2\mathrm{e}^{-\alpha\lambda_1 t}+\frac{2|f|^2}{\lambda_1^2\alpha^2}(1-\mathrm{e}^{-\alpha\lambda_1 t})\quad\forall t\geqslant 0$$

因此,

当 $m\to+\infty$ 时,序列 u_m 在 $L^\infty(\mathbf{R}^+;H)$ 中有界,

$$(4.5.22)$$

回到式(4.5.21)。对 t 从$[0,T]$上积分,可得

$\forall T>0$,当 $m\to\infty$ 时,u_m 和 z_m 依 $L^2(0,T;V)$ 有界。

$$(4.5.23)$$

现对 z_m 进行估计。在式(4.5.12)中取 $\tilde{v}=z_m$,有

$$\nu\|z_m\|^2+(Cz_m,z_m)=-b(u_m,u_m,z_m)+(f,z_m)$$

由式(4.5.9)、(4.5.7)可得

$$\alpha\|z_m\|^2\leqslant|B(u_m)|\cdot|z_m|+|f|\cdot|z_m|\leqslant$$

$$C_3 |u_m|^{\frac{1}{2}} \| u_m \| \cdot |Au_m|^{\frac{1}{2}} \cdot |z_m| + |f| \cdot |z_m| \quad (4.5.24)$$

因 $u_m \in w_m, z_m \in \widetilde{w}_m$，有

$$|Au_m| \leqslant \lambda_m^{\frac{1}{2}} \| u_m \|, \| u_m \| \leqslant \lambda_m^{\frac{1}{2}} |u_m|, \quad (4.5.25)$$

$$|Az_m| \geqslant \lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}} \| z_m \|, \| z_m \| \geqslant \lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}} |z_m| \quad (4.5.26)$$

联合这些不等式，由式(4.5.24)，可得

$$\begin{aligned} &\alpha\lambda_{m+1} |z_m|^2 \leqslant C_3 \lambda_m |u_m|^2 \cdot |z_m| + |f| \cdot |z_m|, \\ &\alpha\lambda_{m+1} |z_m| \leqslant C_3 \lambda_m |u_m|^2 + |f| \end{aligned} \quad (4.5.27)$$

由式(4.5.22)，有

$$\text{当 } m \to +\infty \text{ 时，} z_m \text{ 依 } L^\infty(\mathbf{R}^+; H) \text{ 有界。} \quad (4.5.28)$$

由式(4.5.25)、(4.5.26)，从式(4.5.24)，有

$$\alpha\lambda_{m-1} |z_m| \leqslant C_3 \lambda_m^{\frac{1}{2}} |u_m| \cdot \| u_m \| + |f|$$

因 $\lambda_1 \leqslant \lambda_m \leqslant \lambda_{m-1}$，有

$$\alpha\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}} |z_m| \leqslant C_3 |u_m| \cdot \| u_m \| + \lambda_1^{-\frac{1}{2}} \cdot |f|$$

由此不等式，以及式(4.5.22)、(4.5.23)可知：

$$\forall T > 0, \lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}} z_m \text{ 当 } m \to +\infty \text{ 时，依 } L^2(0,T;H) \text{ 保持有界。} \quad (4.5.29)$$

现估计 $\frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t}$。由式(4.5.4)、(4.5.5)，有

$$\| B(u,v) \|_{V'} \leqslant C_1 |u|^{\frac{1}{2}} \| u \|^{\frac{1}{2}} |v|^{\frac{1}{2}} \| v \|^{\frac{1}{2}} \quad \forall u,v \in V$$

因此，由估计式(4.5.22)、(4.5.23)和式(4.5.28)推出 $B(u_m)$，$B(z_m, u_m)$ 和 $B(u_m, z_m)$ 依 $L^2(0,T;V')$ 有界。因此由微分方程(4.5.14)得出

$$\forall T > 0, \frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t} \text{ 当 } m \to \infty \text{ 时依 } L^2(0;T;V') \text{ 有界。} \quad (4.5.30)$$

现在证明近似解 u_m 当 $m \to \infty$ 时的收敛性。因 $m \to \infty$ 时，$\lambda_m \to +\infty$，

由式(4.5.29)推出

$$\forall T>0, z_m \to 0 \text{ 依 } L^2(0;T;H) \text{ 强收敛}, m \to +\infty \tag{4.5.31}$$

因此，由式(4.5.23)和式(4.5.28)，有

$\forall T>0, z_m \to 0$ 依 $L^2(0;T;V)$弱收敛；

依 $L^\infty(\mathbf{R}^+, H)$弱 * 收敛。 (4.5.32)

现在研究序列 u_m 的收敛性。估计式(4.5.22)、(4.5.23)和式(4.5.30)，推出存在元素 u^* 和子序列 $m' \to +\infty$，使

$u_{m'} \to u^*$ 在 $L^\infty(0,T;H)$中弱收敛，$\forall T>0$；

依 $L^\infty(\mathbf{R}^+;H)$弱 * 收敛，$m' \to +\infty$， (4.5.33)

$\dfrac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t} \to \dfrac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}t}$在 $L^2(0;T;V')$中弱收敛，$\forall T>0, m' \to +\infty$。由古典的列紧性原理，从式(4.5.33)可得

$$\forall T>0, u_{m'} \to u^* \text{ 依 } L^2(0,T;H) \text{ 强收敛}, m' \to +\infty。 \tag{4.5.34}$$

由式(4.5.31)～(4.5.34)，我们可在式(4.5.11)中取极限，唯一的困难是双线性项。令 $v \in w_m$ 为固定的，且 $m' \geqslant m$，从式(4.5.4)可知

$$b(u_{m'}, u_{m'}, v) = -b(u_{m'}, v, u_{m'})$$

基于式(4.5.7)，$b(\cdot, v, \cdot)$是从 $V \times H$ 到 $\mathbf{R}$ 的双线性连续形式，因此，由式(4.5.33)、(4.5.34)推出 $b(u_{m'}, v, u_{m'}) \to b(u^*, v, u^*)$依 $L^1(0,T)$强收敛，$\forall T>0, m' \to +\infty$。因此

$b(u_m, u_{m'}, v) \to b(u^*, u^*, v)$依 $L^1(0,T)$强收敛，$\forall T>0, m' \to +\infty$。

类似地，有

$$b(z_{m'}, u_{m'}, v) \to b(0, u^*, v) = 0, m' \to +\infty$$

$$b(u_{m'}, z_{m'}, v) \to b(u^*, 0, v) = 0, m' \to +\infty$$

其中依 $L^1(0,T)$强收敛，$\forall T>0$。因此，我们找到极限函数 u^*，满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u^*,v)+\nu((u^*,v))+(cu^*,v)+b(u^*,u^*,v)=(f,v)$$

(4.5.35)

对一切 $v\in w_m$。由连续性，$\forall v\in V$ 成立。进一步，由式(4.5.33)可得

$$u_{m'}(0)\to u^*(0),\text{在 } H \text{ 中弱收敛} \tag{4.5.36}$$

因 $u_{m'}(0)=P_{m'}u_0$，从式(4.5.36)推得

$$u^*(0)=u_0 \tag{4.5.37}$$

由式(4.5.35)、(4.5.36)可知，u^* 是问题(4.5.1)、(4.5.10)的解，因此 $u^*=u$。依式(4.5.33)可知，序列 u_m 收敛于 u。

为了完成定理 4.5.1 的证明，必须验证在式(4.5.17)中的强收敛性。为此，引入表达式

$$X_m=\frac{1}{2}|u_m(T)-u(T)|^2+\int_0^T\{\nu\|u_m-u\|^2+$$

$$(c(u_m-u),u_m-u)+\nu\|z_m\|^2+(cz_m,z_m)\}\mathrm{d}t$$

只要充分地证明

$$\lim_{m\to+\infty}X_m=0 \tag{4.5.38}$$

即证明了定理 4.5.1。事实上，由于式(4.5.9)、(4.5.38)给出 u_m 依 $L^2(0,T;V)$ 强收敛于 u，同时还有

$$u_m(t)\to u(t)\text{ 在 } H \text{ 中强收敛}, \forall t\geqslant 0 \tag{4.5.39}$$

由式(4.5.39)并利用式(4.5.22)和 Lebesgue 控制收敛定理，可知 u_m 依 $L^p(0,T;H)(\forall p\in[1,\infty))$ 强收敛于 u。另外，我们也注意到，除了式(4.5.17) u_m 的强收敛结果外，式(4.5.38)还得到

$$z_m\to 0,\text{依 } L^2(0,T;V)\text{ 强收敛。}\forall T>0, m\to+\infty$$

(4.5.40)

现在证明式(4.5.38)。积分式(4.5.18)从 0 到 T，可得

$$\frac{1}{2}|u_m(T)|^2+\int_0^T\{\nu\|u_m\|^2+(cu_m,u_m)+\nu\|z_m\|^2+$$

$$(cz_m,z_m)\}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}|u_m(0)|^2+\int_0^T(f,u_m+z_m)\mathrm{d}t$$

X_m 可改写为

$$X_m = -(u_m(T), u(T)) + \frac{1}{2}|u(T)|^2 + \frac{1}{2}|u_m(0)|^2 +$$

$$\int_0^T \{-2\nu((u_m, u)) + \nu \| u \|^2 (-cu, u_m - u) -$$

$$(cu_m, u) + (f, u_m + z_m)\} \mathrm{d}t \tag{4.5.41}$$

利用式(4.5.31)、(4.5.33)，在式(4.5.41)中取极限，可得

$$\lim_{m \to +\infty} X_m = -\frac{1}{2}|u(T)|^2 + \frac{1}{2}|u_0|^2 +$$

$$\int_0^T \{-\nu \| u \|^2 - (cu, u) + (f, u)\} \mathrm{d}t$$

由式(4.5.35)，并用 u, u 代替 u^*, v，可知上式极限为 0，即得式(4.5.38)。定理 4.5.2 证毕。

为了在更强的拓扑下改善非线性 Garlekin 方法的收敛性，我们证明如下定理：

定理 4.5.2 设式(4.5.4)～(4.5.9)满足，对于给定 $u_0 \in V$，问题(4.5.16)、(4.5.13)的解 u_m 当 $m \to +\infty$ 时，在如下意义下收敛于问题(4.5.1)、(4.5.10)的解：

$u_m \to u$ 依 $L^2(0,T;D(A))$ 和 $L^p(0,T;V)$ 强收敛，

$T > 0, 1 \leqslant p < \infty$，

$u_m \to u$，依 $L^\infty(\mathbf{R}^+;V)$ 弱 * 收敛。 (4.5.42)

证明 证明取决于 u_m 和 z_m 进一步的先验估计。先证明 $u_m \in L^\infty(\mathbf{R}^+;V)$。令 $v = Au_m$ 于式(4.5.11)；$\tilde{v} = Az_m$ 于式(4.5.12)。相应的项相加，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u_m \|^2 + \nu|Au_m|^2 + \nu|Az_m|^2 = (f, A(u_m + z_m)) -$$

$$(cu_m, Au_m) - (Cz_m, Az_m) - b(u_m, u_m, Au_m) -$$

$$b(z_m, u_m, Au_m) - b(u_m, z_m, Au_m) - b(u_m, u_m, Az_m) \tag{4.5.43}$$

对式(4.5.43)右端的各项可作如下估计：

$$|(f, A(u_m + z_m))| \leqslant \frac{\nu}{12}(|Au_m|^2 + |Az_m|^2) + \frac{6}{\nu}|f|^2 \tag{4.5.44}$$

由式(4.5.6)有

$$|(Cu_m,Au_m)|\leqslant C_2\|u_m\|\cdot|Au_m|\leqslant$$

$$\frac{\nu}{12}|Au_m|^2+\frac{3C_2^2}{\nu}\|u_m\|^2 \qquad (4.5.45)$$

$$|(Cz_m,Az_m)|\leqslant C_2\|z_m\|\cdot|Az_m|\leqslant$$

$$\frac{\nu}{12}|Az_m|^2+\frac{3C_2^2}{\nu}\|z_m\|^2 \qquad (4.5.46)$$

用式(4.5.7)估计三线性项的界。有

$$|b(u_m,u_m,Au_m)|\leqslant|B(u_m,u_m)|\cdot|Au_m|\leqslant$$

$$C_3|u_m|^{\frac{1}{2}}\cdot\|u_m\|\cdot|Au_m|^{\frac{3}{2}}\leqslant\frac{\nu}{12}|Au_m|^2+$$

$$\frac{C_5}{\nu}|u_m|^2\cdot\|u_m\|^4 \qquad (4.5.47)$$

其中 C_5 为绝对常数。类似地

$$|b(z_m,u_m,Au_m)|\leqslant\frac{\nu}{12}|Au_m|^2+\frac{C_5}{\nu}|z_m|^2\cdot\|z_m\|^2\cdot\|u_m\|^2,$$

$$|b(u_m,z_mAu_m)|\leqslant C_3|u_m|^{\frac{1}{2}}\|u_m\|^{\frac{1}{2}}\|z_m\|^{\frac{1}{2}}|Az_m|^{\frac{1}{2}}\cdot|Au_m|\leqslant$$

$$\frac{12}{\nu}|Au_m|^2-\frac{C_6}{\nu}|u_m|\cdot\|u_m\|\cdot\|z_m\|\cdot|Az_m|\leqslant$$

$$\frac{\nu}{12}|Au_m|^2-\frac{\nu}{12}|Az_m|^2+\frac{C_7}{\nu^2}|u_m|^2\|u_m\|^2\|z_m\|^2 \qquad (4.5.48)$$

式(4.5.43)右端的最后一项可估计为

$$|b(u_m,u_m,Az_m)|\leqslant C_3|u_m|^{\frac{1}{2}}\cdot\|u_m\|\cdot|Au_m|^{\frac{1}{2}}\cdot|Az_m|\leqslant$$

$$\frac{\nu}{12}|Au_m|^2+\frac{\nu}{12}|Az_m|^2+\frac{C_7}{\nu^2}|u_m|^2\cdot\|u_m\|^4 \qquad (4.5.49)$$

联合以上不等式，由式(4.5.43)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m\|^2+\nu|Au_m|^2+\nu|Az_m|^2\leqslant\frac{12}{\nu}|f|^2+\frac{6C_2^2}{\nu}\|z_m\|^2+$$

$$C_8\|u_m\|^2\cdot(1+|u_m|^2\cdot\|u_m\|^2+|z_m|^2\cdot\|z_m\|^2+$$

$$|u_m|^2\cdot\|z_m\|^2) \qquad (4.5.50)$$

其中 $C_8=C_8(\nu)$ 依赖于 ν。式(4.5.50)可写为如下的微分不等式

$$\frac{\mathrm{d}y_m}{\mathrm{d}t} \leqslant g_m y_m + h_m \tag{4.5.51}$$

其中

$$y_m(t) = \| u_m(t) \|^2,$$

$$h_m(t) = \frac{12}{\nu} |f|^2 + \frac{6C_2^2}{\nu} \| z_m \|^2,$$

$$g_m(t) = C_8(1 + |u_m(t)|^2 \cdot \| u_m(t) \|^2 + |z_m(t)|^2 \cdot \| z_m(t) \|^2 + |u_m(t)|^2 \cdot \| z_m(t) \|^2) \tag{4.5.52}$$

由式(4.5.51)积分,可得

$$y_m(t) \leqslant y_m(0)\exp\left(\int_0^t g_m(s)\mathrm{d}s\right) + \int_0^t h_m(s)\exp\left(\int_s^t g_m(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}s \quad ,\forall t \geqslant 0 \tag{4.5.53}$$

这个不等式联合式(4.5.22)、(4.5.23)和式(4.5.28),可知 u_m 在 $L^\infty(0,T;V)$ 中对一切 $T>0$ 保持有界。

而 $\| u_m \|^2$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上的有界性,可由如下的一致 Gronwall 不等式得到:

引理 4.5.1 设 $g(t),h(t),y(t)$ 是三个在 $(t_0,+\infty)$ 上局部可积的正函数,且满足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \in L^1_{\mathrm{loc}}([t_0,\infty]),\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \leqslant gy + h,\ t \geqslant t_0 \tag{4.5.54}$$

$$\int_t^{t+1} g(s)\mathrm{d}s \leqslant a_1,\ \int_t^{t+1} h(s)\mathrm{d}s \leqslant a_2,$$

$$\int_t^{t+1} y(s)\mathrm{d}s \leqslant a_3,\ t \geqslant t_0$$

其中 a_i 为正常数($i=1,2,3$),则

$$y(t) \leqslant (a_3 + a_2)\exp(a_1) \quad \forall t \geqslant t_0 + 1 \tag{4.5.55}$$

现在回到式(4.5.51)。我们发现,由于前面的先验估计,

引理 4.5.1 的假设是成立的。由于 u_m, z_m 在 $L^\infty(\mathbf{R}^+; H)$ 中有界，式(4.5.21)对 t 从 t 到 $t+1$ 积分，可知

$$\int_t^{t+1} (\| u_m \|^2 + \| z_m \|^2) \mathrm{d}s \leqslant C'_8 \qquad (4.5.56)$$

其中常数 C'_8 与 m 无关。推之，在式(4.5.52)中，函数 y_m, g_m, h_m 满足式(4.5.54)，其中常数 a_1, a_2, a_3 均与 m 无关。因此，从式(4.5.55)可得

$$y_m(t) = \| u_m(t) \|^2 \leqslant C_9, \quad \forall t \geqslant 1 \qquad (4.5.57)$$

其中 $C_9 = C_9(\nu)$ 与 m 无关。

因此，式(4.5.57)给出 $t \geqslant 1$ 时 $\| u_m(t) \|$ 一致的界，而式(4.5.53)给出 $\| u_m(t) \|$ 在 $t \in [0,1]$ 上的一致的界。于是

$$u_m(t) \text{ 依 } L^\infty(\mathbf{R}^+; H) \text{ 保持有界}, m \to +\infty。 \qquad (4.5.58)$$

积分式(4.5.50)，可得

$$\forall T > 0, u_m \text{ 和 } z_m \text{ 依 } L^2(0,T; D(A)) \text{ 保持有界}, m \to +\infty。 \qquad (4.5.59)$$

下面对序列 z_m 进行估计，希望得到类似式(4.5.59)的估计。在式(4.5.12)中，取 $\tilde{v} = A z_m$，可得

$$\begin{aligned} \nu |A z_m|^2 = & -(C z_m, A z_m) - b(u_m, u_m, A z_m) + \\ & (f, A z_m) \leqslant C_2 \| z_m \| \cdot |A z_m| + \\ & C_3 |u_m|^{\frac{1}{2}} \cdot \| u_m \| \cdot |A u_m|^{\frac{1}{2}} |A z_m| + |f| \cdot |A z_m|, \end{aligned}$$

$$\nu |A z_m| \leqslant C_2 \| z_m \| + C_3 |u_m|^{\frac{1}{2}} \cdot \| u_m \| |A u_m|^{\frac{1}{2}} + |f|$$

则由式(4.5.25)、(4.5.26)有

$$\nu \lambda_{m-1}^{\frac{1}{2}} \| z_m \| \leqslant C_2 \| z_m \| + C_3 \lambda_m^{\frac{1}{4}} |u_m|^{\frac{1}{2}} \| u_m \|^{\frac{3}{2}} + |f|$$

对于大的 m，有

$$\| z_m \| \leqslant \frac{1}{\nu \lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}} - C_2} (C_3 \lambda_m^{\frac{1}{4}} |u_m|^{\frac{1}{2}} \| u_m \|^{\frac{3}{2}} + |f|)$$

这个不等式连同式(4.5.58)，可得

$$z_m \to 0, \text{依 } L(\mathbf{R}^+; V) \text{ 强收敛}, m \to +\infty \qquad (4.5.60)$$

最后，我们需要估计$\frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t}$。从式(4.5.7)和式(4.5.58)～(4.5.60)可得到$B(u_m)$，$B(z_m,u_m)$和$B(u_m,z_m)$在$L^4(0,T;H)$中一致对m有界，而Au_m在$L^2(0,T;H)$中一致有界。因此，由式(4.5.16)推出

$$\forall T>0,\frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t}\text{ 依 }L^2(0,T;H)\text{ 保持有界},m\to+\infty \tag{4.5.61}$$

式(4.5.42)的收敛性结果来自估计式(4.5.58)～(4.5.61)。首先，联合我们以前的收敛性结果式(4.5.17)，当$m\to+\infty$时，我们有

$$u_m\to u,\text{依 }L^2(0,T;D(A))\text{ 弱收敛},\forall T>0 \tag{4.5.62}$$

$$u_m\to u,\text{依 }L^\infty(\mathbf{R}^+;V)\text{ 弱}^*\text{ 收敛} \tag{4.5.63}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t}\to\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},\text{依 }L^2(0,T;H)\text{ 弱收敛},\forall T>0 \tag{4.5.64}$$

$$z_m\to 0,\text{依 }L^2(0,T;D(A))\text{ 弱收敛},\forall T>0 \tag{4.5.65}$$

由此推出式(4.5.47)的弱收敛。为了给出式(4.5.42)强收敛的结果，引入表达式

$$Y_m=\frac{1}{2}\|u_m(T)-u(T)\|^2+\nu\int_0^T(|Au_m-Au|^2+|Az_m|^2)\mathrm{d}t$$

只需充分地证明

$$\lim_{m\to+\infty}Y_m=0$$

即可。事实上，依$L^p(0,T;V)$的强收敛来自估计式(4.5.58)和Lebesgue控制收敛定理。对式(4.5.43)从0到T积分，有

$$\frac{1}{2}\|u_m(T)\|^2+\nu\int_0^T(|Au_m|^2+|Az_m|^2)\mathrm{d}s=z_m+\frac{1}{2}\|u_{0m}\|^2$$

$$\begin{aligned}z_m=\int_0^T\{&(f,A(u_m-z_m))-(Cu_m,Au_m)-(Cz_m,Az_m)-\\&b(u_m,u_m,Au_m)-b(z_m,u_m,Au_m)-b(u_m,z_m,Au_m)-\\&b(u_m,u_m,Az_m)\}\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{4.5.66}$$

因此，Y_m 可改写为

$$Y_m = -((u_m(T),u(T))) + \frac{1}{2}\|u(T)\|^2 + \frac{1}{2}\|u_{0m}\|^2 +$$

$$\nu\int_0^T(-2(Au_m,Au) + |Au|^2)\mathrm{d}s + z_m$$

另从式(4.5.62)和式(4.5.64)得到

$$\lim_{m\to+\infty}\{-((u_m(T),u(T))\} - 2\nu\int_0^T(Au_m,Au)\mathrm{d}s =$$

$$-\|u(T)\|^2 - 2\nu\int_0^T|Au|^2\mathrm{d}s$$

其次，利用 u_m 和 z_m，依 $L^2(0,T;D(A))$ 的弱收敛性，依 $L^2(0,T;V)$ 的强收敛性以及依 $L^\infty(0,T;V)$ 的有界性，可得到 $\lim\limits_{m\to\infty} z_m$。特别地，在式(4.5.66)中，不同的三线性项极限求法是类似的。这里仅考虑第一项的情况。我们有

$$\int_0^T b(u_m,u_m,Au_m)\mathrm{d}t - \int_0^T b(u,u,Au)\mathrm{d}t =$$

$$\int_0^T b(u_m - u,u_m,Au_m)\mathrm{d}s + \int_0^T b(u,u_m - u,Au_m)\mathrm{d}s +$$

$$\int_0^T b(u,u,A(u_m - u))\mathrm{d}s \tag{4.5.67}$$

对于式(4.5.67)右端的第一项，由式(4.5.8)、(4.5.58)和 Hölder 不等式，可得

$$|\int_0^T b(u_m - u,u_m,Au_m)\mathrm{d}s| \leqslant$$

$$C_4\int_0^T|u_m - u|^{\frac{1}{2}}\|u_m\| \cdot |A(u_m - u)|^{\frac{1}{2}} \cdot |Au_m|\mathrm{d}s \leqslant$$

$$C\int_0^T|u_m - u|^{\frac{1}{2}}|A(u_m - u)|^{\frac{1}{2}} \cdot |Au_m|\mathrm{d}s \leqslant$$

$$C(\int_0^T|u_m - u|^2\mathrm{d}s)^{\frac{1}{4}}(\int_0^T|A(u_m - u)|^2\mathrm{d}s)^{\frac{1}{4}} \cdot (\int_0^T|Au_m|^2\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}$$

由式(4.5.17)和式(4.5.59)，可知这些项当 $m\to\infty$ 时趋于 0。对于第二项，利用式(4.5.7)有

$$|\int_0^T b(u_m, u_m - u, Au_m)\mathrm{d}s| \leqslant$$

$$C_3\int_0^T |u|^{\frac{1}{2}} \| u \|^{\frac{1}{2}} \| u_m - u \|^{\frac{1}{2}} |A(u_m - u)|^{\frac{1}{2}} \cdot |Au_m|\mathrm{d}s \leqslant$$

$$C\int_0^T \| u_m - u \|^{\frac{1}{2}} |A(u_m - u)|^{\frac{1}{2}} \cdot |Au_m|\mathrm{d}s \leqslant$$

$$C(\int_0^T \| u_m - u \|^2\mathrm{d}s)^{\frac{1}{4}}(\int_0^T |A(u_m - u)|^2\mathrm{d}s)^{\frac{1}{4}} \cdot (\int_0^T |Au_m|^2\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}$$

由式(4.5.17)和式(4.5.59)，这些项当 $m\to+\infty$ 时也趋于 0。最后，式(4.5.67)中的最后一项关于 u_m 是线性的。由式(4.5.62)易知，当 $m\to+\infty$ 时它趋于 0。于是，我们证明了

$$\int_0^T b(u_m, u_m, Au_m)\mathrm{d}s \to \int_0^T b(u, u, Au)\mathrm{d}s, m \to +\infty$$

至于式(4.5.66)的其余各项，证明是类似的。最后我们得到

$$\lim_{m\to+\infty} Y_m = -\frac{1}{2}\| u(T) \|^2 + \frac{1}{2}\| u_0 \|^2 - \nu\int_0^T |Au|^2\mathrm{d}s +$$

$$\int_0^T \{(f, Au) - (Cu, Au) - b(u, u, Au)\}\mathrm{d}s = 0$$

这就证明了式(4.5.42)的强收敛性，从而证明了定理 4.5.2。

现考虑问题(4.5.1)、(4.5.10)另一种非线性 Galerkin 方法。

设给定 $u_0\in V$，取算子 A 的特征向量作 V 的基。设近似解 u_m 具有形式

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j,$$

$$u_m : \mathbf{R}^+ \to \mathrm{span}\ \{w_1, w_2, \cdots, w_m\} = W_m$$

在再引入未知函数 z_m

$$z_m(t) = \sum_{j=m+1}^{2m} h_{jm}(t)w_j,$$

$$z_m : \mathbf{R}^+ \to \widetilde{W}_m = \mathrm{span}\ \{w_{m+1}, \cdots, w_{2m}\}$$

要求 u_m, z_m 满足以下方程组：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_m, v) + \nu((u_m, v)) + (Cu_m, v) + b(u_m, u_m, v) +$$

$$b(z_m,u_m,v)+b(u_m,z_m,v)+b(z_m,z_m,v)=$$
$$(f,v),\quad \forall v\in W_m \tag{4.5.68}$$
$$\nu((z_m,\tilde{v}))+((z_m,\tilde{v}))+b(u_m,u_m,\tilde{v})+$$
$$b(z_m,u_m,\tilde{v})+b(u_m,z_m,\tilde{v})=(f,\tilde{v}),\forall\tilde{v}\in\tilde{w}_m \tag{4.5.69}$$
$$u_m(0)=P_m u_0 \tag{4.5.70}$$

式(4.5.69)能改写为

$$\nu A z_m+(P_{2m}-P_m)Cz_m+(P_{2m}-P_m)(B(z_m,u_m)+$$
$$B(u_m,z_m))=(P_{2m}-P_m)(f-B(u_m)) \tag{4.5.71}$$

以 $D(u_m)$表示式(4.5.69)左端 z_m 的线性算子。为了证明问题式(4.5.68)～(4.5.70)的解$\{u_m,z_m\}$在小范围的存在性，我们必须证明 $D(u_m)$在 $\tilde{w}_m$ 上是可逆的。我们有

$$\begin{aligned}(D(u_m)\tilde{v},\tilde{v})&=\nu\|\tilde{v}\|^2+(C\tilde{v},\tilde{v})+b(\tilde{v},u_m,\tilde{v})\geqslant\\&\alpha\|\tilde{v}\|^2-C_1|\tilde{v}|\cdot\|\tilde{v}\|\cdot\|u_m\|\geqslant\\&\|\tilde{v}\|^2(\alpha-C_1\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}})\|u_m\|\end{aligned} \tag{4.5.72}$$

选取 m 充分大，使

$$\alpha-C_1\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\|u_0\|\geqslant\frac{\alpha}{2} \tag{4.5.73}$$

则由常微分方程的存在定理，方程组(4.5.68)～(4.5.70)具有解$(u_m(t),z_m(t)),t\in[0,T_m]$。在这个区间上，方程组(4.5.68)、(4.5.69)等价于 u_m 的常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t}+\nu A u_m+P_m(Cu_m+B(u_m+z_m))=P_m f, \tag{4.5.74}$$

$$z_m=D(u_m)^{-1}\{(P_{2m}-P_m)(f-B(u_m))\}$$

条件(4.5.73)是满足的。因 $m\to+\infty$时，$\lambda_m\to\infty$，我们在下面将证明(至少 m 充分大)$T_m=+\infty$，即式(4.5.74)的解定义在$\mathbf{R}^+$上。进一步，我们证明当 $m\to+\infty$时，式(4.5.74)的解趋于问题(4.5.1)的解。

我们有如下定理：

定理 4.5.3 假设式(4.5.4)~(4.5.9)成立，设 u_0 给定在 V 中，则有

(i) 存在常数 $k=k(u_0)$，使得如果 m 满足

$$\alpha - C_1 k \lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{\alpha}{2} \tag{4.5.75}$$

则方程组(4.5.74)、(4.5.70)具有定义在 $\mathbf{R}^+$上的解 u_m；

(ii) 式(4.5.74)、(4.5.70)的解 u_m 当 $m\to+\infty$时收敛于式(4.5.1)、(4.5.10)的解 u。

$u_m \to u$ 依 $L^2(0,T;D(A))$和 $L^p(0,T;V)$强收敛

$\forall T>0, 1\leqslant p<+\infty$，且在 $L^\infty(\mathbf{R}^+;V)$中弱 * 收敛 (4.5.76)

证 明 在式(4.5.75)中的常数 k 将在后面确定。现设式(4.5.73)成立。因此式(4.5.68)~(4.5.70)在某区间$(0,T_m)$上具有解$\{u_m,z_m\}$。我们得到$\{u_m,z_m\}$在$(0,T_m)$上的某些先验估计，它和定理 4.5.1 和 4.5.2 类同。

(i) 先验估计(Ⅰ)。在式(4.5.68)中 $v=u_m$，在式(4.5.69)中取 $\tilde{v}=z_m$，再相加相应的等式，由式(4.5.4)有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_m|^2 + \nu\|u_m\|^2 + (cu_m,u_m) + \nu\|z_m\|^2 + (cz_m,z_m) = (f,u_m+z_m) \tag{4.5.77}$$

因此，类似于由式(4.5.18)得到的式(4.5.22)、(4.5.23)，有

$$u_m \text{ 依 } L^\infty(0,T;H) \text{ 一致对 } m \text{ 有界} \tag{4.5.78}$$

u_m, z_m 依 $L^2(0,T;H)$一致对 m 有界， $\forall T, T\in(0,T_m)$；

如果 $T_m<+\infty, T=T_m$ (4.5.79)

(ii) 先验估计(Ⅱ)。取 $v=Au_m$ 于式(4.5.68)；$\tilde{v}=Az_m$ 于式(4.5.69)，再相加相应的等式，我们有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m\|^2 + \nu|Au_m|^2 + \nu|Az_m|^2 = (f,A(u_m+z_m)) -$$

$$(cu_m,Au_m) - (Cz_m,Az_m) - b(u_m,u_m,Au_m) -$$

$$b(z_m,u_m,Au_m) - b(u_m,z_m,Au_m) - b(z_m,z_m,Au_m) -$$

$$b(u_m,u_m,Az_m)-b(z_m,u_m,Az_m)-b(u_m,z_m,Az_m) \quad (4.5.80)$$

式(4.5.80)右端的某些项在定理 4.5.2 的证明中已知有界。由式(4.5.7)、(4.5.25)、(4.5.26)有

$$|b(z_m,u_m,Au_m)|\leqslant C_3|z_m|^{\frac{1}{2}}\cdot\|z_m\|^{\frac{1}{2}}\|u_m\|^{\frac{1}{2}}|Au_m|^{\frac{3}{2}}\leqslant$$

$$C_3\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}}\right)^{\frac{3}{4}}\cdot\|u_m\|^2\cdot|Az_m|\leqslant C_3\|u_m\|^2\cdot|Az_m|\leqslant$$

$$\frac{\nu}{24}|Az_m|^2+\frac{C_{10}}{\nu}\|u_m\|^4 \quad (4.5.81)$$

$$|b(z_m,z_m,Au_m)|\leqslant C_3|z_m|^{\frac{1}{2}}\cdot\|z_m\|\cdot|Az_m|^{\frac{1}{2}}\cdot|Au_m|\leqslant$$

$$C_3\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}}\right)^{\frac{3}{4}}\cdot\|u_m\|^2\cdot|Az_m|\leqslant C_3\|u_m\|^2\cdot|Az_m|\leqslant$$

$$\frac{\nu}{24}|Az_m|^2+\frac{C_{10}}{\nu}\|u_m\|^2\cdot\|z_m\|^2 \quad (4.5.82)$$

$$|b(z_m,u_m,Az_m)|\leqslant$$

$$C_3|z_m|^{\frac{1}{2}}\cdot\|z_m\|^{\frac{1}{2}}\cdot\|u_m\|^{\frac{1}{2}}\cdot|Au_m|^{\frac{1}{2}}\cdot|Az_m|\leqslant$$

$$C_3\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\|u_m\|\cdot\|z_m\|\cdot\|Az_m\|\leqslant$$

$$\frac{\nu}{24}|Az_m|^2+\frac{C_{10}}{\nu}\|u_m\|^2\|z_m\|^2 \quad (4.5.83)$$

最后,式(4.5.80)右端的最后一项可估计为

$$|b(u_m,z_m,Az_m)|\leqslant C_3|u_m|^{\frac{1}{2}}\cdot\|u_m\|^{\frac{1}{2}}\cdot\|z_m\|^{\frac{1}{2}}\cdot|Az_m|^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\frac{\nu}{24}|Az_m|^2+\frac{C_{11}}{\nu}|u_m|^2\cdot\|u_m\|^2\cdot\|z_m\|^2$$

联合式(4.5.44)～(4.5.49),式(4.5.81)～(4.5.83),可得微分不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m\|^2+\nu|Au_m|^2+\nu|Az_m|^2\leqslant\frac{12}{\nu}|f|^2+\frac{6C_2^2}{\nu}\|z_m\|^2+$$

$$C_{12}\|u_m\|^2\cdot(1+\|u_m\|^2+|u_m|^2\cdot\|u_m\|^2+$$

$$\|z_m\|^2+|u_m|^2\cdot\|z_m\|^2) \quad (4.5.84)$$

其中 $C_{12}=C_{12}(\nu)$依赖于 ν。由式(4.5.84)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m\|^2\leqslant\frac{12}{\nu}|f|^2+\frac{6C_2^2}{\nu}\|z_m\|^2+C_{12}\|u_m\|^2\cdot(1+\|u_m\|^2+|u_m|^2\cdot\|u_m\|^2+\|z_m\|^2+|u_m|^2\cdot\|z_m\|^2) \tag{4.5.85}$$

积分式(4.5.85)从 0 到 T,并利用估计式(4.5.78)、(4.5.79),可得

$$u_m \text{ 依 } L^\infty(0,T;V) \text{ 对 } m \text{ 一致有界}, 0<T<T_m,$$
$$\text{如果 } T_m<+\infty, T=T_m \tag{4.5.86}$$

因此,如果 $T_m<+\infty$,式(4.5.85)提供 $\|u_m(t)\|$ 的上界。$0\leqslant t\leqslant T_m$。类似方法可得到 $T_m=+\infty$时 $\|u_m(t)\|$ 的上界。事实上,从式(4.5.77)有

$$\int_t^{t+1}\|u_m\|^2\mathrm{d}s+\int_t^{t-1}\|z_m\|^2\mathrm{d}s\leqslant C_{13},\quad \forall t\geqslant 0 \tag{4.5.87}$$

其中,常数 C_{13}与 m 无关。再由式(4.5.87)、(4.5.78)可知式(4.5.85)满足引理 4.5.1(一致 Gronwall 引理)的条件。由式(4.5.55)给出 $\|u_m(t)\|$,$t\geqslant 1$ 与 m 无关的界。因式(4.5.85)给出了 $\|u_m(t)\|$,$0\leqslant t\leqslant 1$ 的界,我们有

$$u_m \text{ 依 } L^\infty(0,T_m;V) \text{ 对 } m \text{ 一致有界} \tag{4.5.88}$$

式(4.5.84)对 t 从 0 到 T 积分,可得

$$u_m, z_m \text{ 依 } L^2(0,T;D(A)) \text{ 对 } m \text{ 一致有界}, 0<T<T_m,$$
$$\text{如 } T_m<+\infty, T=T_m \tag{4.5.89}$$

(iii) 先验估计(Ⅲ)。取 $\tilde{v}=Az_m$ 于式(4.5.69),可得

$$\begin{aligned}\nu|Az_m|^2 = &-(Cz_m,Az_m)-b(u_m,u_m,Az_m)-\\ &b(z_m,u_m,Az_m)-b(u_m,z_m,Az_m)+(f,Az_m)\leqslant\\ &C_2\|z_m\|\,|Az_m|+C_3|u_m|^{\frac{1}{2}}\|u_m\|\,|Au_m|^{\frac{1}{2}}\cdot|Az_m|+\\ &C_4|z_m|^{\frac{1}{2}}\cdot|Az_m|^{\frac{3}{2}}\cdot\|u_m\|+\end{aligned}$$

$$C_3|u_m|^{\frac{1}{2}}\|u_m\|^{\frac{1}{2}}\|z_m\|^{\frac{1}{2}}|Az_m|^{\frac{3}{2}}+|f|\cdot|Az_m|$$

上式除以$|Az_m|$,并利用式(4.5.28)、(4.5.29)和式(4.5.88),得

$$\nu|Az_m|\leqslant C_2\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}|Az_m|+C_3\lambda_m^{\frac{1}{4}}+C_4\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}|Az_m|+$$

$$C_3\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{4}}|Az_m|+|f|\quad t\in[0,T_m)$$

因此

$$\{\nu-C_2\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}-C_4\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}-C_3\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{4}}\}|Az_m|\leqslant C_3\lambda_m^{\frac{1}{4}}+|f|$$

当 m 充分大,有

$$\frac{\nu}{2}|Az_m|\leqslant C_3\lambda_m^{\frac{1}{4}}+|f| \tag{4.5.90}$$

因$|Az_m|\geqslant\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}\|z_m\|$,由式(4.5.90)得

$$z_m\to\text{依 } L^\infty(0,T_m,V)\text{ 弱 * 收敛},m\to+\infty \tag{4.5.91}$$

(iv)取极限。首先验证式(4.5.74)的解 u_m,对充分大的 m,定义在$\mathbf{R}^+$上。事实上,从式(4.5.88)可知存在常数k(与 m 无关),使得

$$\|u_m(t)\|\leqslant k,\ 0\leqslant t<T_m \tag{4.5.92}$$

因此,如 m 满足

$$\alpha-C_1k\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\geqslant\frac{\alpha}{2}$$

则由式(4.5.72)有

$$(D(u_m)\tilde{v},\tilde{v})\geqslant\frac{\alpha}{2}\|\tilde{v}\|^2,\ t\in[0,T_m),\tilde{v}\in\tilde{w}_m$$

因此算子 $D(u_m)$在$(0,T_m)$上一致强制。这就直接推出 $T_m=+\infty$,证明了定理 4.5.3 的(i)。

现设式(4.5.75)成立,其中 k 为式(4.5.92)给定,则估计式(4.5.89)、(4.5.91)当 $T_m=+\infty$时成立。这些估计类似于式(4.5.58)~(4.5.60)。因此我们能取极限 $m\to+\infty$。则依式(4.5.17)、(4.5.42)意义下 u_m 收敛于问题(4.5.1)、(4.5.10)的解 u,这就证明了式(4.5.76)。定理 4.5.3 证毕。

现考虑对某些非线性演化方程逼近的一些数值计算格式。空间离散的有谱方法、拟谱方法、有限元法和有限差分法。时间离散的有两种格式:部分或全显式。

设 V_h 表示有限维向量空间,具有两种数量积及其模:$((\cdot,\cdot))_h$,$\|\cdot\|_h$;$(\cdot,\cdot)_h$,$|\cdot|_h$。V_h 为古典的 Sobolev 空间的逼近,$\|\cdot\|_h$ 为离散的 Sobolev 模,$|\cdot|_h$ 为离散的 L^2 模,$V_h\in\{V_l\}$,$l\in\mathscr{H}$,当 h 趋于 0 时,$\{V_l\}$逼近无限维空间 V。设C_i 为正绝对常数,与 h 无关,$S_i=S_i(h)$是依赖与 h 的常数,通常当 $h\to 0$ 时,它趋于 0。设

$$|u_h|_h\leqslant C_1\|u_h\|_h,\ S_1(h)\|u_h\|_h\leqslant|u_h|_h,\ \forall u_h\in V_h \tag{4.5.93}$$

双线性连续形式 $a_h(\cdot,\cdot)$在 V_h 上满足

$$|a_h(u_h,v_h)|\leqslant C_2\|u_h\|_h\|v_h\|_h,\quad \forall u_h,v_h\in V_h \tag{4.5.94}$$

三线性连续形式 $b_h(\cdot,\cdot,\cdot)$在 V_h 上满足

$$b_h(u_h,v_h,v_h)=0,\quad \forall u_h,v_h\in V_h \tag{4.5.95}$$

$$|b_h(u_h,v_h,w_h)|\leqslant C_3|u_h|_h^{\frac{1}{2}}\|u_h\|_h^{\frac{1}{2}}\|v_h\|_h|w_h|_h^{\frac{1}{2}}\|w_h\|_h^{\frac{1}{2}} \tag{4.5.96}$$

双线性连续形式 $d_h(\cdot,\cdot)$在 V_h 上满足

$$|d_h(u_h,v_h)|\leqslant C_4\|u_h\|_h\cdot|v_h|_h,\ \forall u_h,v_h\in V_h \tag{4.5.97}$$

$$a_h(u_h,u_h)+d_h(u_h,u_h)\geqslant C_5\|u_h\|_h^2,\quad \forall u_h\in V_h \tag{4.5.98}$$

现考虑如下的初值问题:

寻求函数 $u_h:\mathbf{R}^+\to V_h$,使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_h,v_h)_h+a_h(u_h,v_h)+b_h(u_h,u_h,v_h)+$$

$$d_h(u_h,v_h)=(f_h,v_h),\forall v_h\in V_h \tag{4.5.99}$$

$$u_h(0)=u_{0h} \tag{4.5.100}$$

其中 u_{0h}在 V_h 中给定,$f_h\in L^\infty(\mathbf{R}^+;V_h)$。因 V_h 为有限维的,由

式(4.5.94)～(4.5.98)可知初值问题(4.5.99)、(4.5.100)具有唯一解 u_h,

$$u_h \in L^{\infty}(\mathbf{R}^+;V_h) \tag{4.5.101}$$

且 u_h 是对 h 一致有界的。

许多具有物理意义的方程可化为式(4.5.99)形式。条件(4.5.94)～(4.5.98)是满足的。设

$$V_h = V_{h_2} \oplus W_h \tag{4.5.102}$$

其中 $V_{h_2} \subset V_h = V_{h_1}$,$V_{h_2}$的元素表为 $y_h, \tilde{y}_h, \cdots$,而 W_h 的元素表为 $z_h, \hat{z}_h, \cdots$,对于任何 $u_h \in V_h$,可唯一表为

$$u_h = y_h + z_h,\ y_h \in V_{h_2},\ z_h \in W_h \tag{4.5.103}$$

现对分解式(4.5.102)作如下假设:

$$\begin{aligned} &|(y_h, z_h)| \leqslant (1-\delta)\, \| y_h \|_h \cdot \| z_h \|_h, \\ &\forall y_h \in V_{h_2},\ \forall z_h \in W_h \end{aligned} \tag{4.5.104}$$

其中 $\delta \in (0,1)$,与 h 无关;且设

$$|z_h|_h \leqslant S_2(h)\ \| z_h \|_h,\ \forall z_h \in W_h \tag{4.5.105}$$

其中 $S_2(h) \to 0$,当 $h \to 0$。

现给出形式(4.5.102)分解的三种重要情况:

(i)谱离散。V_h为 Hilbert 空间 V 的子空间,内积为$((\cdot,\cdot))$,模为$\| \cdot \|$,形式 $a_h(\cdot,\cdot)$为 V 上的双线性连续对称强制形式在 V_h 上的限制,V 连续嵌入和稠在另一个 Hilbert 空间 H,其内积为$(\cdot,\cdot)$,其模为$|\cdot|$,则

$$\| u_h \|_h = \| u_h \|,\ |u_h|_h = |u_h| \quad \forall u_h \in V_h$$

与 a,V,H 相连的无界自共轭算子 A 具有在 H 和 V 中的正交基 $w_j, j \in \mathbf{N}, D(A) \subset V$。

$$Aw_j = \lambda_j w_j, 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant, \cdots, \lambda_j \to \infty, j \to \infty \tag{4.5.106}$$

给定 $m = m_1 \in \mathbf{N}, h = \dfrac{1}{m_1}, V_h = \mathrm{span}\ \{w_1, \cdots, w_{m_1}\}$,式(4.5.99)、(4.5.100)可看作某无限维问题在 V 中的 Garlekin 近似。

考虑分解式(4.5.102)。设另一个整数 $m_2\in\mathbf{N}, m_2<m_1$。记

$$V_{h_2}=\text{span}\{w_1,\cdots,w_{m_2}\}, w_h=\text{span}\{w_{m_2+1},\cdots,w_{m_1}\},$$

此时 V_{h_2} 和 W_h 在 V_h 中正交(数量积 $((\cdot,\cdot))_h=((\cdot,\cdot))$),式(4.5.104)满足 $\delta=1$。关于式(4.5.105),对一切

$$z_h\in W_h,\ z_h=\sum_{j=m_2+1}^{m_1}\xi_j w_j,$$

有

$$|z_h|_h^2=\|\sum_{j=m_2+1}^{m_1}\xi_j w_j\|^2=\sum_{j=m_2+1}^{m_1}|\xi_j|^2\lambda_j\geqslant$$

$$\lambda_{m_2+1}\sum_{j=m_2+1}^{m_1}|\xi_j|^2=\lambda_{m_2+1}|z_h|_h^2$$

因而

$$S_2=(\lambda_{m_2+1})^{\frac{1}{2}}\tag{4.5.107}$$

当为连续问题时,a 和 V 相连于椭圆型边值问题,具有空间边界条件,式(4.5.99)为连续问题的谱或拟谱近似。

(ii)有限元。我们限于最简单情况:一维具分片线性元。空间 V_h 为 $V=H_0^1(\Omega)$ 的子空间,$\Omega=(0,L), L>0$。引入内积

$$((u_h,v_h))_h=((u_h,v_h))=\int_0^L\frac{\mathrm{d}u_h}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v_h}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

数量积 $(\cdot,\cdot)_h$ 在 $L^2(0,L)$ 上,

$$(u_h,v_h)_h=(u_h,v_h)=\int_0^L u_h v_h\mathrm{d}x$$

记 $h_1=h=\dfrac{1}{2N}, h_2=\dfrac{1}{N}, n\in\mathbf{N}$,则 V_h 为在 $(0,L)$ 上的实连续函数空间,它在 0 和 L 上为 0,在区间 $(jh,(j+1)h]$ 上是线性的 $(j=0,1,\cdots,2N-1)$。空间 $V_h=V_{2h}$ 依相同方式定义,但 V_{2h} 在区间 $[2jh,2(j+1)h]$ 上线性,$j=0,1,\cdots,N-1$。

V_h 的节点基由 V_h 的函数 $w_{j,h}$ 所组成。

$$w_{j,h}(jh)=1;\ w_{j,h}(ih)=0\quad i,j=1,2,\cdots,2N-1, i\neq j$$

类似地，V_{2h}的节点基由V_{2h}的函数$w_{j,2h}$组成，

$$w_{j,2h}(2jh)=1;\quad w_{2j,h}(2ih)=0 \qquad i,j=1,2,\cdots,N-1,i\neq j$$

V_h的基由V_{2h}的基和W_h的基所组成：$W_{j,h}$，$j=2i+1$，$i=0,1,\cdots,N-1$。即$u_h\in V_h$可展开为

$$u_h=\sum_{j-1}^{2N-1}u_h(jh)w_{j,h} \tag{4.5.108}$$

可分解为

$$u_h=\sum_{j=1}^{N-1}u_h(2jh)w_{j,2h}+\sum_{i=0}^{N-1}\bar{u}_h((2i+1)h)w_{2i+1,h} \tag{4.5.109}$$

其中$\bar{u}_h((2i+1)h)$为u_h的插值：

$$\bar{u}_h((2i+1)h)=u_h((2i+1)h)-\frac{1}{2}(u_h(2ih)+u_h((2i+2)h) \tag{4.5.110}$$

注意到式(4.5.109)的第一部分和对应于$y_h\in V_{h_2}\subset V_h$，而第二部分和对应于分量$z_h\in W_h$，如果$u_h(jh)=u(jh)$，$j=0,1,\cdots,2N$，则

$$\bar{u}_h((2i+1)h)=\frac{h^2}{2}u''((2i+1)h)+o(h^3),$$

y_h和u_h同阶，而z_h具有因子h^2。

容易验证：对于任何函数$y_h\in V_{h_2}$，在V上正交于任何函数$z_h\in W_h$，因此式(4.5.104)成立，$\delta=1$。式(4.5.105)易被满足，我们有

$$S_2(h)=h/\sqrt{3} \tag{4.5.111}$$

式(4.5.93)易用普通方法验证。例如，对于$S_1(h)$，记$\xi_i=u_h(ih)$，

$$\int_0^L\left(\frac{\mathrm{d}u_h}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2N-1}(\xi_{i+1}-\xi_i)^2$$

类似地

$$\int_0^L(u_h)^2\mathrm{d}x=\frac{h}{3}\sum_{i=0}^{2N-1}(\xi_i^2+\xi_{i+1}^2+\xi_i\xi_{i+1})$$

因此$S_l(h)=\dfrac{h}{2\sqrt{3}}$

(iii)有限差分法。设$V=H_0^1(0,L)$;$h=L/2N,N\in\mathbf{N}$。V_h是由在$[jh,(j+1)h)$上是常数的阶梯函数空间$(j=0,1,\cdots,2N-1)$,它在$[0,h]$和$[L-h,L]$上为$0,V_h=\mathrm{span}\{w_{j,h}\}$,

$$w_{j,h}=\begin{cases}1, & [jh,(j+1)h);\\ 0, & 其它处,j=1,2,\cdots,2N-2\end{cases}$$

$$u_h=\sum_{j=1}^{2N-1}u_h(jh)W_{j,h},\ \forall u_h\in V_h$$

$\{W_{j,h}\}$为V_h的自然基,定义数量积

$$((u_h,v_h))_h=\int_0^{L-h}\nabla_h u_h\nabla_h v_h\mathrm{d}x,$$

$$(u_h,v_h)_h=\int_0^L u_h v_h\mathrm{d}x$$

其中∇_h为向前差分算子

$$(\nabla_h\varphi)(x)=\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

令$h_2=2h$,类似定义$V_{h_2}=V_{2h}$,它的基由$W_{j,2h}$所组成$(j=1,\cdots,N-2)$,$V_{2h}\subset V_h$。在分解式(4.5.102)中,定义$W_h=\mathrm{span}\{W_{2i+1,h}\},i=0,1,\cdots,N-2$。任何函数$u_h\in V_h$可写为

$$\begin{aligned}&u_h=y_h+z_h,\ y_h\in V_{2h}\\&y_h=\sum_{j=1}^{N-2}u_h(2jh)W_{j,2h},\\&z_h=\sum_{i=0}^{N-2}z_h((2i+1)h)W_{2i+1,h}+z_h((2N-2)h)W_{2N-2,h}.\end{aligned}\tag{4.5.112}$$

当$i=0,1,\cdots,N-2$时,

$$z_h((2i+1)h)=\bar{u}_h((2i+1)h)=u_h((2i+1)h)-u_h(2ih),\tag{4.5.113}$$

$$z_h((2N-2)h)=u_h((2N-2)h)\tag{4.5.114}$$

显然,如u_h为光滑函数$u\in H_0^1(0,L)$在V_h上的限制,则y_h和u_h

同阶，z_h 具有 h 的因子。

由如下引理可验证式(4.5.104)和式(4.5.105)。

引理 4.5.2 * 成立如下的 Cauchy-Schwarz 不等式

$$|((y_h, z_h))_h| \leqslant \sqrt{\frac{2}{3}} \| y_h \|_h \| z_h \|_h \quad \forall y \in V_{2h}, \forall z_h \in W_h \tag{4.5.115}$$

证明 我们必须证明

$$\int_0^{L-h} \nabla_h y_h \nabla_h z_h \mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\int_0^{L-h} |\nabla_h y_h|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^{L_h} |\nabla_h z_h|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.5.116}$$

充分证明式(4.5.116)置换区间$(0, L)$为每个粗网格区间$(2jh, 2(j+1)h)$上成立即可，$j=1,2,\cdots,N-3$。取

$$y_h = \begin{cases} m_1, & x \in [2jh, 2(j+1)h); \\ m_2, & x \in [2(j+1)h, (2j+3)h) \end{cases}$$

$$z_h = \begin{cases} 0, & x \in [2jh, (2j-1)h); \\ P_1, & x \in [(2j+1)h, 2(j+1)h); \\ 0, & x \in [2(j+1)h, (2j+3)h); \\ P_2, & x \in [(2j+3)h, 2(j+2)h) \end{cases}$$

在区间$[2jh, (2j+1)h)$，

$$\nabla_h y_h = 0, \ \nabla_h z_h = \frac{P_1}{h}$$

在$[(2j+1)h, 2(j+1)h)$，

$$\nabla_h y_h = \frac{m_2 - m_1}{h}, \ \nabla_h z_h = -\frac{P_1}{h}$$

$$\int_{2jh}^{2(j+1)h} \nabla_h y_h \nabla_h z_h \mathrm{d}x = -\frac{1}{h}(m_2 - m_1)P_1 \leqslant$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_{2jh}^{2(j+1)h} |\nabla_h y_h|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{2jh}^{2(j+1)h} |\nabla_h z_h|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1}{h}|m_2 - m_1| \cdot |P_1| \tag{4.5.117}$$

现考虑端点区间 $j=0,j=N-2,N-1$。仅不同的是,对 $j=0$,$m_1=0$。因此式(4.5.117)仍成立。再考虑区间$[L-4h,L-2h)$和$(L-2h,L-h)$。在$[L-2h,L-h]$上 z_h 不为0(例如 $z_h=P_2$),但在$[L-h,L)$上,$z_h=0$。因此

$$\int_{L-4h}^{L-h}\nabla_h y_h \nabla_h z_h \mathrm{d}x = -\frac{1}{h}m_1(P_2-P_1)\leqslant$$

$$\frac{1}{h}\sqrt{\frac{2}{3}}|m_1|((P_2-P_1)^2+P_1^2+P_2^2)^{\frac{1}{2}}=$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\int_{L-4h}^{L-h}|\nabla_h y_h|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{L-4h}^{L-h}|\nabla_h z_h|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

因$\frac{1}{\sqrt{2}}<\sqrt{\frac{2}{3}}$,故得到式(4.5.115)。

引理 4.5.3 对于 W_h 中的函数,成立如下强的离散 Poincaré 不等式

$$|z_h|_h\leqslant S_2(h)\,\|z_h\|_h,\forall z_h\in W_h,S_2(h)=h \tag{4.5.118}$$

证明 如同引理 4.5.2,充分证明类似的不等式在区间$[2jh,2(j+1)h)$上成立,$j=0,1,\cdots,N-1$,即

$$\int_{2jh}^{2(j-1)h}z_h^2\mathrm{d}x\leqslant S_2^2(h)\int_{2jh}^{2(j+1)h}|\nabla_h z_h|^2\mathrm{d}x \tag{4.5.119}$$

如同引理 4.5.2,可知式(4.5.119)右端积分等于 $2P_1^2/h,j=0,1,\cdots,N-3$;而积分的左端等于 P_1^2h。因此,式(4.5.119)中 $S_2(h)=h/\sqrt{2}$,在区间$[L-4h,L)$上 z_h^2 的积分等于 $h(P_1^2+P_2^2)$,而$|\nabla_h z_h|^2$的积分等于$\frac{1}{h}((P_1-P_2)^2+P_1^2+P_2^2)$,我们得到不等式(4.5.119),$S_2(h)=h$,因而式(4.5.118)成立。

式(4.5.93)的证明是标准的。现证明式(4.5.93)的第二不等式。令 $\xi_j=u_h(jh)$,$u_h=\sum_{j=1}^{2N-2}\xi_j W_{j,h}$,且

$$|u_h|_h^2=h\sum_{j=1}^{2N-2}\xi_j^2,$$

$$\| u_h \|_h^2 = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{2N-2}(\xi_{j+1}-\xi_j)^2 \leqslant \frac{2}{h}\sum_{j=1}^{2N-2}(\xi_{j+1}^2+\xi_j^2) =$$

$$\frac{4}{h}\sum_{j=1}^{2N-2}\xi_j^2,\quad (\text{因 } \xi_0 = \xi_{2N-1} = 0) = \frac{4}{h^2}|u_h|_h^2$$

因此

$$S_1(h) = h/2 \tag{4.5.120}$$

引理 4.5.4 成立如下不等式

$$|y_h|_h = |y_h|_{2h},\ \| y_h \|_h^2 = 2\| y_h \|_{2h}^2,\ \forall y_h \in V_{2h} = V_{h_2} \tag{4.5.121}$$

证明 式(4.5.121)的第一个等式是显然的,因 $|\cdot|_h$ 和 $|\cdot|_{2h}$ 为 L^2 模。为证式(4.5.121)的第二个等式,同引理 4.5.2 一样,因 $\nabla_{2h}y_h=(m_1-m_1)/2h$,$[2jh,2(j+1)h)$,而

$$\nabla_h y_h = \begin{cases} 0, & [2jh,(2j+1)h); \\ \dfrac{m_2-m_1}{h}, & [(2j+1)h,2(j+1)h) \end{cases}$$

因此

$$\int_{2jh}^{2(j+1)h}|\nabla_{2h}y_h|^2\mathrm{d}x = \frac{(m_2-m_1)^2}{2h} = \frac{1}{2}\int_{2jh}^{2(j+1)h}|\nabla_h y_h|^2\mathrm{d}x$$

式(4.5.121)由 $j=0,1,\cdots,N-2$ 求和而得。

附注:空间 V_{2h} 起着如同 V_h 的作用。因此,类似于假设(4.5.93)~(4.5.98)是正确的。特别、式(4.5.93)中的第二个假设为

$$S_1(2h)\| y_h \|_{2h} \leqslant |y_h|_{2h},\quad \forall y_h \in V_{h_2} = V_{2h} \tag{4.5.122}$$

和式(4.5.120)、(4.5.121)相联系,不等式(4.5.122)变为

$$\overline{S}_1(h)\| y_h \|_h \leqslant |y_h|_h \quad \forall y_{h_2} \in V_h = V_{2h}$$

$$\overline{S}(h) = S_1(2h)/2 \tag{4.5.123}$$

对于其它形式的离散(谱和有限元),$\| y_h \|_{h_2} = \| y_h \|_h$,$|y_h|_{h_2} = |y_h|_h$,$\forall y_h \in V_h$。因此式(4.5.123)仍成立,但 $\overline{S}_1(h)=S(h_2)$。

现考虑时间的离散。

格式 I 初值 u_{0h} 在式(4.5.101)中分解为

$$u_{0h} = y_h^0 + z_h^0,\ y_h^0 \in V_{h_2},\ z_h^0 \in W_h$$

我们确定 $y_h^n \in V_{h_2}$，$z_h^n \in W_h$ 为循环序列如下：

设 y_h^n, z_h^n 为已知。定义 $y_h^{n+1} \in V_{2h}$ 和 $z_h^{n+1} \in W_h$ 如下：

$$\frac{1}{k}(y_h^{n+1} - y_h^n, \hat{y}_h)_h + a_h(y_h^{n+1} + z_h^{n+1}, \hat{y}_h) +$$

$$d_h(y_h^{n+1} + z_h^{n+1}, \hat{y}_h) + b_h(y_h^n, y_h^n, \hat{y}_h^n) +$$

$$b_h(y_h^n, z_h^n, \hat{y}_h) + b_h(z_h^n, y_h^n, \hat{y}_h) =$$

$$(f_h^n, \hat{y}_h)_h ; \forall \hat{y}_h \in V_{h_2}, \tag{4.5.124}$$

$$\frac{1}{k}(z_h^{n+1} - z_h^n, \hat{z}_h)_h + a_h(y_h^{n+1} + z_h^{n+1}, \hat{z}_h) +$$

$$d_h(y_h^{n+1} + z_h^{n+1}, \hat{z}_h) + b_h(y_h^n, y_h^n, \hat{z}_h^n) =$$

$$(f_h^n, \hat{z}_h)_h ; \forall \hat{z}_h \in W_h \tag{4.5.125}$$

这里 $k = \Delta t$ 为时间步长，f_h^n 表示 f_h 的平均：

$$f_h^n = \frac{1}{k}\int_{nk}^{(n+1)k} f(t)\mathrm{d}t \tag{4.5.126}$$

如果 f 是光滑的，则可取 $f_h^n = f_h(nk)$，方程(4.5.124)～(4.5.125)是 y_h^{n+1}, z_h^{n+1} 的线性方程组。由于式(4.5.98)，从 Lax-Milgram 定理可知，y_h^{n+1}, z_h^{n+1} 唯一存在。

格式 I′ 稍不同于格式 I。在式(4.5.124)中 b 项处理为对 z 是隐的，式(4.5.124)置换为

$$\frac{1}{k}(y_h^{n+1} - y_h^n, \hat{y}_h)_h + a_h(y_h^{n+1} + z_h^{n+1}, \hat{y}_h) +$$

$$d_h(y_h^{n+1} + z_h^{n+1}, \hat{y}_h) + b_h(y_h^n, y_h^n, \hat{y}_h) +$$

$$b_h(y_h^n, z_h^{n+1}, \hat{y}_h) + b_h(z_h^{n+1}, z_h^{n+1}, \hat{y}_h) = (f_h^n, \hat{y}_h)_h ; \quad \forall \hat{y}_h \in V_{h_2}, \tag{4.5.127}$$

格式 I 设 y_h^n 和 z_h^n 已知，定义 y_h^{n+1}, z_h^{n+1} 如下：

$$\frac{1}{k}(y_h^{n+1} - y_h^n, \hat{y}_h)_h + a_h(y_h^n + z_h^{n+1}, \hat{y}_h) +$$

$$d_h(y_h^n + z_h^{n+1}, \hat{y}_h) + b_h(y_h^n, y_h^n, \hat{y}_h) +$$

$$b_h(y_h^n, z_h^{n+1}, \hat{y}_h) + b_h(z_h^{n+1}, y_h^n, \hat{y}_h) = (f_h^n, \hat{y}_h)_h; \forall \hat{y}_h \in V_{h_2}$$

(4.5.128)

$$\frac{1}{k}(z_h^{n+1} - z_h^n, \hat{z}_h)_h + a_h(y_h^n + z_h^{n+1}, \hat{z}_h) + d_h(y_h^n + z_h^{n+1}, \hat{z}_h) +$$

$$b_h(y_h^n, y_h, \hat{z}_h^n) = (f_h^n, \hat{z}_h)_h; \forall \hat{z}_h \in W_h \qquad (4.5.129)$$

事实上，先由式(4.5.129)解出 z_h^{n+1}，再由式(4.5.127)解 y_h^{n+1}。

格式Ⅲ 这格式不同于格式Ⅱ，它忽略 $z_h^{n+1}-z_h^n$。对于 z_h^{n+1} 的计算，由以下求解确定

$$a_h(y_h^n + z_h^{n+1}, \hat{z}_h) + d_h(y_h^n + z_h^{n+1}, \hat{z}_h) +$$

$$b_h(y_h^n, y_h^n, \hat{z}_h^n) = (f_h^n, \hat{z}_h) \quad \forall \hat{z}_h \in W_h \qquad (4.5.130)$$

z_h^{n+1} 在式(4.5.130)中的可解性由式(4.5.94)、(4.5.98)和 Lax-Milgram 定理得到。

现举两个例子。

例 1 Burgers 方程：设 $\Omega=(0,L)$，$L>0$。令 $V=H_0^1(0,L)$，$H=L^2(0,L)$。对 $v>0$，f 给定，方程为

$$u_t - \nu u_{xx} + uu_x = f, \Omega \times \mathbf{R}^+$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, u(x,0) = u_0(x)$$

这个方程的变分形式为寻求 $u:\mathbf{R}^+ \to H_0^1(\Omega)=V$，使

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u,v) + \nu((u,v)) + b(u,u,v) = (f,v), \forall v \in V$$

(4.5.131)

其中

$$(\varphi,\psi) = \int_0^L \varphi\psi \mathrm{d}x, \ ((\varphi,\psi)) = \int_0^L \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x, \ \forall \varphi,\psi$$

b 为反对称非线性项，

$$b(\varphi,\psi,\theta) = \frac{1}{3}\int_0^L \varphi(\psi_x\theta - \psi\theta_x)\mathrm{d}x$$

运用谱方法、有限元法、有限差分法离散可得到方程(4.5.99)，$d=0$。设式(4.5.94)～(4.5.98)是满足的，$C_2=C_5=\nu$，$C_4=0$，C_3为适当常数。

例 2 Navier-Stokes 方程：设 $\Omega=\mathbf{R}^2$，

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\nu\Delta u+(u\cdot\nabla)u+\frac{1}{2}(\operatorname{div} u)u=f, x\in\Omega, t\geqslant 0$$

$$u=0, \partial\Omega, u(x,0)=u_0(x)$$

化为式(4.5.130)形式 $u:\mathbf{R}^+\to V=H_0^1(\Omega)$。

$$(\varphi,\psi)=\int_\Omega\varphi\psi\mathrm{d}x, ((\varphi,\psi))=\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x,$$

$$b(\varphi,\psi,\theta)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega\varphi_i(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\theta_j-\psi_j\frac{\partial\theta_j}{\partial x_i})\mathrm{d}x$$

用谱方法、二维有限元、二维有限差分法进行离散，可得方程(4.5.99)，$d=0$，假设式(4.5.94)～(4.5.98)满足，$C_2=C_5=\nu$，$C_4=0$，C_3为适当常数。

4.6 稳定性分析及数值结果

考虑如下二维 Navier-Stokes 方程

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}-\nu\Delta\mathbf{u}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\nabla\mathbf{p}=\mathbf{f}, \Omega\times\mathbf{R}_+ \quad (4.6.1)$$

$$\nabla\mathbf{u}=0, \Omega\times\mathbf{R} \quad (4.6.2)$$

$$\mathbf{u}\text{ 为 }\Omega\text{ 周期的} \quad (4.6.3)$$

的非线性 Galerkin 方法的稳定性。其中 $\mathbf{u}=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)$为速度向量，$p=p(x,t)$为压力，$x=(x_1,x_2)$，$\mathbf{f}$ 为外力，$\Omega=(0,L_1)\times(0,L_2)$。如通常所做，投影式(4.6.1)到$\nabla\cdot\mathbf{u}=0$的空间，可得

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}-\nu\Delta\mathbf{u}+\mathbf{B}(\mathbf{u},\mathbf{u})=\mathbf{f} \quad (4.6.4)$$

取 $L_1=L_2=2\pi$，在 $L^2(\Omega)$空间的内积$(\cdot,\cdot)$和模$\|\cdot\|$为

$$(u,v)=\int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x,\ |u|^2=(u,u) \quad (4.6.5)$$

对固定 m,作非线性 Galerkin 方法的近似解 u_{2m}

$$u_{2m}(x,t) = \sum_{k=1}^{2m} g_{k,m}(t)w_k(x) \tag{4.6.6}$$

其中 $w_k(x)$ 为 Stokes 算子的特征函数,分解 u_{2m} 为

$$u_{2m} = y_m + z_m$$

$$y_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} g_{k,m}(t)w_k(x) = P_m u_{2m} \tag{4.6.7}$$

$$z_m(x,t) = \sum_{k=m+1}^{2m} g_{k,m}(t)w_k(x) = (P_{2m} - P_m)u_{2m} = P_m u_{2m} \tag{4.6.8}$$

取如下的近似,使(y_m,z_m)满足方程组

$$\frac{\partial y_m}{\partial t} - \nu\Delta y_m + P_m(B(y_m,y_m) + B(y_m,z_m) + B(z_m,y_m)) = P_m f \tag{4.6.9}$$

$$\frac{\partial z_m}{\partial t} - \nu\Delta z_m + R_m B(y_m) = R_m f \tag{4.6.10}$$

显然,在式(4.6.9)中,如取 $z_m=0$,则对应于 m 个模的通常的 Galerkin 谱方法。现作式(4.6.9)、(4.6.10)对时间的离散化。

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{k} - \nu A y^{n+1} + P(B(y^n) + B(y^n,z^{n+1}) + B(z^{n+1},y^n)) = \rho f^n \tag{4.6.11}$$

$$\frac{z^{n+1} - z^n}{k} + \nu A z^{n+1} + RB(y^n) = Rf^n \tag{4.6.12}$$

其中 $P=P_N$,$R=P_{2N}-P_N$,$A=-\Delta$ 由于

$$|\phi| \leqslant C_1 \|\phi\|, \quad \forall \phi \in V \tag{4.6.13}$$

$$|y|_{L_\infty} \leqslant C_2 L_N \|y\|, \quad \forall y \in P_n V \tag{4.6.14}$$

其中

$$L_N = (1 + \lg \lambda_N/\lambda_1)^{\frac{1}{2}}$$

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_j \to +\infty, \ j \to \infty,$$

$\{\lambda_j\}$为 Stokes 算子的特征值序列。

$$\|\phi\| \leqslant S_N|\phi|, \forall \phi \in P_N V, S_N = \lambda_N^{\frac{1}{2}} \qquad (4.6.15)$$

(式(4.6.11), y^{n+1})+(式(4.6.12), z^{n+1})可得

$$(|y^{n+1}|^2 + |z^{n+1}|^2) - (|y^n|^2 + |z^n|^2) + |y^{n+1} - y^n|^2 +$$
$$|z^{n+1} - z^n|^2 + 2k\nu(\|y^{n+1}\|^2 + \|z^{n+1}\|^2) \leqslant$$
$$2k(f^n, y^{n+1} + z^{n+1}) - 2k(b(y^n, y^n, y^{n+1} - y^n) +$$
$$b(y^n, z^{n+1}, y^{n+1} - y^n) + b(z^{n+1}, y^n, y^{n+1} - y^n),$$
$$|b(y^n, y^n, y^{n+1} - y^n)| \leqslant |y^n|_{L^\infty}\|y^n\||y^{n+1} - y^n|$$
$$|b(y^n, z^{n+1}, y^{n+1} - y^n)| \leqslant |y^n|_{L^\infty}\|z^{n+1}\||y^{n+1} - y^n|$$
$$|b(z^{n+1}, y^n, y^{n+1} - y^n)| \leqslant$$
$$|y^n|_{L^\infty}(\|z^{n+1}\||y^{n+1} - y^n| + |z^{n+1}|\|y^{n+1} - y^n\|) \leqslant$$
$$|y^n|_{L^\infty}\|z^{n+1}\||y^{n+1} - y^n|(1 + S_N/S_{N+1}) \leqslant$$
$$2|y^n|_{L^\infty}\|z^{n+1}\||y^{n+1} - y^n|$$

于是可得

$$(|y^{n+1}|^2 + |z^{n+1}|^2) - (|y^n|^2 + |z^n|^2) + |y^{n+1} - y^n|^2 +$$
$$|z^{n+1} - z^n|^2 + 2k\nu(\|y^{n+1}\|^2 + \|z^{n+1}\|^2) \leqslant$$
$$2k|f^n|(|y^{n+1}| + |z^{n+1}|) +$$
$$2k|y^n|_{L^\infty}(\|y^n\| + 3\|z^{n+1}\|)|y^{n+1} - y^n| \qquad (4.6.16)$$

设 $|y^j|_{L^\infty} \leqslant M_1, \forall j$，则

$$\text{式}(4.6.16) \leqslant \frac{1}{2}|y^{n+1} - y^n|^2 + 4k^2\{M_1^2\|y^n\|^2 +$$
$$9M_1^2\|z^{n+1}\|^2\} + 2kC_1\{\|y^{n+1}\| + \|z^{n+1}\|\}|f^n|$$

因此

$$|y^{n+1}|^2 + |z^{n+1}|^2 - (|y^n|^2 + |z^n|^2) + \frac{1}{2}|y^{n+1} - y^n|^2 +$$
$$|z^{n+1} - z^n|^2 + 2k\nu\|y^{n+1}\|^2 - 4k^2M_1^2\|y^n\|^2 +$$
$$2k(\nu - 18kM_1^2)\|z^{n+1}\|^2 \leqslant 2kC_1\{\|y^{n+1}\| + \|z^{n+1}\|\}|f^n|$$
$$(4.6.17)$$

设满足如下的线性稳定性条件

$$k < \frac{\nu}{4M_1^2} \text{ 和 } k < \frac{\nu}{18M_1^2}$$

即有

$$\nu - 4kM_1^2 \geqslant \frac{1}{2}\nu,\ \nu - 18kM_1^2 \geqslant \frac{1}{2}\nu \qquad (4.6.18)$$

或

$$k < \frac{\nu}{36M_1^2}$$

则由式(4.6.17)，有

$$|y^{n+1}|^2 + |z^{n+1}|^2 - (|y^n|^2 + |z^n|^2) + \frac{1}{2}|y^{n+1} - y^n|^2 + |z^{n+1} - z^n|^2 + \frac{3}{2}k\nu\|y^{n+1}\|^2 - k\nu\|y^n\|^2 + \frac{1}{2}k\nu\|z^{n+1}\|^2 \leqslant \frac{4k}{\nu}C_1^2|f^n|^2 \qquad (4.6.19)$$

式(4.6.19)对 n 求和得

$$|y^r|^2 + |z^r|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{r-1}|y^{n+1} - y^n|^2 + \sum_{n=0}^{r-1}|z^{n+1} - z^n|^2 + \frac{1}{2}k\nu\sum_{n=0}^{r-1}(\|y^{n+1}\|^2 + \|z^{n+1}\|^2) \leqslant \frac{4}{\nu}C_1^2|f|^2_{L^2(0,T;H)} + |u_0|^2 + \nu k\|y_0\|^2 \leqslant \frac{4}{\nu}C_1^2|f|^2_{L^2(0,T;H)} + |u_0|^2 + \frac{\nu^2}{36M_1^2}\|y_0\|^2 \qquad (4.6.20)$$

$$\forall r, 1 \leqslant r \leqslant T/k$$

现在可对式(4.6.19)的某些推论作更明确的表述。令

$$\xi^n = |y^n|^2 + |z^n|^2 + k\nu\|y^n\|^2$$

则由式(4.6.19)可得

$$\xi^{n+1} - \xi^n + \frac{1}{2}k\nu(\|y^{n+1}\|^2 + \|z^{n+1}\|^2) \leqslant 4kC_1^2|f^n|^2/\nu$$

由于

$$\frac{k\nu}{4}(\|y^{n+1}\|^2 + \|z^{n+1}\|^2) \geqslant \frac{k\nu}{4C_1^2}(|y^{n+1}|^2 + |z^{n+1}|^2)$$

因此

$$\frac{k\nu}{2}(\|y^{n+1}\|^2+\|z^{n+1}\|^2)\geqslant\frac{k\nu}{4}\|y^{n+1}\|^2+$$

$$\frac{k\nu}{4C_1^2}(|y^{n+1}|^2+|z^{n+1}|^2)\geqslant\min\left(\frac{1}{4},\frac{k\nu}{4C_1^2}\right)\xi^{n+1}(\text{设 } k<C_1^2/\nu)\geqslant$$

$$\frac{k\nu}{4C_1^2}\xi^{n+1}=k\nu C_3\xi^{n+1}$$

由此得到

$$(1+k\nu C_3)\xi^{n+1}\leqslant\xi^n+\frac{4kC_1^2}{\nu}|f^n|^2 \qquad (4.6.21)$$

对于 $f=0$，则从式(4.6.21)可得

$$\xi^{n+1}\leqslant(1+k\nu C_3)^{-n}\xi_0$$

这就表明，当 $n\to\infty$ 时，ξ^n 指数趋于零。对于 $f\neq0$，我们回到式(4.6.21)。记 $f^n\equiv f,\forall n$

$$(1+k\nu C_3)\xi^{n+1}\leqslant\xi^n+\frac{4kC_1^2}{\nu}|f|^2$$

则

$$\xi^{n+1}\leqslant(1+k\nu C_3)^{-1}\xi^n+\frac{4kC_1^2}{\nu}(1+k\nu C_3)^{-1}|f|^2$$

$$(1+k\nu C_3)^{-1}\xi^n\leqslant(1+k\nu C_3)^{-2}\xi^{n-1}+\frac{4kC_1^2}{\nu}(1+k\nu C_3)^{-2}|f|^2$$

$$\vdots$$

$$(1+k\nu C_3)^{-n}\xi^1\leqslant(1+k\nu C_3)^{-(n+1)}\xi^0+\frac{4kC_1^2}{\nu}(1+k\nu C_3)^{-n-1}|f|^2$$

把上列不等式相加得

$$\xi^{n+1}\leqslant\frac{1}{(1+k\nu C_3)^{n+1}}\xi^n+\frac{4C_1^2}{\nu}|f|^2\frac{1+k_0\nu C_3}{\nu C_3},\ k\leqslant k_0$$

因此，当

$$\frac{1}{(1+k\nu C_3)^{n+1}}\xi^0\leqslant\frac{4C_1^2}{\nu}|f|^2\frac{1+k\nu C_3}{\nu C_3}$$

时，或

$$n+1 \geqslant \frac{1}{1+k\nu C_3}\lg\frac{\nu^2 C_3 \xi^0}{4C_1^2|f|^2}$$

则有

$$\xi^{n+1} \leqslant \frac{8C_1^2}{\nu}|f|^2(\frac{1}{\nu C_3}+k) \leqslant \frac{8C_1^2}{\nu}|f|^2(\frac{1}{\nu C_3}+k_0)$$

因此，对于一切 n 和 $k \leqslant k_0$，有

$$\xi^n \leqslant |u_0|^2 + k_0\nu\|u^0|^2 + \frac{8C_1^2}{\nu}|f|^2(\frac{1}{\nu C_3}-k_0)$$

于是我们得到稳定性的充分条件(4.6.18)。另外，我们也可得到类似线性 Galerkin 方法的稳定性条件。由于

$$|b(y^n,y^n,y^{n+1}-y^n)| \leqslant$$

$$C_4|y^n|^{\frac{1}{2}}\|y^n\|^{\frac{1}{2}}\|y^n\|\,|y^{n+1}-y^n|^{\frac{1}{2}}\|y^{n+1}-y^n\| \leqslant$$

$$C_4S_N|y^n|\|y^n\|\,|y^{n+1}-y^n|,$$

$$|b(y^n,z^{n+1},y^{n+1}-y^n)| \leqslant$$

$$C_4|y^n|^{\frac{1}{2}}\|y^n\|^{\frac{1}{2}}\|z^{n+1}\|\,|y^{n+1}-y^n|^{\frac{1}{2}}\|y^{n+1}-y^n\|^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$C_4S_N|y^n|\|z^{n+1}\|\,|y^{n+1}-y^n|,$$

$$|b(z^{n+1},y^n,y^{n+1}-y^n)| \leqslant$$

$$C_4|z^{n+1}|^{\frac{1}{2}}\|z^{n+1}\|^{\frac{1}{2}}\|y^n\|\,|y^{n+1}-y^n|^{\frac{1}{2}}\|y^{n+1}-y^n\|^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$C_4\left(\frac{S_N}{S_{N+1}}\right)^{\frac{1}{2}}\|z^{n+1}\|\|y^n\|\,|y^{n+1}-y^n| \leqslant$$

$$C_4\left(\frac{S_N}{S_{N+1}}\right)^{\frac{1}{2}}S_N\|z^{n+1}\|\|y^n\|\,|y^{n-1}-y^n|$$

由这些不等式，可得

$$|y^{n-1}|^2+|z^{n+1}|^2-(|y^n|^2+|z^n|^2)+|y^{n+1}-y^n|^2+$$

$$|z^{n+1}-z^n|^2+2k\nu(\|y^{n+1}\|^2+\|z^{n+1}\|^2) \leqslant$$

$$[2kC_4S_N|y^n|\|y^n\|+4kC_4S_N|y^n|\|z^{n+1}\|]\,|y^{n-1}-y^n|+$$

$$2kC_1|f^n|(\|y^{n+1}\|+\|z^{n+1}\|) \leqslant$$

$$\frac{1}{2}|y^{n+1}-y^n|^2+2k^2C_4^2S_N^2|y^n|^2\|y^n\|^2+$$

$$8^2C_4^2S_N^2|y^n|^2\|y^n\|^2+2kC_1|f^n|(\|y^{n+1}\|+\|z^{n+1}\|)$$

用归纳法证明以下不等式。设

$$|y^j|^2+|z^j|^2\leqslant\frac{4}{\nu}C_1^2\int_0^T|f(t)|^2\mathrm{d}t+|y_0|^2+|z_0|^2+k\nu\|y_0\|^2 \tag{4.6.22}$$

$$0\leqslant j\leqslant\frac{T}{k}$$

对于 $j=0,\cdots,n$ 成立($j=0$成立是显然的),要证当 $j=n+1$时也成立。由于

$$|y^{n+1}|^2+|z^{n+1}|^2-(|y^n|^2+|z^n|^2)+\frac{1}{2}|y^{n-1}-y^n|^2-$$
$$|z^{n+1}-z^n|^2+2k\nu\|y^{n+1}\|^2-2k^2C_4^2S_N^2|y^n|^2\|y^n\|^2+$$
$$2k(\nu-4C_4^2S_N^2kA_1)\|z^{n+1}\|^2\leqslant 2kC_1|f^n|(\|y^{n+1}\|+\|z^{n+1}\|) \tag{4.6.23}$$

设

$$\nu-4C_4^2S_N^2kA_1\geqslant\frac{1}{2}\nu \tag{4.6.24}$$

则式(4.6.23)变为

$$|y^{n+1}|^2+|z^{n+1}|^2-(|y^n|^2+|z^n|^2)+\frac{1}{2}|y^{n+1}-y^n|^2+$$
$$|z^{n+1}-z^n|^2+2k\nu\|y^{n-1}|^2-k\nu\|y^n\|^2+$$
$$k\nu\|z^{n-1}\|^2\leqslant 2kC_1|f^n|(\|y^{n+1}\|+\|z^{n+1}\|)\leqslant$$
$$\frac{k\nu}{2}(\|y^{n+1}\|^2+\|z^{n+1}\|^2)+\frac{4k}{\nu}C_1^2|f|^2,$$

$$|y^{n+1}|^2+|z^{n+1}|^2-(|y^n|^2+|z^n|^2)+\frac{1}{2}|y^{n+1}-y^n|^2+$$
$$|z^{n+1}-z^n|^2+\frac{3}{2}k\nu\|y^{n+1}\|^2-k\nu\|y^n\|^2+\frac{k\nu}{2}\|z^{n+1}\|^2\leqslant$$
$$\frac{4C_1^2}{\nu}k|f^n|^2 \tag{4.6.25}$$

式(4.6.25)对 j 求和,$j=0,\cdots,n$,有

$$|y^{n+1}|^2+|z^{n+1}|^2+\frac{k\nu}{2}\sum_{j=1}^{n+1}(\|y^j\|^2+\|z^j\|^2)\leqslant$$

$$\frac{4kC_1^2}{\nu}\sum_{j=0}^{n}|f^j|^2+|y_0|^2+|z_0|^2+k\nu\|y_0\|^2\leqslant\Lambda_1(u_0,f)$$

因此式(4.6.22)对 $j=n+1$成立。条件(4.6.14)即是类似于对于 N 个模的线性 Galerkin 方法的稳定性条件。

以下举出两个例子,作数值比较:

例1 方程(4.6.1)中,$p=0$,u 作为精确解给出,f 则由式(4.6.1)决定。取 $m=64$,通常的 Galerkin 方法为128个模,非线性 Galerkin 方法为64个模。精确解 $u=(u_1,u_2)$为

$$u_1=\cos t(e^{\cos y}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\cos s}ds)$$

$$u_2=\cos t(e^{\cos x}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\cos s}ds)$$

时间步长 $\Delta t=10^{-3}$,粘性系数 $\nu=5\times10^{-4}$。图4.1(a)表示非线性 Galerkin 格式和通常的 Galerkin 格式的误差随时间的变化,图4.1(b)表示通常的和非线性 Galerkin 方法所用计算时间的比较,图4.1(c)和图4.1(d)为非线性 Galerkin 的合理性提供数值上的证据。

例2 精确解为

$$u_1(x,y,t)=-\Phi(t)(\cos 5x)(\sin 5y)e^{(\cos 5x)(\cos 5y)}$$

$$u_2(x,y,t)=\Phi(t)(\cos 5y)(\sin 5x)e^{(\cos 5x)(\cos 5y)}$$

$$\Phi(t)=\frac{1}{8}[\frac{1}{10}e^{(\sin 2t-3\sin 2\pi t)}+\cos(2\sqrt{2}t)]+0.395$$

取 $m=128$,通常的 Galerkin 方法具256模,$\Delta t=5\times10^{-3}$,$\nu=10^{-2}$。图4.2为 CPU 时间的比较。

4.7 二维 Newton-Boussinesq 方程

1995年,郭在文献[157]中对于描述 Benard 流的二维 New-

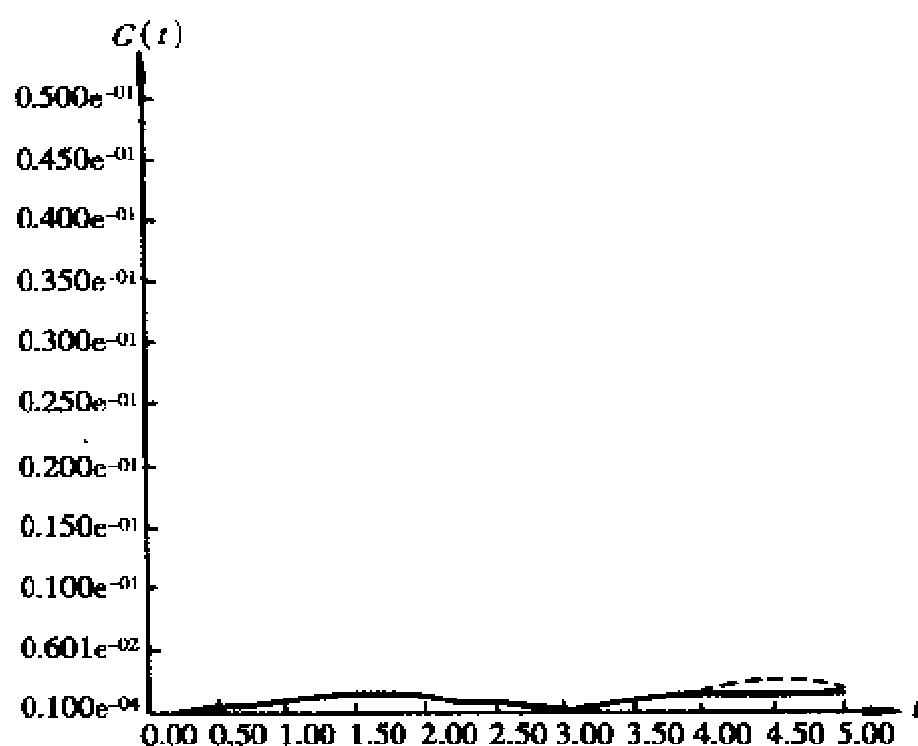


图4.1(a) 非线性 Galerkin 格式和 Galerkin 格式的误差随时间的变化

······非线性 Galerkin 方法； --Galerkin 方法；$G(t)=\|u-u_{ex}\|_{L^2(\Omega)}$，

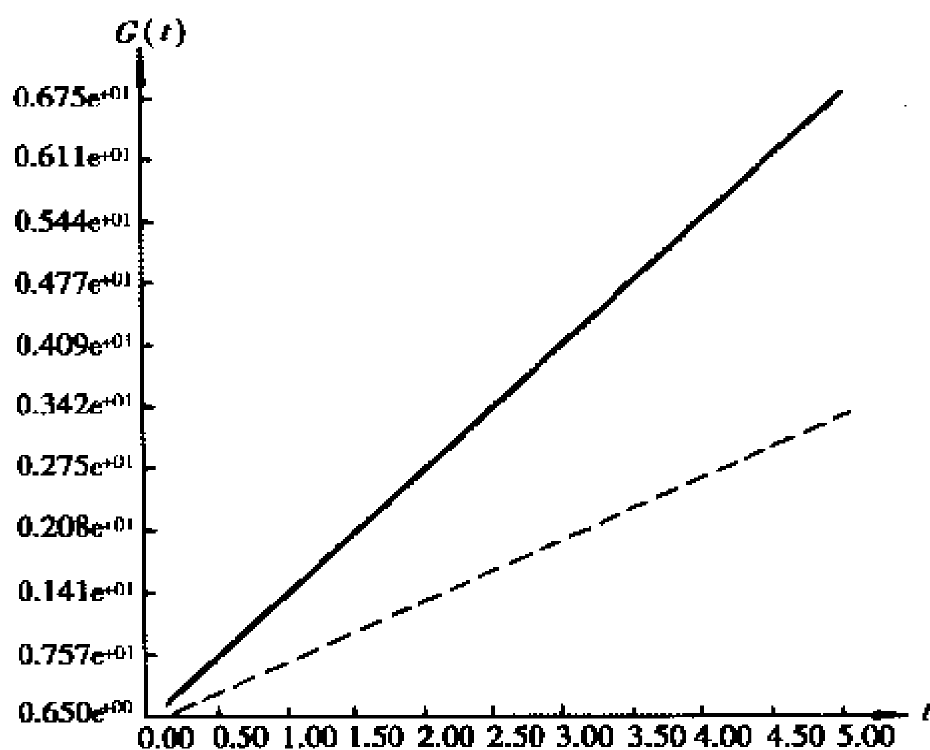


图4.1(b) 非线性 Galerkin 方法和 Galerkin 方法所有计算时间图

······非线性 Galerkin 方法；$G(t)$=CPU 时间，

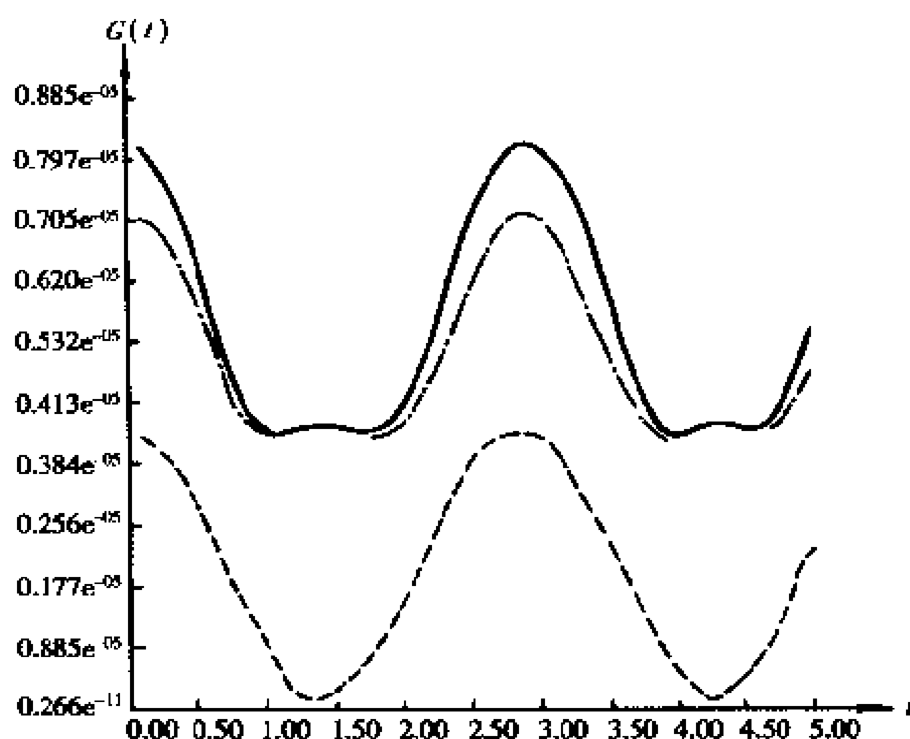


图4.1(c) 非线性 Galerkin 和 Galerkin 的合理性提供数值上的证据

—·—·$G(t)=\|\frac{dz}{dt}\|_{L^2(\Omega)}$；······ $G(t)=\nu\|Az\|_{L^2(\Omega)}$；

——$G(t)=\|QB(y,y)\|_{L^2(\Omega)}$。

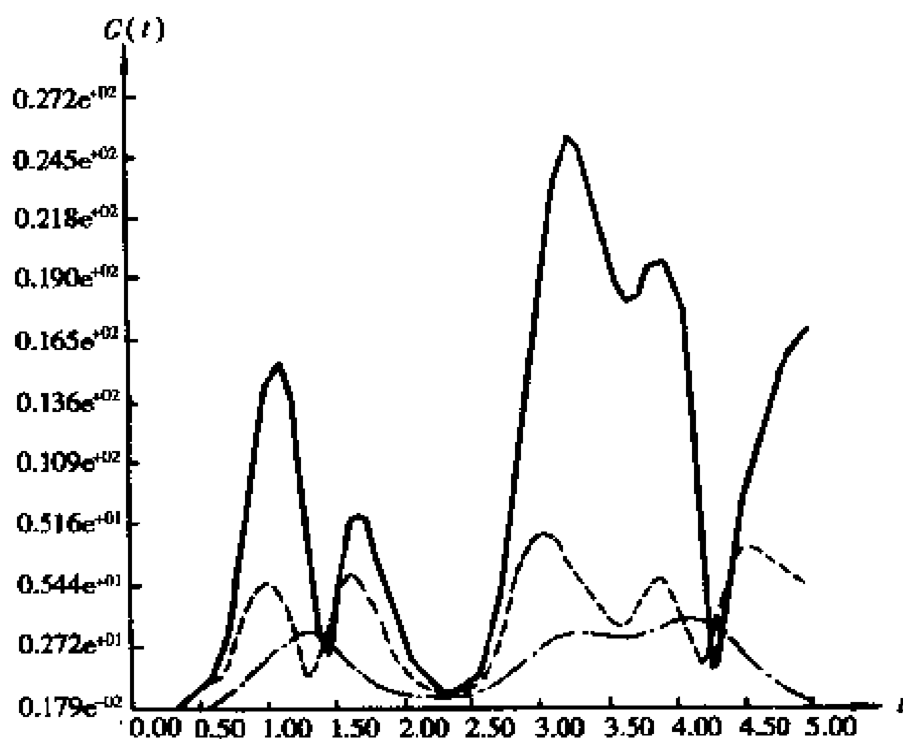


图4.1(d) 非线性 Galerkin 和 Galerkin 的合理性提供数值上的证据

—·—·$G(t)=\|PB(y,y)\|_{L^2(\Omega)}$；······ $G(t)=\|PB(y,z)+PB(z,y)\|_{L^2(\Omega)}$；

——$G(t)=\|PB(y+z,y+z)\|_{L^2(\Omega)}$。

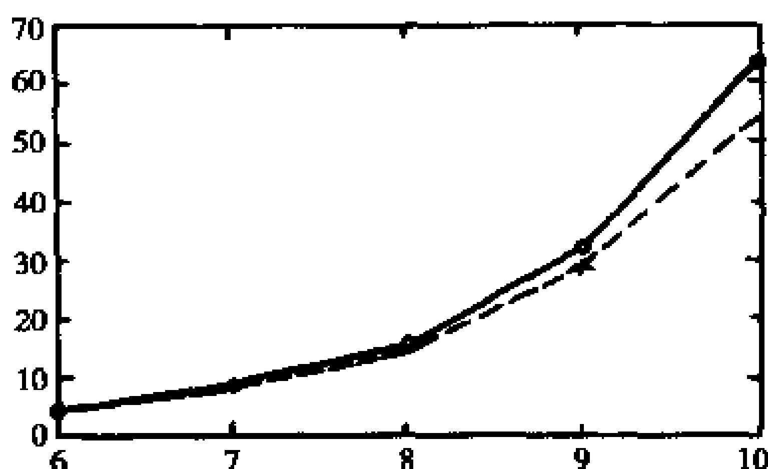


图4.2　二维方程 GLK 和 NGLK 的 CPU 时间曲线

ton-Boussinesq 方程的周期初值问题提出非线性 Galerkin 方法，并证明了该方法的收敛性，同时也证明了该问题整体广义解的存在、唯一性。

设有 Newton-Boussinesq 方程

$$\partial_t\xi + u\partial_x\xi + v\partial_y\xi = \Delta\xi - \frac{R_a}{P_r}\partial_x\theta \qquad (4.7.1)$$

$$\Delta\Psi = \xi, u = \partial_y\Psi, v = -\partial_x\Psi \qquad (4.7.2)$$

$$\partial_t\theta + u\partial_x\theta + v\partial_y\theta = \frac{1}{P_r}\Delta\theta \qquad (4.7.3)$$

其中：$\mathbf{u}=(u,v)$为速度向量；θ 为温度；Ψ 为流函数；ξ 是涡度；$P_r>0$为 Prandtl 数；$R_a>0$为 Rayleigh 数。方程(4.7.1)～(4.7.3)可改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Psi + J(\Psi,\Delta\Psi) = \Delta^2\Psi - \frac{R_a}{P_r}\frac{\partial\theta}{\partial x} \qquad (4.7.4)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + J(\Psi,\theta) = \frac{1}{P_r}\Delta\theta \qquad (4.7.5)$$

其中

$$J(u,v) = u_y v_x - u_x v_y$$

考虑式(4.7.4)、(4.7.5)的周期初值问题

$$\Psi(x+2D,y,t)=\Psi(x,y,t),\Psi(x,y+2D,t)=\Psi(x,y,t)$$
$$\theta(x+2D,y,t)=\theta(x,y,t),\theta(x,y+2D,t)=\theta(x,y,t) \tag{4.7.6}$$

$$\Psi(x,y,0)=\Psi_0(x,y),\theta(x,y,0)=\theta_0(x,y) \tag{4.7.7}$$

其中 $\Psi_0(x,y)$和 $\theta_0(x,y)$为已给的具周期$2D$ 的函数。

设$\{w_j(x,y)\}(j=1,2,\cdots)$为算子 $A=-\Delta$ 的周期特征向量，满足

$$-\Delta w_j=\lambda_j w_j,j=1,2,\cdots,\lambda_1<\lambda_2<\cdots \tag{4.7.8}$$

对于每个整数 m，寻求式(4.7.4)～(4.7.7)如下形式的近似解，

$$u_m(x,y,t)=\Psi_m(x,y,t)+\xi_m(x,y,t),$$
$$\theta_m(x,y,t)=\theta_m(x,y,t)+\eta_m(x,y,t)$$
$$\Psi_m(x,y,t)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{jm}(t)w_j,\ \theta_m(x,y,t)=\sum_{j=1}^{m}\beta_{jm}(t)w_j \tag{4.7.9}$$

$$\xi_m(x,y,t)=\sum_{j=m+1}^{2m}\delta_{jm}(t)w_j,\ \eta_m(x,y,t)=\sum_{j=m+1}^{2m}\gamma_{jm}(t)w_j \tag{4.7.10}$$

$\Psi_m(t),\theta_m(t):\mathbf{R}^+\rightarrow W_m=$子空间 span $\{w_1,w_2,\cdots,w_m\}$，$\xi_m(t)$，$\eta_m(t):\mathbf{R}^+\rightarrow\widetilde{W}_m=$子空间 span $\{w_{m+1},w_{m+2},\cdots,w_{2m}\}$。则$(\Psi_m,\xi_m)$和$(\theta_m,\eta_m)$满足如下方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\Delta\Psi_m,v)+r(\Psi,\Delta\Psi_m,v)+r(\xi_m,\Delta\Psi_m,v)+$$
$$r(\Psi_m,\Delta\xi_m,v)+(\Delta\Psi_m,\Delta v)+\frac{R_a}{P_r}(\theta_{mx},v)=0 \tag{4.7.11}$$
$$\forall v\in W_m$$

$$(\Delta\xi_m,\Delta v)+r(\Psi_m,\Delta\Psi_m,v)+\frac{R_a}{P_r}(\theta_{mx},v)=0,\ \forall v\in\widetilde{W}_m \tag{4.7.12}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\theta_m,v)+r(\Psi_m,\theta_m,v)+r(\xi_m,\theta_m,v)+r(\Psi_m,\eta_m,v)=$$

$$\frac{1}{P_r}(\Delta\theta_m, v), v \in W_m \tag{4.7.13}$$

$$-\frac{1}{P_r}(\Delta\eta_m, v) + r(\Psi_m, \theta_m, v) = 0, \; v \in \widetilde{W}_m \tag{4.7.14}$$

$$\Psi_m(0, x, y) = P_m\Psi_0(x, y) \tag{4.7.15}$$

$$\theta_m(0, x, y) = P_m\theta_0(x, y) \tag{4.7.16}$$

其中 P_m 表示 L^2到 W_m 的正交投影。

$$r(u, v, w) = \iint(u_y v_x - u_x v_y) w \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \; \Omega = [0, 2D] \times [0, 2D]$$

现对近似解作一致先验估计。

引理4.7.1 设$\nabla\Psi_0(x, y) \in L^2(\Omega)$，$\theta_0(x, y) \in L^2(\Omega)$，则对问题(4.7.11)～(4.7.16)的解$\{\Psi_m, \xi_m\}$和$\{\theta_m, \eta_m\}$，有如下估计

$$\|\nabla\Psi_m(\cdot, \cdot)\|^2 \leqslant 2\|\nabla\Psi_m(\cdot, 0)\|\exp\left(-\frac{1}{C_0}t\right) + C_0^2\left(\frac{R_a}{P_r}\right)^2\|\theta_m(\cdot, 0)\|^2 \leqslant E_0 \tag{4.7.17}$$

$$\int_0^{\infty}(\|\nabla\theta_m(t)\|^2 + \|\nabla\eta_m(t)\|^2)\mathrm{d}t + \int_0^T\|\Delta\Psi_m(t)\|^2\mathrm{d}t \leqslant E_1 \tag{4.7.18}$$

$$\|\theta_m(\cdot, t)\| \leqslant \|\theta_m(\cdot, 0)\|, t \geqslant 0 \tag{4.7.19}$$

其中 E_0和 E_1为与 m 无关的常数，C_0为满足如下 Poincare 不等式的最小常数，

$$\|u\| \leqslant C_0\|\nabla u\| \tag{4.7.20}$$

其中$\iint u\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$

证 明 在式(4.7.11)中，取 $v = \Psi_m$，在式(4.7.12)中取 $v = \xi_m$，在式(4.7.13)中取 $v = \theta_m$，在式(4.7.14)中取 $v = \eta_m$，可得

$$(-\Delta\Psi_{mt}, \Psi_m) + r(\Psi_m, \Delta\Psi_m, \Psi_m) + r(\xi_m, \Delta\Psi_m, \Psi_m) + r(\Psi_m, \Delta\xi_m, \Psi_m) + (\Delta\Psi_m, \Delta\Psi_m) + \frac{R_a}{P_r}(\theta_{mx}, \Psi_m) = 0 \tag{4.7.21}$$

$$(\Delta\xi_m,\Delta\xi_m)+r(\Psi_m,\theta_m,\xi_m)-\frac{R_a}{P_r}(\theta_{mx},\xi_m)=0$$

(4.7.22)

$$(\theta_{mt},\theta_m)+r(\Psi_m,\theta_m,\theta_m)+r(\xi_m,\theta_m,\theta_m)+$$

$$r(\Psi_m,\eta_m,\theta_m)=\frac{1}{P_r}(\Delta\theta_m,\theta_m) \qquad (4.7.23)$$

$$-\frac{1}{P_r}(\Delta\eta_m,\eta_m)+r(\Psi_m,\theta_m,\eta_m)=0 \qquad (4.7.24)$$

其中

$$r(\Psi_m,\Delta\Psi_m,\Psi_m)=\iint[\Psi_{my}(\Delta\Psi_m)_x-\Psi_{mx}(\Delta\Psi_m)_y]\Psi_m\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\frac{1}{2}\iint[(\Psi_m^2)_y(\Delta\Psi_m)_x-(\Psi_m^2)_x(\Delta\Psi_m)_y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

$$r(\eta_m,\Delta\Psi_m,\Psi_m)=\iint[\xi_{my}(\Delta\Psi_m)_x-\xi_{mx}(\Delta\Psi_m)_y]\Psi_m\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$-\iint\xi_m[(\Delta\Psi_m)_{xy}\Psi_m+(\Delta\Psi_m)_x\Psi_{my}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+$$

$$\iint\xi_m[(\Delta\Psi_m)_{xy}\Psi_m+(\Delta\Psi_m)_y\Psi_{mx}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$-\iint\xi_m[\Psi_{my}(\Delta\Psi_m)_x-\Psi_{mx}(\Delta\Psi_m)_y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$-r(\Psi_m,\Delta\Psi_m,\xi_m)$$

类似地有

$$r(\Psi_m,\Delta\xi,\Psi_m)=0;r(\Psi_m,\theta_m,\theta_m)=0;r(\xi_m,\theta_m,\theta_m)=0,$$

$$r(\Psi_m,\eta_m,\theta_m)=-r(\Psi_m,\theta_m,\eta_m)$$

式(4.7.21)+式(4.7.22),式(4.7.23)+式(4.7.24)可得

$$(-\Delta\Psi_{mt},\Psi_m)+(\Delta\Psi_m,\Delta\Psi_m)+$$

$$\frac{R_a}{P_r}(\theta_{mx},\Psi_m+\xi_m)+(\Delta\xi_m,\Delta\xi_m)=0 \qquad (4.7.25)$$

$$(\theta_{mt},\theta_m)+\frac{1}{P_r}[(\nabla\theta_m,\nabla\theta_m)+(\nabla\eta_m,\nabla\eta_m)]=0$$

(4.7.26)

从式(4.7.26)推出

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\theta_m(t)\|^2+\frac{1}{P_r}(\|\nabla\theta_m(t)\|^2+\|\nabla\eta_m(t)\|^2)=0 \tag{4.7.27}$$

$$\|\theta_m(\cdot,t)\|^2\leqslant\|\theta_m(\cdot,0)\|^2 \tag{4.7.28}$$

$$\int_0^{\infty}(\|\nabla\theta_m(t)\|^2+\|\nabla\eta_m(t)\|^2)\mathrm{d}t\leqslant\frac{P_r}{2}\|\theta_m(\cdot,0)\|^2<\infty \tag{4.7.29}$$

从式(4.7.25)可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\Psi_m\|^2+\|\Delta\Psi_m\|^2+\|\Delta\xi_m\|^2\leqslant\\&\frac{1}{2C_0}(\|\Psi_{mx}\|^2+\|\xi_{mx}\|^2)+C_0(\frac{R_a}{P_r})^2\|\theta_m\|^2\leqslant\\&\frac{1}{2}(\|\Delta\Psi_m\|^2+\|\Delta\xi_m\|^2)+C_0(\frac{R_a}{P_r})^2\|\theta_m\|^2\end{aligned} \tag{4.7.30}$$

其中

$$\|\Psi_{mx}\|^2\leqslant\|\nabla\Psi_m\|^2\leqslant C_0\|\Delta\Psi_m\|^2,\ \iint\nabla\Psi_m\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

由式(4.7.30)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\Psi_m\|^2+\frac{1}{2C_0}\|\nabla\Psi_m\|^2\leqslant C_0(\frac{R_a}{P_r})^2\|\theta_m(\cdot,0)\|^2 \tag{4.7.31}$$

由 Gronwall 不等式可得

$$\begin{aligned}\|\nabla\Psi_m(\cdot,t)\|^2\leqslant&\|\nabla\Psi_m(\cdot,0)\|^2\exp\left(-\frac{1}{C_0}t\right)+\\&C_0^2\left(1-\exp\left(-\frac{1}{C_0}t\right)\right)(\frac{R_a}{P_r})^2\|\theta_m(\cdot,0)\|^2\end{aligned}$$

引理4.7.2[80]　一致 Gronwall 引理：设 g,h,y 为三个正的在$[t_0,\infty)$上局部可积函数，设 y' 也在$[t_0,\infty)$上局部可积，且设 g，h,y 满足不等式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \leqslant gy + h,\ t \geqslant t_0 \tag{4.7.32}$$

$$\int_t^{t+r} g(s)\mathrm{d}s \leqslant a_1,\ \int_t^{t+r} h(s)\mathrm{d}s \leqslant a_2,$$

$$\int_t^{t+r} y(s)\mathrm{d}s \leqslant a_3,\ t \geqslant t_0 \tag{4.7.33}$$

其中 a_1,a_2,a_3为正常数。则有

$$y(t+r) \leqslant \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right)\exp(a_1),\ t \geqslant t_0 \tag{4.7.34}$$

引理4.7.3 设引理4.7.1的条件满足，且设 $\Delta\Psi_m(\cdot,0) \in L_2(\Omega)$，$\nabla\theta_m(\cdot,0) \in L_2(\Omega)$，则对问题(4.7.11)～(4.7.16)的解$\{\Psi_m,\xi_m\}$和$\{\theta_m,\eta_m\}$有

$$\|\nabla\theta_m(\cdot,t)\|^2 + \|\Delta\Psi_m(\cdot,t)\|^2 \leqslant E_2,\ t \geqslant 0 \tag{4.7.35}$$

$$\int_0^T (\|\nabla\Delta\Psi_m(t)\|^2 + \|\nabla\Delta\xi_m(t)\|^2 + \|\Delta\theta_m(t)\|^2)\mathrm{d}t \leqslant E_3,$$

$$t \geqslant 0 \tag{4.7.36}$$

其中常数 E_2和 E_3与 m 无关。

证明 在式(4.7.11)中取 $v = -\Delta\Psi_m$，在式(4.7.12)中取 $v = -\Delta\xi_m$，在式(4.7.13)中取 $v = -\Delta\theta_m$，在式(4.7.14)中取 $v = -\Delta\eta_m$，则有

$$(-\Delta\Psi_{mt}, -\Delta\Psi_m) + r(\Psi_m,\Delta\Psi_m, -\Delta\Psi_m) +$$
$$r(\xi_m,\Delta\Psi_m, -\Delta\Psi_m) + r(\Psi_m,\Delta\xi_m, -\Delta\Psi_m) +$$
$$(\Delta\Psi_m, -\Delta^2\Psi_m) + \frac{R_a}{P_r}(\theta_{mx}, -\Delta\Psi_m) = 0 \tag{4.7.37}$$

$$(\Delta\xi_m, -\Delta^2\xi_m) + r(\Psi_m,\Delta\Psi_m, -\Delta\xi_m) + \frac{R_a}{P_r}(\theta_{mx}, -\Delta\xi_m) = 0 \tag{4.7.38}$$

$$(\theta_{mt}, -\Delta\theta_m) + r(\Psi_m,\theta_m, -\Delta\theta_m) + r(\xi_m,\theta_m, -\Delta\theta_m) +$$
$$r(\Psi_m,\eta_m, -\Delta\theta_m) = \frac{1}{P_r}(\Delta\theta_m, -\Delta\theta_m) \tag{4.7.39}$$

$$-\frac{1}{P_r}(\Delta\eta_m, -\Delta\eta_m) + r(\Psi_m, \theta_m, -\Delta\eta_m) = 0$$

(4.7.40)

其中

$$(-\Delta\Psi_{mt}, -\Delta\Psi_m) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta\Psi_m\|^2,$$

$$(\Delta\Psi_m, -\Delta^2\Psi_m) = \|\nabla\Delta\Psi_m\|^2,$$

$$(\theta_{mt}, -\Delta\theta_m) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\theta_m\|^2,$$

$$-\frac{1}{P_r}(\Delta\eta_m, -\Delta\eta_m) = \frac{1}{P_r}\|\Delta\eta_m\|^2,$$

$$r(\Psi_m, \Delta\Psi_m, -\Delta\Psi_m) = 0,\ r(\xi_m, \Delta\Psi_m, -\Delta\Psi_m) = 0,$$

$$r(\Psi_m, \Delta\xi_m, -\Delta\Psi_m) = r(\Psi_m, \Delta\Psi_m, \Delta\xi_m),$$

$$|r(\Psi_m, \theta_m, -\Delta\theta_m)| \leqslant$$

$$(\|\Psi_{mx}\|_\infty + \|\Psi_{my}\|_\infty)\|\nabla\theta_m\|\|\Delta\theta_m\|,$$

$$\|\Psi_{mx}\|_\infty \leqslant C\|\Psi_{mx}\|^{\frac{1}{2}}\|\Delta\Psi_{mx}\|^{\frac{1}{2}} \leqslant C_1\|\nabla\Delta\Psi_m\|^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\Psi_{my}\|_\infty \leqslant C\|\Psi_{my}\|^{\frac{1}{2}}\|\Delta\Psi_{my}\|^{\frac{1}{2}} \leqslant C_1\|\nabla\Delta\Psi_m\|^{\frac{1}{2}},$$

$$|r(\Psi_m, \theta_m, -\Delta\theta_m)| \leqslant$$

$$\frac{1}{4P_r}\|\Delta\theta_m\|^2 + 2P_rC_1^2\|\nabla\Delta\Psi_m\|\|\nabla\theta_m\|^2 \leqslant$$

$$\frac{1}{4P_r}\|\Delta\theta_m\|^2 + \frac{1}{3}\|\nabla\Delta\Psi_m\|^2 + 3P_r^2C_1^4\|\nabla\theta_m\|^4 \tag{4.7.41}$$

$$|r(\xi_m, \theta_m, -\Delta\theta_m)| \leqslant \frac{1}{4P_r}\|\Delta\theta_m\|^2 +$$

$$\frac{1}{3}\|\nabla\Delta\xi_m\|^2 + 3P_r^2C_1^4\|\nabla\theta_m\|^4 \tag{4.7.42}$$

$$|r(\Psi_m, \eta_m, -\Delta\theta_m)| \leqslant$$

$$(\|\Psi_{my}\|_\infty + \|\Psi_{mx}\|_\infty)\|\nabla\eta_m\|\|\Delta\theta_m\| \leqslant$$

$$\leqslant 2C_1\|\nabla\Delta\Psi_m\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\eta_m\|\|\Delta\theta_m\| \leqslant \frac{1}{4P_r}\|\Delta\theta_m\|^2 +$$

$$\frac{1}{3}\|\nabla\Delta\Psi_m\|^2 + 3P_r^2C_1^2\|\nabla\eta_m\|^4 \leqslant \frac{1}{4P_r}\|\Delta\theta_m\|^2 +$$

$$\frac{1}{3}\|\nabla\Delta\Psi_m\|^2 + 3P_r^2C_1^2\|\eta_m\|^2\|\Delta\eta_m\|^2 \qquad (4.7.43)$$

为了估计 $r(\Psi_m,\eta_m,-\Delta\theta_m)$，我们必须估计 $\|\eta_m\|^2$。为此，从式(4.7.24)有

$$\frac{1}{P_r}\|\nabla\eta_m\|^2 + r(\Psi_m,\theta_m,\eta_m) = 0$$

其中

$$|r(\Psi_m,\theta_m,\eta_m)| \leqslant (\|\Psi_{mx}\|_\infty + \|\Psi_{my}\|_\infty)\|\nabla\theta_m\|\|\eta_m\| \leqslant$$

$$2C_1\|\nabla\Delta\Psi_m\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\theta_m\|\|\eta_m\| \leqslant$$

$$2C_1\lambda_m^{\frac{1}{2}}\|\nabla\Psi_m\|\lambda_m^{\frac{1}{2}}\|\theta_m\|\|\eta_m\| \leqslant 2C_1\lambda_m E_0\|\theta_m(\cdot,0)\|\|\eta_m\|$$

因

$$\|\nabla\eta_m\|^2 \geqslant \lambda_{m+1}\|\eta_m\|^2,$$

我们有

$$\|\eta_m(t)\| \leqslant 2C_1E_0(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}})\|\theta_m(\cdot,0)\| \leqslant 2C_1E_0\|\theta_m(\cdot,0)\| \qquad (4.7.44)$$

将式(4.7.44)代入式(4.7.43)得

$$r(\Psi_m,\eta_m,-\Delta\theta_m)| \leqslant \frac{1}{4P_r}\|\Delta\theta_m\|^2 + \frac{1}{3}\|\nabla\Delta\Psi_m\|^2 +$$

$$12P_r^2C_1^4E_0^2\|\theta_m(\cdot,0)\|^2\|\Delta\eta_m\|^2 \leqslant \frac{1}{4P_r}\|\Delta\theta_m\|^2 +$$

$$\frac{1}{3}\|\nabla\Delta\Psi_m\|^2 + \frac{C_2}{P_r}\|\Delta\eta_m\|^2 \qquad (4.7.45)$$

另一方面

$$|r(\Psi_m,\theta_m,-\Delta\eta_m)| \leqslant$$

$$(\|\Psi_{mx}\|_\infty + |\Psi_{my}\|_\infty)\|\nabla\theta_m\|\|\Delta\eta_m\| \leqslant$$

$$\frac{1}{2P_r(C_2+1)}\|\Delta\eta_m\|^2 + \frac{1}{4}\|\nabla\Delta\Psi_m\|^2 +$$

$$P_r^2(C_2+1)^2C_1^4\|\nabla\theta_m\|^4 \tag{4.7.46}$$

因此，从式(4.7.37)～(4.7.40)，式(4.7.45)和式(4.7.46)可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta\Psi_m\|^2+\|\nabla\Delta\Psi_m\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla\Delta\eta_m\|^2+\\
&\frac{1}{P_r}\|\Delta\theta_m\|^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\theta_m\|^2+\frac{(C_2+1)}{P_r}\|\Delta\eta_m\|^2\leqslant\\
&\frac{R_a}{P_r}\|\nabla\theta_m\|\|\Delta\Psi_m\|+\frac{3}{4P_r}\|\Delta\theta_m\|^2+\\
&\frac{1}{2P_r}\|\Delta\eta_m\|^2+P_r^2(C_2+1)^3C_1^4\|\nabla\theta_m\|^4+\frac{C_2}{P_r}\|\Delta\eta_m\|^2+\\
&\frac{11}{12}\|\nabla\Delta\Psi_m\|^2+(6P_r^2C_1^4+P_r^2(C_2+1)^2C_1^4)\|\nabla\theta_m\|^4+C
\end{aligned} \tag{4.7.47}$$

即有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta\Psi_m\|^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\theta_m\|^2+\frac{1}{12}\|\nabla\Delta\Psi_m\|^2+\\
&\frac{1}{2}\|\nabla\Delta\xi_m\|^2+\frac{1}{2P_r}\|\Delta\eta_m\|^2+\frac{1}{4P_r}\|\Delta\theta_m\|^2\leqslant\\
&\frac{R_a}{P_r}\|\nabla\theta_m\|\|\Delta\Psi_m\|+C_3\|\nabla\theta_m\|^4+C_4
\end{aligned} \tag{4.7.48}$$

其中

$$C_3=P_r^2(C_2+1)^3C_1^4+6P_r^2C_1^4+P_r^2(C_2+1)^2C_1^4$$

式(4.7.48)可写成如下形式

$$\frac{\mathrm{d}y_m}{\mathrm{d}t}\leqslant g_my_m+h_m \tag{4.7.49}$$

其中

$$\begin{aligned}
&y_m(t)=\frac{1}{2}(\|\Delta\Psi_m\|^2+\|\nabla\theta\|^2)\\
&g_m(t)=C_3\|\nabla\theta_m\|^2\\
&h_m(t)=\frac{R_a}{2P_r}[\|\nabla\theta_m\|^2+\|\Delta\Psi_m\|^2]+C_4
\end{aligned} \tag{4.7.50}$$

由式(4.7.27)、(4.7.31)对 $s\in(t,t+1)$ 积分，可知$\int_t^{t+1}\|\nabla\theta_m\|^2\mathrm{d}s$ 和$\int_t^{t+1}\|\Delta\Psi_m\|^2\mathrm{d}s$ 是有界的，$\forall t\geqslant0$且与 m 无关。由此推出 $y_m(t)$，$h_m(t)$和 $g_m(t)$由式(4.7.50)给定，满足式(4.7.33)，且常数 $a_i(i=1,2,3)$与 m 无关。从式(4.7.34)可得

$$y_m(t)=\frac{1}{2}(\|\Delta\Psi_m(t)\|^2+\|\nabla\theta_m(t)\|^2)\leqslant C_5,\ t\geqslant1 \tag{4.7.51}$$

其中常数 C_5 与 m 无关。由通常的 Gronwall 不等式（从式(4.7.49)）可知，$y_m(t)$是一致有界的，$0\leqslant t\leqslant1$。于是不等式(4.7.35)得证。式(4.7.36)可从式(4.7.48)对 $t\in[0,T]$积分得到。

引理4.7.4 在引理4.7.3条件下，我们有估计

$$\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta\Psi_m\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}+\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta\Psi_m\|_{L^\infty(\mathbf{R}^+;H^{-2}(\Omega))}\leqslant E_4$$

$$\|\frac{\mathrm{d}\theta_m}{\mathrm{d}t}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^+;H^{-1}(\Omega))}\leqslant E_5 \tag{4.7.52}$$

其中常数 E_4和 E_5与 m 无关。

证明 从式(4.7.11)可得

$$|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta\Psi_m,v)|\leqslant|r(\Psi_m,\Delta\Psi_m,v)|+|(\Delta\Psi_m,\Delta v)|+\frac{R_a}{P_r}|(\theta_{mx},v)|+|r(\xi_m,\Delta\Psi_m,v)|+|r(\Psi_m,\Delta\xi_m,v)|,v\in W_m \tag{4.7.53}$$

其中

$$|(\Delta\Psi_m,\Delta v)|\leqslant\|\nabla(\Delta\Psi_m)\|\|\nabla v\| \tag{4.7.54}$$

$$|\frac{R_a}{P_r}(\theta_{mx},v)|\leqslant\frac{R_a}{P_r}\|\nabla\theta_m\|\|v\| \tag{4.7.55}$$

$$|r(\Psi_m,\Delta\Psi_m,v)|=|\iint(\Psi_{my}v_x-\Psi_{mx}v_y)\Delta\Psi_m\mathrm{d}x\mathrm{d}y|\leqslant(\|\Psi_{my}\|_{L^4}+\|\Psi_{mx}\|_{L^4})\|\Delta\Psi_m\|_{L^4}\|\nabla v\|,$$

$$\|\Psi_{my}\|_{L^4}\leqslant C\|\Psi_{my}\|^{\frac{1}{2}}\|\Psi_{my}\|^{\frac{1}{2}}_{H^1}\leqslant C\|\Delta\Psi_m\|^{\frac{1}{2}}\leqslant\text{const},$$

$$\| \Psi_{mx} \|_{L^4} \leqslant \text{const},$$

$$\| \Delta\Psi_m \|_{L^4} \leqslant C \| \Delta\Psi_m \|^{\frac{1}{2}} \| \Delta\Psi_m \|^{\frac{1}{2}}_{H^1} \leqslant C \| \nabla(\Delta\Psi_m) \|^{\frac{1}{2}},$$

$$|r(\Psi_m, \Delta\Psi_m, v)| \leqslant C \| \nabla(\Delta\Psi_m) \|^{\frac{1}{2}} \| v \|_{H^1} \quad (4.7.56)$$

式(4.7.53)右端的第四、第五项分别估计如下

$$|r(\xi_m, \Delta\Psi_m, v)| = |\iint (\xi_{my} v_x - \xi_{mx} v_y) \Delta\Psi_m \mathrm{d}x\mathrm{d}y| \leqslant$$
$$(\| \xi_{my} \|_\infty + \| \xi_{mx} \|_\infty) \| \Delta\Psi_m \| \| v \|_{H^1} \leqslant$$
$$C \| \nabla\Delta\xi_m \|^{\frac{1}{2}} \| v \|_{H^1}$$

即

$$\frac{r(\xi_m, \Delta\Psi_m, v)}{\| v \|_{H^1}} \in L^4(0,T) \quad (4.7.57)$$

$$|r(\Psi_m, \Delta\xi_m, v)| = |\iint (\Psi_{my} v_x - \Psi_{mx} v_y) \Delta\xi_m \mathrm{d}x\mathrm{d}y| \leqslant$$
$$(\| \Psi_{my} \|_{L^4} + \| \Psi_{mx} \|_{L^4}) \| \Delta\xi_m \|_{L^4} \| v \|_{H^1} \leqslant$$
$$C \| \nabla\Delta\xi_m \|^{\frac{1}{2}} \| v \|_{H^1} \quad (4.7.58)$$

因 $v \in W_m$ 在 $v \in H^1$ 是稠密的，从式(4.7.53)～(4.7.58)有

$$\| \Delta\Psi_m \|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leqslant E_4 \quad (4.7.59)$$

其中常数 E_4 与 m 无关。另一方面，从式(4.7.53)有

$$|(\Delta\Psi_m, \Delta v)| \leqslant \| \Delta\Psi_m \| \| \Delta v \| \leqslant C \| v \|_{H^2} \quad (4.7.60)$$

$$\left| \frac{R_a}{P_r}(\theta_{mx}, v) \right| \leqslant \frac{R_a}{P_r} \| \nabla\theta_m \| \| v \| \leqslant C \| v \|_{H^2} \quad (4.7.61)$$

$$|r(\Psi_m, \Delta\Psi_m, v)| = |\iint (\Psi_{my} v_x - \Psi_{mx} v_y) \Delta\Psi_m \mathrm{d}x\mathrm{d}y| \leqslant$$
$$(\| \Psi_{my} \|_{L^4} \| v_x \|_{L^4} + \| \Psi_{mx} \|_{L^4} \| v_y \|_{L^4}) \| \Delta\Psi_m \| \leqslant C \| v \|_{H^2}$$
$$(4.7.62)$$

$$|r(\xi_m, \Delta\Psi_m, v)| = |\iint (\xi_{my} v_x - \xi_{mx} v_y) \Delta\Psi_m \mathrm{d}x\mathrm{d}y| \leqslant$$
$$(\| \xi_{my} \|_{L^4} \| v_x \|_{L^4} + \| \xi_{mx} \|_{L^4} \| v_y \|_{L^4}) \| \Delta\Psi_m \| \leqslant$$
$$C \| \nabla\xi_m \|^{\frac{1}{2}} \| \Delta\xi_m \|^{\frac{1}{2}} \| v \|_{H^2} \quad (4.7.63)$$

$$|r(\Psi_m,\Delta\xi_m,v)| = |\iint(\Psi_{my}v_x - \Psi_{mx}v_y)\Delta\xi_m \mathrm{d}x\mathrm{d}y| \leqslant$$

$$(\|\Psi_{my}\|_{L^4}\|v_x\|_{L^4} - \|\Psi_{mx}\|_{L^4}\|v_y\|_{L^4})\|\Delta\xi_m\| \leqslant$$

$$C\|\Delta\xi_m\| \ \|v\|_{H^2} \qquad (4.7.64)$$

我们现要估计$\|\nabla\xi_m\|$和$\|\Delta\xi_m\|$。从式(4.7.22)有

$$\|\Delta\xi_m\|^2 + r(\Psi_m,\Delta\Psi_m,\xi_m) = 0$$

其中

$$|r(\Psi_m,\Delta\Psi_m,\xi_m)| =$$

$$|\iint(\Psi_{my}(\Delta\Psi_m)_x - \Psi_{mx}(\Delta\Psi_m)_y)\xi_m \mathrm{d}x\mathrm{d}y| \leqslant$$

$$C(\|\Psi_{my}\|_\infty + \|\Psi_{mx}\|_\infty)\|\nabla\Delta\Psi_m\| \ \|\xi_m\| \leqslant C\lambda_m^{\frac{3}{4}}\|\xi_m\|,$$

$$\lambda_{m-1}^2\|\xi_m\|^2 \leqslant \|\Delta\xi_m\|^2 \leqslant C\lambda_m^{\frac{3}{4}}\|\xi_m\|,$$

$$\lambda_{m+1}^{\frac{5}{4}}\|\xi_m\| \leqslant C(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}})^{\frac{3}{4}}\| \leqslant \text{const} \qquad (4.7.65)$$

另一方面，

$$|r(\Psi_m,\Delta\Psi_m,\xi_m)| =$$

$$|\iint(\Psi_{my}\Delta\Psi_{mx} - \Psi_{mx}\Delta\Psi_{my})\xi_m \mathrm{d}x\mathrm{d}y| =$$

$$|\iint(\Psi_{my}\xi_{mx} - \Psi_{mx}\xi_{my})\Delta\Psi_m \mathrm{d}x\mathrm{d}y| \leqslant$$

$$(\|\Psi_{my}\|_\infty + \|\Psi_{mx}\|_\infty)\|\nabla\xi_m\| \ \|\Delta\Psi_m\| \leqslant$$

$$C\|\nabla\Delta\Psi_m\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\xi_m\| \leqslant C\lambda_m^{\frac{1}{4}}\|\nabla\xi_m\|,$$

$$\lambda_{m+1}^{\frac{3}{4}}\|\nabla\xi_m\| \leqslant C(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}})^{\frac{1}{4}} \leqslant \text{const} \qquad (4.7.66)$$

$$\lambda_{m+1}\|\nabla\xi_m\|^2 \leqslant \|\Delta\xi_m\|^2 \leqslant C\lambda_m^{\frac{1}{4}}\|\nabla\xi_m\|^2 \qquad (4.7.67)$$

$$\lambda_{m-1}^{\frac{3}{4}}\|\nabla\xi_m\| \leqslant C(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}})^{\frac{1}{4}} \leqslant \text{const} \qquad (4.7.68)$$

从式(4.7.68)有

$$\| \nabla \Delta \xi_m \|^2 + r(\Psi_m, \Delta \Psi_m, -\Delta \xi_m) + \frac{R_a}{P_r}(\theta_{mx}, \Delta \xi_m) = 0$$

(4.7.69)

其中

$$|r(\Psi_m, \Delta\Psi_m, -\Delta\xi_m)| =$$

$$|\iint (\Psi_{my}\Delta\Psi_{mx} - \Psi_{mx}\Delta\Psi_{my})\Delta\xi_m \mathrm{d}x\mathrm{d}y| \leqslant$$

$$(\| \Psi_{my} \|_\infty + \| \Psi_{mx} \|_\infty) \| \nabla\Delta\Psi_m \| \, \| \Delta\xi_m \| \leqslant$$

$$C \| \nabla\Delta\Psi_m \|^{\frac{3}{2}} \| \Delta\xi_m \| \leqslant C\lambda_m^{\frac{3}{4}} \| \Delta\xi_m \|$$

$$\lambda_{m+1} \| \Delta\xi_m \|^2 \leqslant \| \nabla\Delta\xi_m \|^2 \leqslant C(\lambda_m^{\frac{3}{4}} + 1) \| \Delta\xi_m \|$$

$$\lambda_m^{\frac{1}{4}} \| \Delta\xi_m \| \leqslant C\left(\frac{\lambda_m^{\frac{3}{4}} + 1}{\lambda_m^{\frac{3}{4}}}\right) \leqslant \text{const} \qquad (4.7.70)$$

因此，从式(4.7.66)、(4.7.70)、(4.7.63)、(4.7.64)可知

$$|r(\xi_m, \Delta\Psi_m, v)| \leqslant C \| v \|_{H^2} \qquad (4.7.71)$$

$$|r(\Psi_m, \Delta\xi_m, v)| \leqslant C \| v \|_{H^2} \qquad (4.7.72)$$

从式(4.7.53)、式(4.7.60)～(4.7.72)可知

$$\| \Delta\Psi_{mt} |_{L^\infty(\mathbb{R}^+; H^{-2}(\Omega))} \leqslant E_4 \qquad (4.7.73)$$

其中常数 E_4 与 m 无关。

从式(4.7.13)有

$$\left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\theta_m, v) \right| \leqslant |r(\Psi_m, \theta_m, v)| + |r(\xi_m, \theta_m, v)| +$$

$$|r(\Psi_m, \eta_m, v)| + \frac{1}{P_r}|(\Delta\theta_m, v)| \quad (4.7.74)$$

其中

$$\frac{1}{P_r}|(\Delta\theta_m, v)| \leqslant \frac{1}{P_r} \| \nabla\theta_m \| \, \| \nabla v \| \leqslant C \| v \|_{H^1}$$

(4.7.75)

$$|r(\Psi_m, \theta_m, v)| = |\iint (\Psi_{my}\theta_{mx} - \Psi_{mx}\theta_{my}) v \mathrm{d}x\mathrm{d}y| \leqslant$$

$$(\|\Psi_{my}\|_{L^4}\|\theta_{mx}\| + \|\Psi_{mx}\|_{L^4}\|\theta_{my}\|)\|v\|_{L^4} \leqslant$$

$$C\|\Delta\Psi_m\| \, |\nabla\theta_m\| \, \|v\|_{H^1} \leqslant C\|v\|_{H^1} \tag{4.7.76}$$

$$|r(\xi_m,\theta_m,v)| = |\iint(\xi_{my}\theta_{mx} - \xi_{mx}\theta_{my})v\mathrm{d}x\mathrm{d}y| \leqslant$$

$$(\|\xi_{my}\|_{L^4}\|\nabla\theta_m| + \|\Psi_{mx}\|_{L^4}\|\nabla\theta_m\|)\|v\|_{L^4} \leqslant$$

$$C\|\nabla\xi_m\|^{\frac{1}{2}}\|\Delta\xi_m\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\theta_m\| \, \|v\|_{H^1} \leqslant C\|v\|_{H^1} \tag{4.7.77}$$

$$|r(\Psi_m,\eta_m,v)| = |\iint(\Psi_{my}\eta_{mx} - \Psi_{mx}\eta_{my})v\mathrm{d}x\mathrm{d}y| \leqslant$$

$$(\|\Psi_{my}\|_{L^4}\|\nabla\eta_m\| + \|\Psi_{mx}\|_{L^4}\|\nabla\eta_m\|)\|v\|_{L^4} \leqslant$$

$$C\|\nabla\eta_m\|_{H^1}\|v\|_{H^1} \tag{4.7.78}$$

现估计$\|\nabla\eta_m|$。从式(4.7.40)有

$$\frac{1}{P_r}\|\Delta\eta_m\|^2 + r(\Psi_m,\theta_m,-\Delta\eta_m) = 0 \tag{4.7.79}$$

其中

$$|r(\Psi_m,\theta_m,-\Delta\eta_m)| = |\iint(\Psi_{my}\theta_{mx} - \Psi_{mx}\theta_{my})\Delta\eta_m\mathrm{d}x\mathrm{d}y| \leqslant$$

$$(\|\Psi_{my}\|_\infty + \|\Psi_{mx}\|_\infty)\|\nabla\theta_m\| \, \|\Delta\eta_m\| \leqslant$$

$$C\|\nabla\Delta\Psi_m\|^{\frac{1}{2}}\|\Delta\eta_m\| \leqslant C\lambda_m^{\frac{1}{4}}\|\Delta\eta_m\|$$

由式(4.7.79)推出

$$\|\Delta\eta_m\|^2 \leqslant CP_r\lambda_m^{\frac{1}{4}}\|\Delta\eta_m\|$$

即有

$$\lambda_{m-1}^{\frac{1}{2}}\|\nabla\eta_m\| \leqslant \|\Delta\eta_m\| \leqslant CP_r\lambda_m^{\frac{1}{4}}$$

$$\lambda_{m+1}^{\frac{1}{4}}\|\nabla\eta_m\| \leqslant CP_r\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}}\right)^{\frac{1}{4}} \leqslant \text{const} \tag{4.7.80}$$

从式(4.7.78)得

$$|r(\Psi_m,\eta_m,v)| \leqslant C\|v\|_{H^1} \tag{4.7.81}$$

从式(4.7.74)、(4.7.76)、(4.7.77)和式(4.7.81)可得

$$\left\| \frac{\mathrm{d}\theta_m}{\mathrm{d}t} \right\|_{L^2(\mathbf{R}^+;H^{-1}(\Omega))} \leqslant E_4 \tag{4.7.82}$$

其中常数 E_4 与 m 无关。引理 4.7.4 证毕。

定义 4.7.1　未知函数 $\Psi(x,y,t)$，$\theta(x,y,t)$ 称为问题(4.7.4)～(4.7.7)的整体广义解，如果满足：

(1)
$$\Psi(x,y,t) \in L^\infty(\mathbf{R}^+;H^2(\Omega)),$$
$$\Delta\Psi(x,y,t) \in L^2(0,T;H^1(\Omega)),$$
$$\Delta\Psi_t(x,y,t) \in L^\infty(\mathbf{R}^+;H^{-2}(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$
$$\theta(x,y,t) \in L^\infty(\mathbf{R}^-;H^1(\Omega)), \Delta\theta(x,y,t) \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$
$$\theta_t(x,y,t) \in L^\infty(\mathbf{R}^+;H^{-1}(\Omega)), \Omega = [0,2D] \times [0,2D]$$

(2)如下等式在 $L^1(0,T)$ 上成立，$\forall T>0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta\Psi,v) + r(\Psi,\Delta\Psi,v) + (\Delta\Psi,\Delta v) +$$
$$\frac{R_a}{P_r}(\theta_x,v) = 0,\ v \in H^2(\Omega) \tag{4.7.83}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\theta,v_1) + r(\Psi,\theta,v_1) - \frac{1}{P_r}(\nabla\theta,\nabla v_1) = 0, v_1 \in H^1(\Omega) \tag{4.7.84}$$

其中

$$r(u,v,w) = \iint (u_y v_x - u_x v_y) w \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(3)

$$\Psi(x+2D,y,t) = \Psi(x,y,t), \Psi(x,y+2D,t) = \Psi(x,y,t),$$
$$\theta(x+2D,y,t) = \theta(x,y,t), \theta(x,y+2D,t) = \theta(x,y,t),$$
$$(x,y) \in \mathbf{R}^2, t \geqslant 0; \tag{4.7.85}$$

(4)

$$\Psi(x,y,0) = \Psi_0(x,y), \theta(x,y,0) = \theta_0(x,y) \tag{4.7.86}$$

其中 $\Psi_0(x,y) \in H^2(\Omega)$，$\theta_0(x,y) \in H^1(\Omega)$，且它们是对变元 x,y

具 $2D$ 周期的函数。

由前面所作的一致先验估计，和通常的紧性原则可得

定理 4.7.1 设 $\Psi_0(x,y)\in H^2(\Omega)$，$\theta_0(x,y)\in H^1(\Omega)$ 且它们是 x,y 的具周期 $2D$ 的函数。则(4.7.12)～(4.7.17)问题的近似解 $\{\Psi_m,\theta_m\}$ 当 $m\to\infty$ 时收敛于式(4.7.4)～(4.7.7)的广义解 $\{\Psi,\theta\}$，其中 $\Omega=(0,2D)\times(0,2D)$。

引理 4.7.5 设定理 4.7.1 条件满足，则问题(4.7.4)～(4.7.8)的广义解 $\theta(x,y,t)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;L^\infty(\Omega))$。

定理 4.7.2 在定理 4.7.1 条件下，Newton-Boussinesq 方程的周期初值问题(4.7.4)～(4.7.8)的解是唯一的。

现考虑如下实际算例：

$$(E_1)\begin{cases}\partial_t\Delta\Psi-\Delta^2\Psi+\dfrac{R_a}{P_r}\partial_x\theta+J(\Psi,\Delta\Psi)=0,\\ \partial_t\theta-\dfrac{1}{P_r}\Delta\theta+\partial_x\Psi+J(\Psi,\theta)=0,\\ \Psi(x+L_1,y,t)=\Psi(x,y,t),\Psi(x,0,t)=\\ \qquad\qquad\Psi(x,1,t)=0,\\ \theta(x+L_1,y,t)=\theta(x,y,t),\theta(x,0,t)=\theta(x,1,t)=0,\\ \Psi(x,y,0)=\Psi_0(x,y),\theta(x,y,0)=\theta_0(x,y)\end{cases}\tag{4.7.87}$$

其中：Ψ 为流函数；$\theta=\bar{\theta}-1+y$；$\bar{\theta}$ 为温度；$R_a>0$ 为 Rayleigh 数；$P_r>0$ 为 Prandtl 数；$J(u,v)=u_yv_x-u_xv_y$。设 $\{w_j(x,y)\}_{j\in N}$ 为算子 $A=-\Delta$ 的特征向量组成的正交基，满足 $-\Delta w_j=\lambda_jw_j$，$j=1,2,\cdots$，$\lambda_1<\lambda_2<\cdots$。对于每个给定整数 m，近似解具有形式

$$\Psi_m(t)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{jm}(t)w_j,\ \theta_m(t)=\sum_{j=1}^{m}\beta_{jm}(t)w_j$$

$$\xi_m(t)=\sum_{j=m+1}^{2m}\delta_{jm}(t)w_j,\ \eta_m(t)=\sum_{j=m+1}^{2m}\gamma_{jm}(t)w_j$$

时间离散非线形 Galerkin 方法为

$$
(A_1)\begin{cases}
(\Delta\Psi_m^{(n+1)},v)-(\Delta\Psi_m^{(n)},v)-\Delta t(\Delta\Psi_m^{(n+1)},\Delta v)+ \\
\Delta t\dfrac{R_a}{P_r}(\theta_m^{(n)},v)+\Delta tr(\Psi_m^{(n)},\Delta\Psi_m^{(n)},v)+ \\
\Delta tr(\Psi_m^{(n)},\Delta\xi_m^{(n+1)},v)+\Delta tr(\xi_m^{(n-1)},\Delta\Psi_m^{(n)},v)= \\
0,\forall v\in W_m, \\
-(\Delta\xi_m^{(n+1)},v)+\dfrac{R_a}{P_r}(\theta_{mx}^{(n)},v)+ \\
r(\Psi_m^{(n)},\Delta\xi_n^{(n)},v)=0,\forall v\in\tilde{W}_m, \\
(\theta_m^{(n+1)},v)-(\theta_m^{(n)},v)+\dfrac{\Delta t}{P_r}(\nabla\theta_m^{(n+1)},\nabla v)+ \\
\Delta t(\Psi_{mx}^{(n)},v)+\Delta tr(\Psi_m^{(n)},\theta_m^{(n)},v)+ \\
\Delta tr(\Psi_m,\eta_m^{(n+1)},v)+\Delta tr(\xi_m^{(n+1)},\theta_m^{(n)},v)=0, \\
\dfrac{1}{P_r}(\nabla\eta_m^{(n+1)},\nabla v)+(\Psi_{mx}^{(n)},v)+ \\
r(\Psi_m^{(n)},\theta_m^{(n)},v)=0,\forall v\in\tilde{W}_m, \\
\Psi_m^{(0)}=P_m\Psi_0,\theta_m^{(0)}=P_m\theta_0
\end{cases}
\tag{4.7.88}
$$

取 $\theta_0=0,\Psi_0=(\sin\ \pi x,\sin\ \pi y)^r,L_1=1,P_r=10$，采样点$(x_0,y_0)=(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$

从这个数值结果可以看到，以 g_{i-j}（通常 GLK 方法，x 方向为 i 个模，y 方向为 j 个模），和 n_{i-j}（非线性 NGLK 方法，x 方向为 i 个模（包括修正模数））相比，n_{i-j}比 g_{i-j}费时，却不一定保证精度的提高，以 g_{2i-j}和 n_{i-j}相比，n_{i-j}比 g_{i-j}节省的时间有限，精度有时却相差较少，我们看到非线性 Galerkin 方法虽然不失为一种有效的方法，但与经典的 Galerkin 方法相比，CPU 时间并不具有明显的节约，数值解的精度有时比模数较低的 GLK 方法的数值精度还要低。

4.8 立方 Ginzburg-Landau 方程的数值计算和分析

考虑如下形式的立方体 Ginzburg-Landau 方程

$$u_t = c_0 u + (c_0 + \mathrm{i}) u_{xx} - (c_0 - \mathrm{i}) |u|^2 u \qquad (4.8.1)$$

其中:$u(x,t)$为未知的复值函数;c_0 为实参数。当 $c_0 \to \infty$ 它对应于 Newell-Whitchenel 方程,而 $c_0 = 0$ 为可积的立方非线性 Schrödinger 方程。式(4.8.1)具有行波解

$$u_s(x,t) = u_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x + \omega_0 t)} \qquad (4.8.2)$$

其中

$$\begin{cases} \omega_0 = 2|u_0|^2 - 1 \\ k_0^2 = 1 - |u_0|^2 \end{cases} \qquad (4.8.3)$$

令 $u(x,t) = \widehat{u(x,t)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x + \omega_0 t)}$,则可得$\widehat{u(x,t)}$满足的方程。此时我们仍记为 $u(x,t)$,则有

$$u_t = \alpha u + \mu u_x + \beta u_{xx} - \gamma |u|^2 u \qquad (4.8.4)$$

其中 $\alpha = c_0 - \mathrm{i}\omega_0 - k_0^2(c_0 + \mathrm{i})$,$\mu = 2k_0(c_0 + \mathrm{i})$,$\beta = c_0 + \mathrm{i}$,$\gamma = c_0 - \mathrm{i}$。

为了研究方程(4.8.4)的线性稳定性,考虑式(4.8.4)的小扰动线性方程。设

$$u(x,t) = u_0 + \delta u(x,t) \qquad (4.8.5)$$

则可得式(4.8.4)的线性化方程为

$$\begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial u \\ \partial u^* \end{bmatrix} = 0 \qquad (4.8.6)$$

其中

$$L_1 = \partial_t - \alpha - \mu \partial_x - \beta \partial_{xx} + L(|u_0|^2),$$

$$L_2 = h(u_0),$$

$$L_3 = h^*(u_0),$$

$$L + 4 = \partial_t - \alpha^* - \mu^* \partial_x - \beta^* \partial_{xx} + L^*(|u_0|^2)$$

$$L(|u_0|^2) = 2\gamma|u_0|^2,\ h(u_0) = \gamma u_0^2$$

* 表示复数共轭。为了便于更具体的分析，设

$$u(x,t) = u_0 + \delta u_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(qx+\Omega t)} + \delta u_- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(qx-\Omega^* t)} \qquad (4.8.7)$$

其中 δu_+ 和 δu_- 与 u_0 相比是一小量，q 是一实数。

将式(4.8.7)代入式(4.8.6)，可得

$$\Omega^2 - 2\mathrm{Re}\, A\Omega i + |\gamma|^2|u_0|^4 - |A|^2 = 0 \qquad (4.8.8)$$

其中

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\, A = c_0(q^2 + 2k_0q + |u_0|^2) \\ \mathrm{Im}\, A = q^2 + 2k_0q - |u_0|^2\end{cases} \qquad (4.8.9)$$

令 $\Omega = \Omega_r + \mathrm{i}\rho$，则

$$\rho_\pm(c_0,|u_0|,q) = c_0(q^2 + 2k_0q + |u_0|^2) \pm$$

$$\sqrt{(c_0^2+1)|u_0|^4 - (q^2 + 2k_0q - |u_0|^2)^2} \qquad (4.8.10)$$

显然，为了研究方程(4.8.4)的线性不稳定性，我们只关心 $\rho_-(c_0, |u_0|,q)$，事实上，当 $q < q_+ = \sqrt{1+\sqrt{1+c_0^2}\,|u_0|^2} - \sqrt{1-|u_0|^2}$ 时，$\rho_+(c_0,|u_0|,q) > 0$ 为不稳定的，可求出 $q_{\max}$，使 $\rho_-(c_0,|u_0|,q_{\max}) = 0$，因此，$\rho_- \leqslant 0$，且可求出 q_0 为 $\rho_-(c_0,|u_0|,q)$的极小点。即

$$q_0 = \min_{0\leqslant q\leqslant q_{\max}} \rho_\pm(c_0,|u_0|,q) = \rho_-(c_0,|u_0|,q_0) =$$

$$-|u_0|^2(1-c_0)^2 \qquad (4.8.11)$$

如图 4.3 所示。

我们在相平面($|u(x,t)|, \partial_t|u(x,t)|$)，可得如下结论：

命题 4.8.1 在相平面($|u(x,t)|, \partial_t|u(x,t)|$)上，有

(1) $c_0 = 0$，方程(4.8.1)退化为可积的立方非线性 Schrödinger 方程。

(i)当 $u_0 \neq 0$ 时，对于行波解 u_s，($|u_s|$,0)为双曲点。

(ii)对于行波解 0，(0,0)为椭圆点。

(2)当 $c_0 >$ 时，

(i)$0 < q < q_{\max}$，$0 < c_0 \leqslant 1$，对于行波解 u_s，($|u_s|$,0)为双曲点。

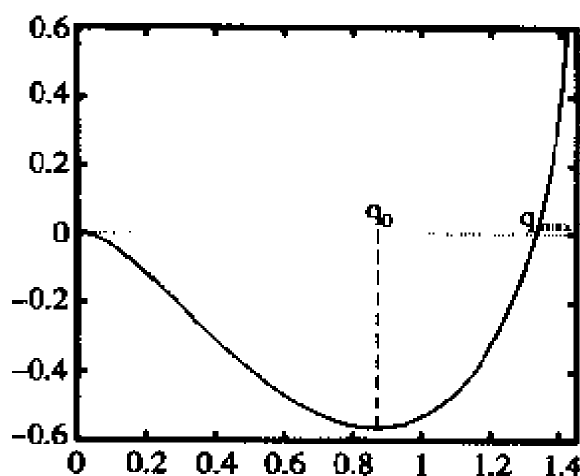


图 4.3 q 和 ρ_- 的关系

($|u_0|=1, c_0=0.25$)

(ii) $q>q_{\max}$, $0<c_0\leqslant 1$，对于行波解 u_s，$(|u_s|, 0)$ 为渐进稳定点。下面用三层拟谱显式格式逼近方程(4.8.1)。

$$
\begin{cases}
\dfrac{\tilde{u}_{Nj}^{n+1}-\tilde{u}_{Nj}^{n-1}}{2\Delta t}=\dfrac{c_0}{2}(\tilde{u}_{Nj}^{n+1}-\tilde{u}_{Nj}^{n-1})-\dfrac{(c_0+\mathrm{i})}{2}j^2q_0^2(\tilde{u}_{Nj}^{n+1}+\tilde{u}_{Nj}^{n-1})-(c_0-\mathrm{i})\{|\tilde{u}_N^n|^2u_N^n\}_j \\
\dfrac{\tilde{u}_{Nj}^1-\tilde{u}_{Nj}^0}{\Delta t}=c_0\tilde{u}_{Nj}^0-(c_0+\mathrm{i})j^2q_0^2\tilde{u}_{Nj}^0-(c_0-\mathrm{i})\{|\tilde{u}_N^0|^2u_N^0\}_j \\
\tilde{u}_{Nj}^0=h\sum_{m=0}^{N-1}u_0(x_m)\exp(\mathrm{i}jx_m)
\end{cases}
\tag{4.8.12}
$$

其中：$u_0(x)$为已给初值函数；$\tilde{u}_{Nj}^n$表示 $u_N^n\in S_N$ 的第 j 个离散傅氏系数。

$$S_N=\underset{-N/2\leqslant j\leqslant N/2-1}{\operatorname{span}}\{\exp(\mathrm{i}jq_0x)\}$$

设 $x_m=mh$，

$$u_N^n(x_m)=\sum_{j=0}^{N-1}\tilde{u}_{Nj}^n\exp\ (\mathrm{i}jx_m)$$

可以证明

定理 4.8.1 设方程(4.8.1)周期初值问题的解 $u\in C^3([0,T];H^s_p(C))$，则存在常数 $C_j(j=1,2,3)$，它与 Δt 和分点数 N 无关，当 $\Delta t\leqslant C_1, N>C_3$，有

$$\| u_N^n-u^n \| \leqslant C_3(\Delta t^2+N^{-s})$$

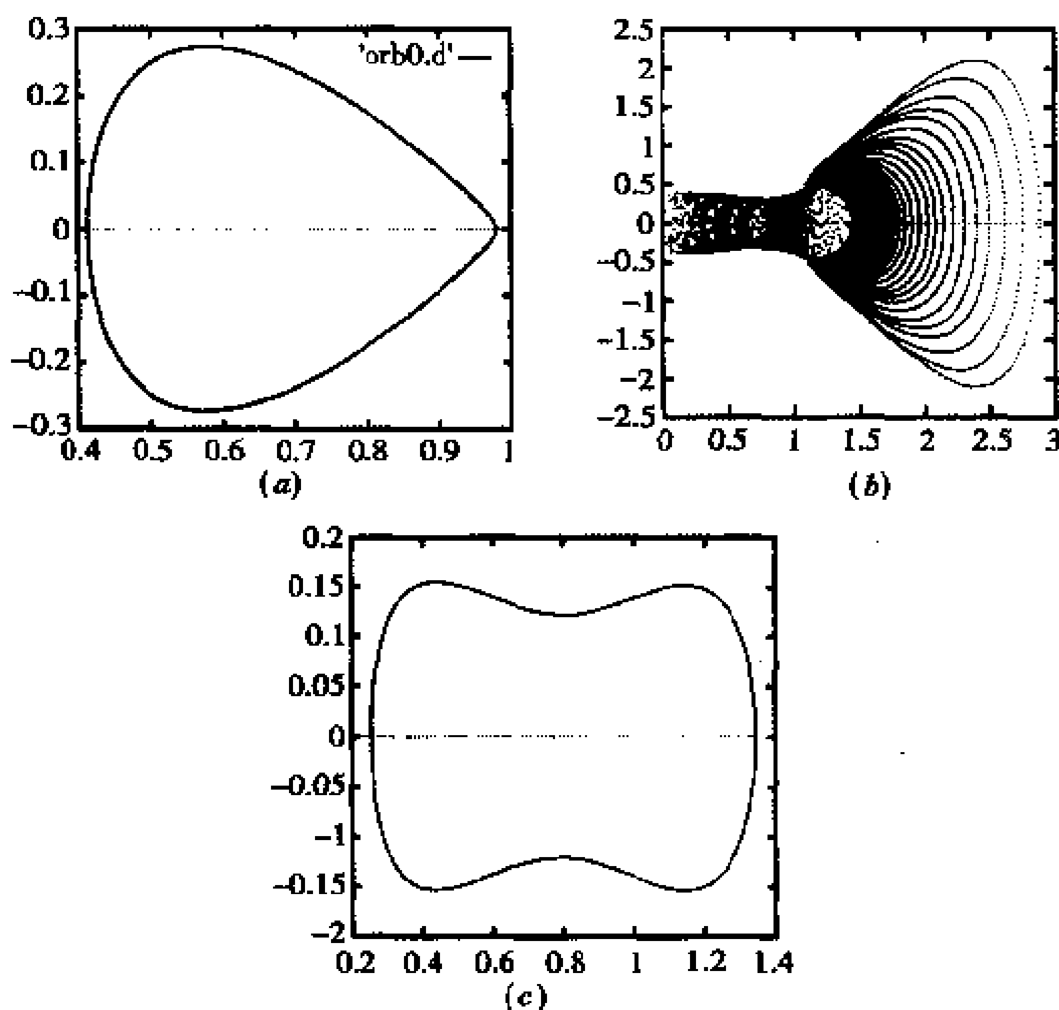


图 4.4 轨道及轨线

(a)同宿轨道($|u_0|=1, c_0=0$)；(b)在相平面($|u(0,t)|, |u(0,t)|_t$)上的轨线($|u_0|=1, c_0=0.0025$)；(c)在相平面($|u(0,t)|$, $|u(0,t)|_t$)上的轨线($|u_0|=1, c_0=0.025, T>10^4$)。

数值结果：取初值为

$$u_0(x,0) = u_s(x,0) + \epsilon e^{i\theta}\cos(qx)$$

其中 $\theta=\arctan \omega_0$，$\theta=\arctan \omega_0+\pi$ 对应于按点$(|u_0|,0)$的不稳定流形。$\epsilon=0.02$，$u_0=1$，$k_0=0$，$\omega_0=1$。

该方程通过数值计算，所得结果如图 4.4～图 4.10 所示。

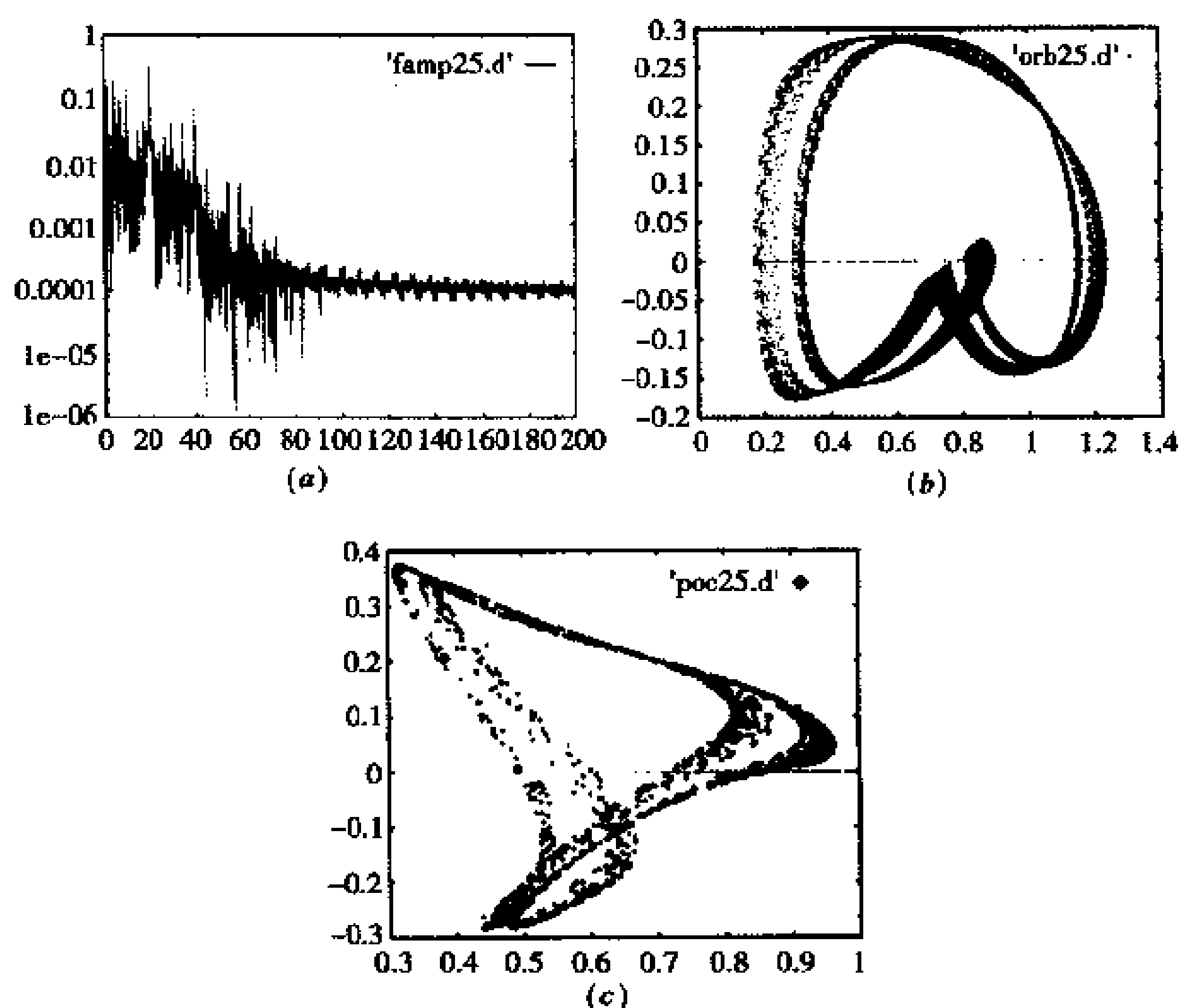


图 4.5 $c_0=0.25$ 图象

(a)功率谱；(b)相平面的轨线；(c)Poincaré 截面。

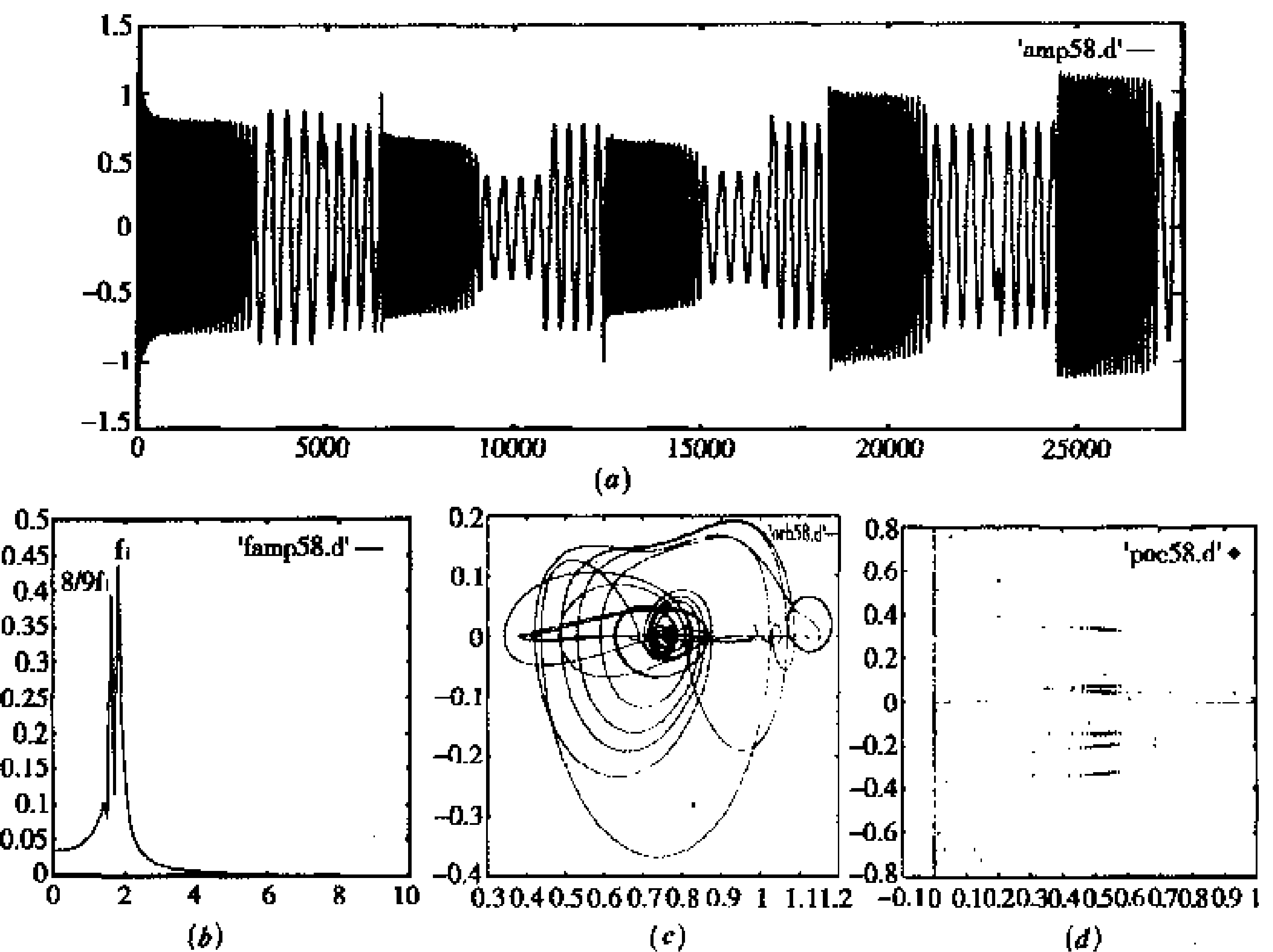


图 4.6 $c_0=0.58$ 图象

(a)振幅($0<t<2780$);(b)功率谱($0\leqslant t\leqslant 2048$);($c$)相平面($|u(L/2,t)|$, $\frac{\partial|u(L/2,t)|}{\partial t}$)上的轨线;($d$)Poincaré 截面。

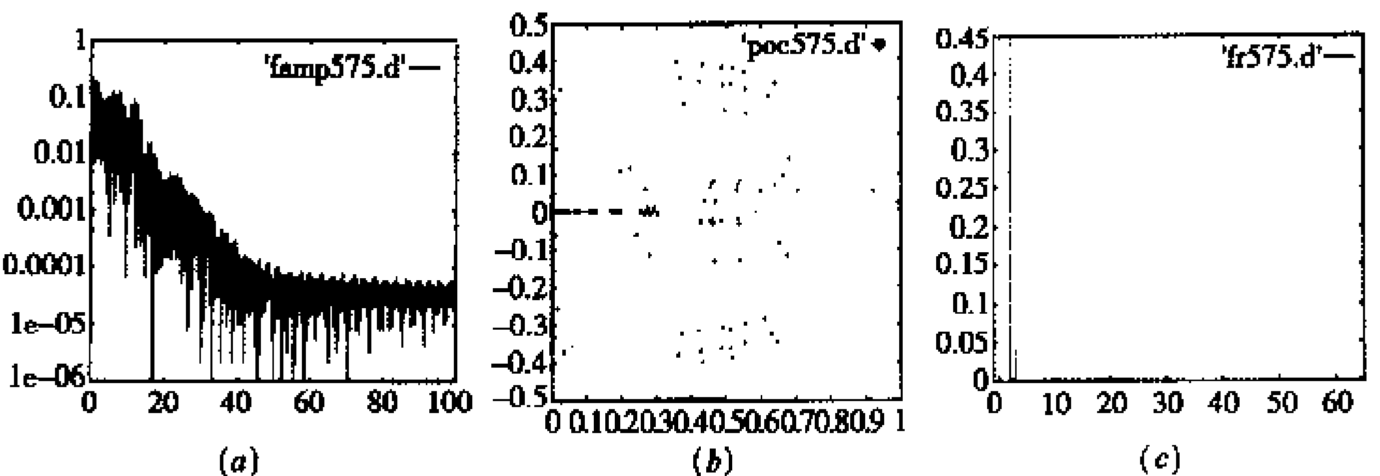


图 4.7 $c_0=0.57$ 图象

(a)功率谱;(b)Poincaré 截面;(c)波数谱。

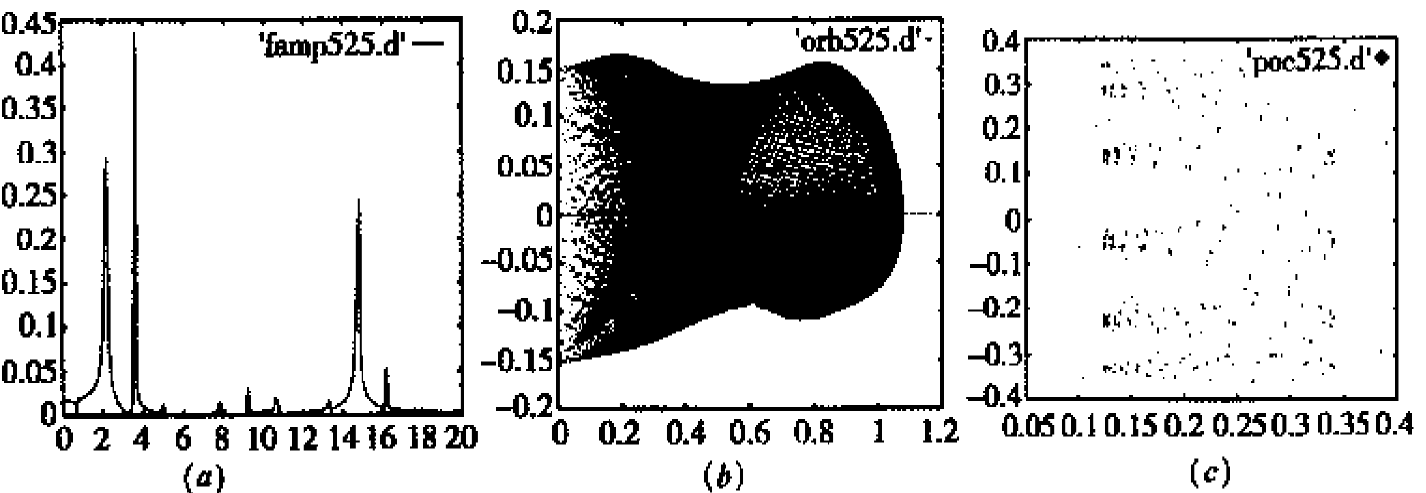


图 4.8 $c_0=0.525$ 图象

(a)功率谱;(b)相平面轨线;(c)Poincaré 截面。

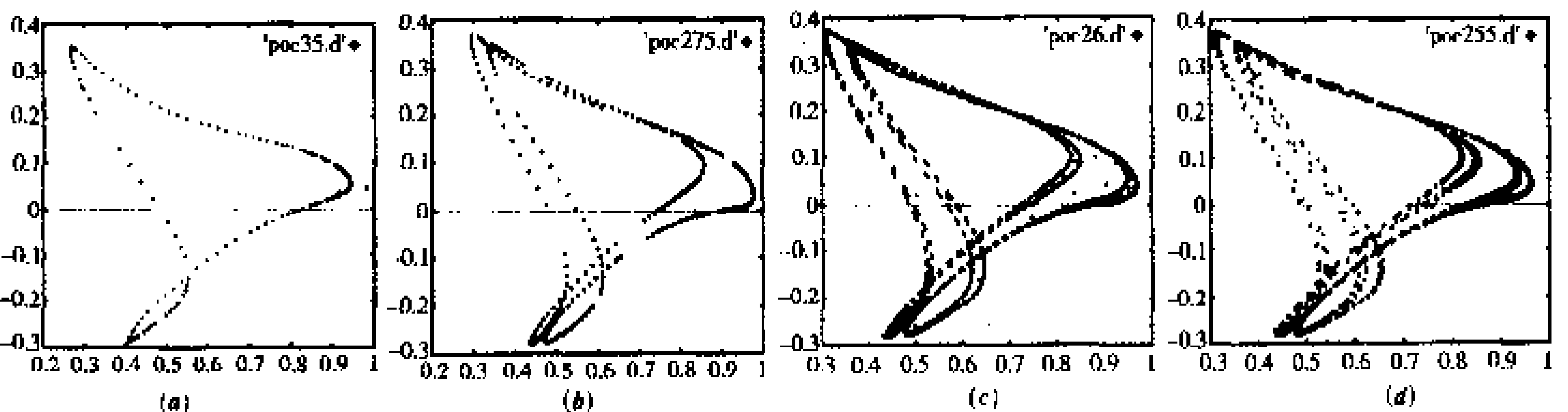


图 4.9　双周期 Poincare 截面

$(a)c_0=0.35$；$(b)c_0=0.275$；$(c)c_0=0.26$；$(d)c_0=0.255$。

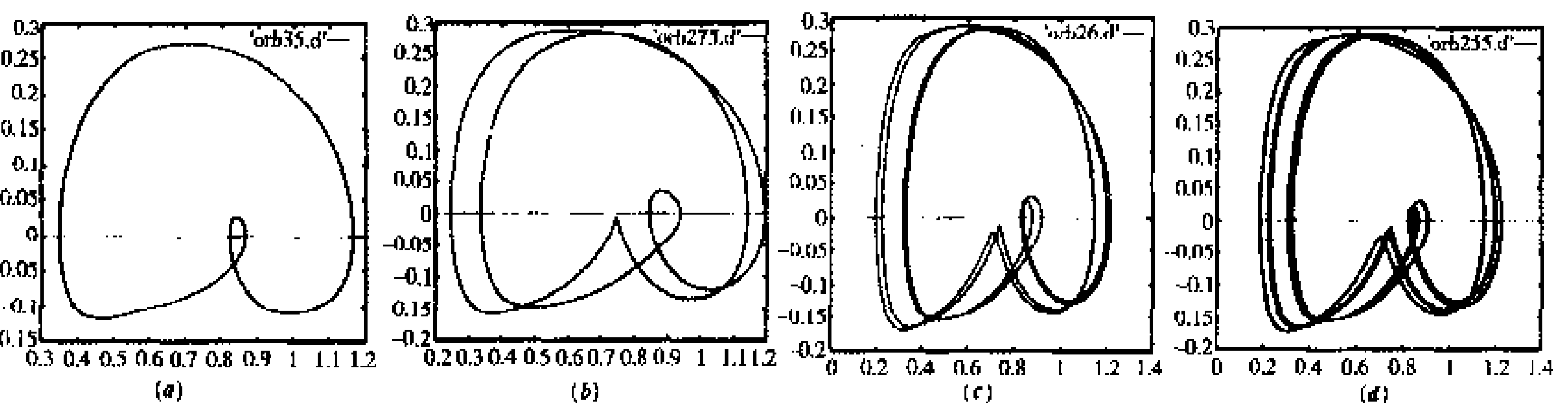


图 4.10　相平面$\left(|u(L/2,t)|, \frac{\partial|u(L/2,t)|}{\partial t}\right)$上的轨线、

$(a)c_0=0.35$；$(b)c_0=0.275$；$(c)c_0=0.26$；$(d)c_0=0.0255$。

4.9 一维 Kuramoto-Sivashinsky 方程

考虑如下一维 Kuramoto-Sivashinsky(KS)方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,(x,t)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+\\ u(x,0)=u_0(x), \qquad\qquad x\in\mathbf{R}\\ u(x,t)\in u(x+L,t), \qquad\qquad L>0\end{cases}$$

设初值 $u_0(x)$ 为奇函数,即有 $u_0(x)=-u_0(L-x)$,在文献[245]中已有估计:对任何 $\rho>0$ 存在 $T^*(\rho)>0$,使得当 $\|u_0\|L^2\leqslant\rho$ 时,有

$$\|u(t)\|_{L^3}\leqslant\rho_0\overset{\text{def}}{=\!=}C_0L^{\frac{5}{2}} \tag{4.9.1}$$

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}\leqslant\rho_1\overset{\text{def}}{=\!=}C_1L^{\frac{7}{2}},\ \forall\ t\geqslant T^* \tag{4.9.2}$$

其中 C_0,C_1 为绝对常数,它与 L 和初值 u_0 无关,我们可将(KS)改写为泛函微分方程形式:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au-A^{\frac{1}{2}}u+B(u,u)=0,u\in H \tag{4.9.3}$$

其中 $A=\dfrac{\partial^4}{\partial x^4}$,具有定义域

$$D(A)=H^4_{\text{per}}((0,L))$$

B 为双线性算子,具有形式

$$B(u,v)=u\frac{\partial v}{\partial x},\forall\ u,v\in H^1_{\text{per}}((0,L))$$

$$H=\{u\in L^2((0,L))\,|\,u(x,t)=u(x+L,t),$$
$$u(x,t)=-u(L-x,t),x\in\mathbf{R}\}$$

在 H 中内积为$(\cdot,\cdot)$,其模为$|\cdot|$,令

$$\|u\|=|A^{\frac{1}{2}}u|=\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|$$

因 A 是自共轭正算子,它的逆 $A^{-1}:L^2((0,L))\rightarrow L^2((0,L))$是紧的,因此存在 H 空间的完备正交基,由 A 的特征向量$\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$所组

成，其中

$$w_j(x)=\sin\ (2\pi x/L)$$

对应于特征值 $\lambda_j=(2\pi j/L)^4, j=1,2,\cdots$ 令 $P=P_m$ 表示 H 在子空间 span $\{w_1,\cdots,w_m\}$ 上的正交投影，$Q=Q_m=I-P$，因 P 和 Q 与 A 以及它的幂可交换。由式(4.9.3)可分裂为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+Ap-A^{\frac{1}{2}}p+pB(u,u)=0,\ P=Pu \quad (4.9.4)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+Aq-A^{\frac{1}{2}}q+QB(u,u)=0,\ q=Qu \quad (4.9.5)$$

由 Agmon 不等式

$$\| u \|_{\infty}\leqslant\sqrt{2}\,|u|^{\frac{1}{2}}\| u \|^{\frac{1}{2}}$$

推出

$$|(B(u,v),w)|\leqslant\sqrt{2}\,|u|^{\frac{1}{2}}\| u \|^{\frac{1}{2}}\| v \|\,|w| \quad (4.9.6)$$

我们也易于验证

$$(B(u,u),u)=0,\ \forall u\in H^1_{\mathrm{per}}((0,L)) \quad (4.9.7)$$

先讨论 KS 方程的解对时间 t 的解析性。考虑 KS 方程的复化方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\zeta}+Au-A^{\frac{1}{2}}u+B(u,u)=0$$

$$u\in H,\zeta\in\mathbf{C},\mathrm{Re}\ \zeta>0$$

其中 H、$D(A)$，A 和 B 均为相应空间和算子的复化拓展。

定理 4.9.1 设 $\rho>0$，$\mathscr{L}$ 表示中心在 $\delta+\tau(\tau\geqslant0)$ 具半径为 δ 的所有开盘(disk)的并集，其中

$$\delta=\delta(\rho)=\frac{\lambda_1^{\frac{1}{4}}}{8\rho+2\lambda_1^{\frac{1}{4}}} \quad (4.9.8)$$

设 $u(s)$ 为在含有正实轴区域上的解，使得

$$|u(t)|\leqslant\rho,\ \forall t\geqslant0 \quad (4.9.9)$$

则解 $u(\zeta)$ 在 $\mathscr{L}$ 中存在，且映照 $u:\mathscr{L}\to D(A)$ 是解析的，满足

$$|u(\zeta)|\leqslant2\rho,\ \forall\zeta\in S \quad (4.9.10)$$

$$\left|\frac{du(t)}{dt}\right| \leqslant \frac{4\rho}{\delta},\ \forall t > \frac{1}{2}\delta \tag{4.9.11}$$

$$|Au(t)| \leqslant K_1(\rho) = \frac{32\rho}{\delta} + 4\rho + 10\rho^{\frac{13}{5}},\ \forall t \geqslant \frac{1}{2}\delta \tag{4.9.12}$$

证明 式(4.9.8)和 u 作内积,乘以 $e^{i\theta}$,再取实部得

$$\frac{d}{ds}|u(se^{i\theta})|^2 \leqslant 2\cos\theta(-|A^{\frac{1}{2}}u|^2 + |A^{\frac{1}{4}}u|^2) + 2|B(u,u),u| \tag{4.9.13}$$

利用插值不等式和 Young 不等式

$$|A^{\frac{1}{4}}u|^2 \leqslant |u||A^{\frac{1}{2}}u| \leqslant \frac{1}{2}|u|^2 + \frac{1}{2}|A^{\frac{1}{2}}u|^2 \tag{4.9.14}$$

由式(4.9.6)得

$$|B(u,u),u| \leqslant \sqrt{2}|u|^{\frac{3}{2}}\|u\|^{\frac{3}{2}} \leqslant \sqrt{2}\lambda_1^{-\frac{1}{8}}|u|\,\|u\|^2 \leqslant \sqrt{2}\lambda_1^{-\frac{1}{8}}|u|^2|A^{\frac{1}{2}}u|$$

由 Young 不等式,有

$$|B(u,u),u| \leqslant \frac{|u|^4}{\lambda_1^{\frac{1}{4}}\cos\theta} + \frac{1}{2}\cos\theta|A^{\frac{1}{2}}u|^2 \tag{4.9.15}$$

由式(4.9.13)、(4.9.14)和式(4.9.15)可得

$$\frac{d}{ds}|u|^2 \leqslant \frac{2}{\lambda_1^{\frac{1}{4}}\cos\theta}|u|^4 + \cos\theta|u|^2$$

令 $y(s)=|u(se^{i\theta})|^2, y_0=|u_0|^2$,则有

$$\frac{dy}{dt} \leqslant \alpha y(y+\beta)$$

其中 $\alpha=\dfrac{2}{\lambda_1^{\frac{1}{4}}\cos\theta}, \beta=\dfrac{1}{2}\lambda_1^{\frac{1}{4}}\cos^2\theta$。直接积分可得

$$\frac{y}{y+\beta} \leqslant s\cos\theta\frac{y_0}{y_0+\beta}$$

寻求 s 的上界,使之

$$y \leqslant 2y_0 \tag{4.9.16}$$

注意到函数 $z(z+\beta)^{-1}$ 是增加函数，$z\in(0,\infty)$。要使式(4.9.16)成立，只要

$$s\cos\theta\frac{y_0}{y_0+\beta}\leqslant\frac{2y_0}{2y_0+\beta}$$

或

$$s\leqslant\frac{1}{\cos\theta}\lg\left(\frac{2(y_0+\beta)}{2y_0+\beta}\right)=\frac{1}{\cos\theta}\lg\left(1+\frac{\beta}{2y_0+\beta}\right)$$

由于

$$\lg(1+z)\geqslant\frac{1}{2}z,\ z\in(0,1)$$

则有

$$\frac{1}{\cos\theta}\lg\left(1+\frac{\beta}{2y_0+\beta}\right)\geqslant\cos\theta\left(\frac{\lambda_1^{\frac{1}{4}}}{8y_0+2\lambda_1^{\frac{1}{4}}\cos^2\theta}\right)\geqslant$$

$$\sqrt{2}\,\delta\cos\theta$$

因此，在区域

$$\mathscr{L}=\{\zeta=se^{i\theta}|s=\sqrt{2}\,\delta\cos\theta,\ -\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2\}$$

上式(4.9.16)成立，因此式(4.9.3)的解在 $\mathscr{L}$ 上是解析的。由假设(4.9.9)可知式(4.9.3)的解取初值 $u(t_0)$，$t_0>0$，在 $\mathscr{L}+t_0$ 上是解析的。现证式(4.9.11)。应用柯西积分公式，对圆 Γ：中心在实轴 $t>\frac{1}{2}\delta$ 上的任何一点，半径为 $\frac{1}{2}\delta$。由式(4.9.9)可得

$$\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|=\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{u(\zeta)}{(t-\zeta)}\mathrm{d}\zeta\right|\leqslant\frac{4\rho}{\delta}$$

为证式(4.9.12)，注意到由式(4.9.3)有

$$|Au|\leqslant\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|+|A^{\frac{1}{2}}u|+|B(u,u)|$$

从式(4.9.6)和 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$|Au|\leqslant\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|+|u|^{\frac{1}{2}}|A^{\frac{1}{2}}u|^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}\,|u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{3}{2}}$$

(4.9.17)

由插值不等式

$$\|u\| \leqslant |u|^{\frac{3}{4}}|Au|^{\frac{1}{4}}$$

和 Young 不等式，从式(4.9.17)可得

$$\frac{1}{2}|Au| \leqslant \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right| + \frac{1}{2}|u| + \sqrt{2}\,|u|^{\frac{13}{8}}|Au|^{\frac{3}{8}}$$

再用 Young 不等式得

$$\frac{1}{2}|Au| \leqslant \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right| + \frac{1}{2}|u| + \frac{5}{8}\times 2^{\frac{4}{5}}|u|^{\frac{13}{5}} + \frac{3}{8}|Au|$$

由假设式(4.9.9)和式(4.9.11)，即得式(4.9.12)。

现对 $q(t)$ 和 $\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$ 的上界作估计。

定理4.9.2 设 m 充分大，使得

$$\lambda_{m+1} \geqslant \max\{16, 8(2\rho_0\rho_1^3)^{\frac{1}{2}}\lambda_1^{-\frac{1}{4}}\} \tag{4.9.18}$$

其中 ρ_0,ρ_1 为式(4.9.1)、(4.9.2)取定，则对任何 $\rho>0$，式(4.9.3)的任何解 $u(t)=p(t)+q(t)$，$|u(0)|\leqslant\rho$ 有如下估计

$$|q(t)|^2 \leqslant |q(T^*)|^2\exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda_{m+1}(t-T^*)\right\} + 4\rho_0\rho_1^3\lambda_{m+1}^{-2}\quad \forall\, t\geqslant T^*(\rho) \tag{4.9.19}$$

其中 T^* 如同式(4.9.1)、(4.9.2)，更进一步，

$$\left|\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}\right| \leqslant K_2\lambda_{m+1}^{-1},\ \forall t\geqslant T^{**}(\rho) \tag{4.9.20}$$

其中

$$T^{**}(\rho) = \max\left\{T^*(\rho)+\lambda_{m+1}^{-1}|\lg(4\rho_1^3/\lambda_{m+1}^2\rho_0)|, \frac{1}{8}\right\},$$

$$K_2 = 32(2\rho_0\rho_1^3)^{\frac{1}{2}}$$

证明 设 $t\geqslant T^*(\rho)$。作式(4.9.5)和 q 的内积，有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|q|^2 + |A^{\frac{1}{4}}q|^2 \leqslant |A^{\frac{1}{2}}q|^2 + |B(u,u),q| \leqslant \lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}|A^{\frac{1}{2}}q|^2 + |B(u,u),q| \tag{4.9.21}$$

由式(4.9.1)、(4.9.2)和式(4.9.6)可得

$$|B(u,u),q| \leqslant \sqrt{2}\,|u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{3}{2}}|q| \leqslant$$

$$\sqrt{2}\,\rho_0^{\frac{1}{2}}\rho_1^{\frac{3}{2}}\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}|A^{\frac{1}{2}}q| \leqslant \rho_0\rho_1^3\lambda_{m+1}^{-1} + \frac{1}{2}|A^{\frac{1}{2}}q|^2$$

由式(4.9.21)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|q|^2 + 2\left(\frac{1}{2} - \lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\right)|A^{\frac{1}{2}}q|^2 \leqslant 2\rho_0\rho_1^3\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}$$

由式(4.9.18)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|q|^2 + \frac{1}{2}\lambda_{m+1}|q|^2 \leqslant 2\rho_0\rho_1^3\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}$$

由标准的 Gronwall 不等式即得式(4.9.19)。置 $\rho=(8\rho_0\rho_1^3)^{\frac{1}{2}}\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}$，则从式(4.9.19)有

$$|q(t)| \leqslant \rho,\ \forall t \geqslant T^{**}(\rho)$$

类似于式(4.9.11)推出

$$\left|\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}\right| \leqslant \frac{4\rho}{\delta(\rho)},\ \forall\ t \geqslant T^{**} \tag{4.9.22}$$

其中 $\delta(\rho)$ 如同定理4.9.1中所取。从式(4.9.18)有 $\delta(\rho)\geqslant\frac{1}{4}$，由此得式(4.9.20)。

推论4.9.1 设 m 充分大，并满足式(4.9.18)，则对每个解 $u(t)=p(t)+q(t)$ 在整体吸引子上有

$$|q(t)|^2 \leqslant \frac{4\rho_0\rho_1^3}{\lambda_{m+1}^2},\ \forall t \in \mathbf{R}$$

和

$$\left|\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}\right| \leqslant K_2\lambda_{m+1}^{-1},\ \forall t \in \mathbf{R}$$

现考虑各种近似惯性流形。令

$\mathscr{B}=\{p\in PH:\|p\|\leqslant 2\rho_1\}$，$\mathscr{B}^{\perp}=\{q\in QH:\|q\|\leqslant 2\rho_1\}$，

我们要证明，存在映照 $\Phi^s:\mathscr{B}\to QH$ 满足

$$A\Phi^s(p) - A^{\frac{1}{2}}\Phi^s(p) + QB(p+\Phi^s(p),p+\Phi^s(p)) = 0,\ p\in\mathscr{B} \tag{4.9.23}$$

Φ^s 的图，记为 $\mu^s=\mathrm{graph}\ \Phi^s$，含有式(4.9.3)的定常态，因此称 μ^s

为定常近似惯性流形。

定理4.9.3 设 m 充分大，使得

$$\lambda_{m-1} \geqslant \max\ (4r_2^2, r_1^2/4\rho_1^2) \tag{4.9.24}$$

其中

$$r_1 = 2\rho_1 + 8\sqrt{2}\rho_1^2\lambda_1^{-\frac{1}{8}}\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{4}}, r_2 = 1 + 8\rho_1\lambda_1^{-\frac{1}{8}}\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{4}}$$

这里 ρ_0，ρ_1为式(4.9.1)、(4.9.2)所定义。则存在唯一映照 $\Phi^s: \mathscr{B} \to QH$，满足式(4.9.17)，它的图为 C 解析流形。更进一步有

$$\|\Phi^s(p)\| \leqslant \lambda_{m-1}^{-\frac{1}{2}} r_1,\ \forall p \in \mathscr{B}$$

证明 对$\forall p \in \mathscr{B}$，定义

$$T_p(q) = A^{-\frac{1}{2}}q - A^{-1}QB(p+q, p+q), \forall q \in \mathscr{B}^\perp \tag{4.9.25}$$

先证 $T_p: \mathscr{B}^\perp \to \mathscr{B}^\perp$。从式(4.9.19)有

$$\|T_p(q)\| \leqslant |A^{-\frac{1}{4}}q| + |A^{-\frac{3}{4}}QB(p+q, p+q)|$$

由式(4.9.6)有

$$\|T_p(q)\| \leqslant 2\rho_1\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} + 8\sqrt{2}\rho_1^2\lambda_1^{-\frac{1}{8}}\lambda_{m+1}^{-\frac{3}{4}} =$$

$$\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} r_1 \leqslant 2\rho_1$$

现证 T_p 是压缩的。微分式(4.9.19)得

$$\frac{\partial T_p(q)\eta}{\partial q} = A^{-\frac{1}{2}}\eta - A^{-1}Q[B(\eta, p+q) + B(p+q, \eta)]$$

再用式(4.9.6)，有

$$\left\|\frac{\partial T_p(q)\eta}{\partial q}\right\| \leqslant \lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\|\eta\| + 8\rho_1\lambda_1^{-\frac{1}{8}}\lambda_{m+1}^{-\frac{3}{4}}\|\eta\| \leqslant$$

$$\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} r_2\|\eta\| \leqslant \frac{1}{2}\|\eta\|$$

由此可知 T_p 是压缩的。因此，对于任意 $p \in \mathscr{B}$，存在 T_p 的唯一不动点 $\Phi^s(p): \mathscr{B} \to \mathscr{B}^\perp$ 满足式(4.9.17)。由文献[246]知：Φ^s 是一个 C 解析流形。

从式(4.9.23)可知，作为近似惯性流形的选取是隐式的。下面

构造一些显式近似函数,逼近于 Φ_s。

定理4.9.4 设 m 充分大,使得式(4.9.18)成立。定义

$$\Phi_0(p) = 0, \forall p \in \mathscr{B}$$

$$\Phi_{i+1}(p) = T_p(\Phi_i(p)), \forall p \in \mathscr{B}, i = 1,2,\cdots,$$

则有

$$\|\Phi_1\| \leqslant K_3 \lambda_{m+1}^{-\frac{3}{4}} \tag{4.9.26}$$

$$\|\Phi^s(p) - \Phi_i(p)\| \leqslant 2K_3 \alpha^i \lambda_{m+1}^{-\frac{3}{4}} \tag{4.9.27}$$

其中

$$K_3 = 4\sqrt{2}\lambda_1^{-\frac{1}{8}}\rho_1^2,\ \alpha = r_2 \lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}$$

证明 设 $p \in \mathscr{B}$ 为固定的。由式(4.9.6)可得

$$\|\Phi_1(p)\| = |A^{\frac{3}{4}}QB(p,p)| \leqslant \lambda_{m+1}^{-\frac{3}{4}} |B(p,p)| \leqslant$$

$$4\sqrt{2}\lambda_1^{-\frac{1}{8}}\rho_1^2\lambda_{m+1}^{-\frac{3}{4}}$$

这就证明了式(4.9.25)。因 T_p 为压缩映照,具有压缩常数 α,

$$\|\Phi_{k+1}(p) - \Phi_k(p)\| \leqslant \alpha^k |\Phi_1(p) - \Phi_0(p)\| = \alpha^k \|\Phi_1(p)\|,$$

$$k = 0,1,\cdots$$

因

$$\Phi^s(p) - \Phi_i(p) = \sum_{k=i}^{\infty}[\Phi_{k+1}(p) - \Phi_k(p)]$$

有

$$\|\Phi^s(p) - \Phi_i(p)\| \leqslant \sum_{k=i}^{\infty}\alpha^k\|\Phi_1(p)\| \leqslant 2\alpha^i \|\Phi_i(p)\|$$

将式(4.9.26)代入即得式(4.9.27)。

定理4.9.5 设 m 充分大,使得式(4.9.18)、(4.9.24)和

$$\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} + 4\rho_1\lambda_{m+1}^{-\frac{7}{8}} + \sqrt{2}\rho_0^{\frac{1}{2}}\rho_1^{\frac{1}{2}}\lambda_{m+1}^{-\frac{3}{4}} \leqslant \frac{1}{2} \tag{4.9.28}$$

成立,则对任何 $\rho > 0$ 和式(4.9.3)的每一个解 $u(t) = p(t) + q(t)$, $|u(0)| \leqslant \rho$,有

$$|A(q(t)) - \Phi^s(p(t))| \leqslant 2K_2\lambda_{m+1}^{-1} \tag{4.9.29}$$

$$\|q(t)-\Phi_i(p(t))\| \leqslant 2K_2\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{4}} + 2K_3\alpha\lambda_{m+1}^{-\frac{3}{4}}$$
$$\forall\, t \geqslant T^{**}, i=1,2,\cdots \qquad (4.9.30)$$

其中 T^{**} 和 K_2 如同定理4.9.2，K_3 和 α 如同定理4.9.4。

证明 由式(4.9.1)、(4.9.2)有

$$|u(t)| \leqslant \rho_0, \|u(t)\| \leqslant \rho_1, \forall\, t \geqslant T^{**}(\rho)$$

因此 $\Phi^s(p(t))$ 是确定的，且满足 $\|\Phi^s(p(t))\| \leqslant 2\rho_1$。

令 $\Delta(t)=q(t)-\Phi^s(p(t)), t\geqslant T^{**}$。从式(4.9.5)和式(4.9.23)有

$$A\Delta - A^{\frac{1}{2}}\Delta + Q[B(\Delta, p+\Phi^s(p(t)) + B(u,\Delta)] + \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 0$$

由式(4.9.6)得

$$|A\Delta| \leqslant |A^{\frac{1}{2}}\Delta| + \sqrt{2}\,|\Delta|^{\frac{1}{2}}\|\Delta\|^{\frac{1}{2}}\|p+\Phi^s(p)\| +$$
$$\sqrt{2}\,|u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}\|\Delta\| + \left|\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right|$$

由此及式(4.9.20)得

$$|A\Delta| \leqslant (\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} + 4\rho_1\lambda_{m+1}^{-\frac{7}{8}} + \sqrt{2}\,\rho_0^{\frac{1}{2}}\rho_1^{\frac{1}{2}}\lambda_{m+1}^{-\frac{3}{4}})|A\Delta| + K_2\lambda_{m+1}^{-1}$$

将式(4.9.28)代人上式即得式(4.9.29)。估计式(4.9.30)，直接由式(4.9.29)和式(4.9.27)得到。

现考虑几种近似惯性流形及其数值结果：

(1) Φ_1 近似：

设方程为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au + B(u,u) = f \qquad (4.9.31)$$

从式(9.28)可得

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + Aq + Q[B(p,p)+B(q,p)+B(p,q)+B(q,q)] = Qf \qquad (4.9.32)$$

可以证明，当 m 充分大，$u=p+q$ 在吸引子 $\mathscr{A}$ 上，$\left|\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right|$，$|Q(B(q,p)|$，$|QB(p,q)|$ 和 $|QB(q,q)|$ 相对很小，可取 AIM 作为

$$\Phi_1(p) = -A^{-1}Q[f - B(p,p)] \qquad (4.9.33)$$

的图，其误差为 $\lambda_{m+1}^{-\frac{3}{2}}$。定义 Error $(\Phi_a) = \max_{u\in\mathscr{A}} |\Phi_0(p) - q|$。

(2) Euler-Galerkin AIM

$q = \Psi_\tau(p)$满足

$$q = -\tau(\tau A + I)^{-1}QB(p+q)$$

它具有如下压缩映照的不动点：

$$\mathscr{J}: q \to -\tau(I + \tau AQ)^{-1}QB(p+q) \qquad (4.9.34)$$

映照 $\mathscr{J}$ 的第一次迭代（初值取 $q_0 \equiv 0, \mu_0 = P_mH$），产生显式函数 $\Psi_{1\tau}: P_mH \to Q_mH$

$$\Psi_{1\tau}(p) = -\tau(I + \tau AQ)^{-1}QF(p) \qquad (4.9.35)$$

Graph$\Psi_{1\tau} = \mu_\tau$ 称为 Euler AIM。

(3) 拟定态 AIM

由定理4.9.2，我们对函数

$$\Psi_\tau(p) = A^{-\frac{1}{2}}\Phi_1(p) -$$
$$A^{-1}Q[B(p,p) + B(\Phi_1,p) + B(p,\Phi_1) + B(\Phi_1,\Phi_1)] \qquad (4.9.36)$$

中的某些项作估计。

命题4.9.1 设 m 充分大，满足(4.9.18)，则对任何 $u = p + q \in \mathscr{A}$，如下估计成立：

(i) $|A^{-1}Q_mB(\Phi_1(p),\Phi_1(p))| \leqslant 2\sqrt{2}K_3^2\lambda_{m+1}^{-\frac{21}{8}}$

(ii) $|A^{-1}Q_mB(\Phi_1(p),p)| \leqslant C_3\rho_1^{\frac{1}{2}}\rho_0^{\frac{1}{4}}\rho_2^{\frac{1}{4}},\lambda_{m+1}^{-2}$

(iii) $|A^{-1}Q_mB(p,\Phi_1(p))| \leqslant \sqrt{2}\rho_0^{\frac{1}{2}}\rho_1^{\frac{1}{2}}\lambda_{m+1}^{-\frac{7}{4}}K_3$

其中 ρ_2如同定理4.9.1，ρ_0，ρ_1分别如同式(4.9.1)、(4.9.2)。

证明 由 Agmon 不等式和(4.9.26)有

$$|A^{-1}Q_mB(\Phi_1(p),\Phi_1(p))| \leqslant$$
$$\lambda_{m+1}^{-1}\|\Phi_1(p)\|_\infty\|\Phi_1(p)\| \leqslant$$
$$\lambda_{m+1}^{-1}\sqrt{2}|\Phi_1(p)|^{\frac{1}{2}}\|\Phi_1(p)\|^{\frac{3}{2}} \leqslant$$

$$\lambda_{m+1}^{\frac{1}{}} \sqrt{2}\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{8}}\|\Phi_1(p)\|^2 \leqslant$$

$$\lambda_{m+1}^{1} \sqrt{2}\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{8}}K_3^2\lambda_{m+1}^{-\frac{3}{2}}$$

对于(ii)，再由式(4.9.26)有

$$|A^{-1}Q_m B(\Phi_1(p),p)| \leqslant \lambda_{m+1}^{-1}|\Phi_1(p)|\|p_x\|_\infty \leqslant$$

$$\lambda_{m+1}^{-2}|p_x\|_\infty$$

消去$\|p_x\|_\infty$，由 Agmon 不等式有

$$\|p_x\|_\infty \leqslant C_3|p_{xx}|^{\frac{1}{2}}|p_x|^{\frac{1}{2}} \leqslant C_3\rho_1^{\frac{1}{2}}|A^{\frac{1}{2}}p|^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$C_3\rho_1^{\frac{1}{2}}|p|^{\frac{1}{4}}|Ap|^{\frac{1}{4}} \leqslant C_3\rho_1^{\frac{1}{2}}\rho_0^{\frac{1}{4}}|Ap|^{\frac{1}{4}}$$

因$|Ap|\leqslant\rho_2$，由此得(ii)。最后，由 Agmon 不等式，式(4.9.26)和式(4.9.1)、(4.9.2)得

$$|A^{-1}Q_m B(p,\Phi_1(p))| \leqslant \lambda_{m+1}^{-1}\|p\|_\infty\|\Phi_1(p)\| \leqslant$$

$$\lambda_{m+1}^{-1} \sqrt{2}|p|^{\frac{1}{2}}\|p\|^{\frac{1}{2}}K_3\lambda_{m+1}^{-\frac{3}{4}} \leqslant \lambda_{m+1}^{-\frac{7}{4}} \sqrt{2}\rho_0^{\frac{1}{2}}\rho_1^{\frac{1}{2}}K_3$$

这就证明了(iii)。

现考虑去掉式(4.9.36)中的某些项。因(i)、(ii)中的项小于$C\lambda_{m+1}^{-2}$，称忽略(i)项的“拟定态 II”，同时忽略(i)、(ii)的为“拟定态 III”，忽略(i)、(ii)、(iii)的为“拟定态 Ⅳ”。对这些情况可进一步考虑。

(4)古典的 Galerkin 方法。即在近似惯性形式(AIF)

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + Ap + PF(p + \Phi_a(p)) = 0, p \in PH \quad (4.9.37)$$

中，$\Phi_a = 0$。

现对 KS 方程

$$u_t + 4u_{xxxx} + \alpha(u_{xx} + uu_x) = 0$$

$$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

$\alpha = L^2/\pi^2$。上述各种近似方法(非线性 Galerkin 方法)和古典 Galerkin 方法的误差估计比较。

第五章　整体吸引子的某些性质

这一章，我们将叙述和讨论整体吸引子的某些性质：(1)存在有限少数个模决定吸引子的整体性质($t\to\infty$)；(2)整体吸引子的震荡性，水平集零点的测度估计；(3)一类整体吸引子的结构。这些内容可参见 Foias C、Kukavica I、高、郭等的工作，文献[160]～[166]。

5.1　Kuramoto-Sivashinsky 方程

我们将证明，对于一维具初值周期边界条件的 KS 方程的解渐进地为它的四个点所决定，即存在 x_1,x_2,x_3和 x_4在周期区域 Ω 中，如果

$$\lim_{t\to\infty}|u_1(x_j,t)-u_2(x_j,t)|=0,j=1,2,3,4$$

其中 u_1,u_2为 KS 方程具初值周期边界条件问题的解，则有

$$\lim_{t\to\infty}\|u_1(x_j,t)-u_2(x_j,t)\|_{L^2(\Omega)}=0$$

现设 KS 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{5.1.1}$$

具周期边界条件

$$u(x+L,t)=u(x,t),x\in\mathbf{R},t\geqslant 0,L>0 \tag{5.1.2}$$

记 $u_x=\dfrac{\partial u}{\partial x},u_{xx}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\Omega=[0,L]$，

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}=\sup_{x\in\Omega}|u(x)|,\|u\|_{L^2(\Omega)}=(\int_\Omega u^2(x)\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}$$

其中 $\Omega' \subset \Omega$。定义

$$H = \{u \in L^2_{loc}(\mathbf{R}): \|u\|_{L^2(\Omega)} < \infty,$$
$$\int_\Omega u \mathrm{d}x = 0, u \text{ 为 } \Omega \text{ 周期}\}$$

则 H 为 Hilbert 空间，定义内积为 $(u,v) = \int_\Omega uv\mathrm{d}x, u,v \in H$。令 $Au = u_{xxxx}$，u 的定义域为 $D(A) = \{u \in H: u_{xxxx} \in H\}$，则 KS 方程可写为

$$\dot{u} + Au - A^{\frac{1}{2}}u + B(u,u) = 0 \qquad (5.1.3)$$

其中 $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$，$B(u,v) = uv_x$。对于任何 $u_0 \in H$，存在方程(5.1.3)具初值 $u(0) = u_0$ 的唯一解 $u(t) = S(t)u_0 (t \geqslant 0)$，而且解算子 $S(t)$ 是单射的，$(\forall\ t \geqslant 0)$。且存在 $\rho_0 = \rho(L), \rho_1 = \rho_1(L)$，使得

$$\limsup_{t\to\infty} \|S(\tau)u_0\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \rho_0, u_0 \in H \qquad (5.1.4)$$

$$\limsup_{t\to\infty} \|\frac{\partial}{\partial x} S(t)u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \rho_1, u_0 \in H \qquad (5.1.5)$$

并且存在整体吸引子(见文献[80])

$$\mathscr{A} = \bigcap_{t \geqslant 0} S(t)\{u_0 \in H: \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \leqslant 2\rho_0\}$$

吸引子 $\mathscr{A}$ 具有如下性质：

(1) $\mathscr{A}$ 是 $C[0,L]$ 和 $C^1[0,L]$ 的紧子集。

(2) $\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}\ (S(t)u_0, \mathscr{A}) = 0, \forall\ u_0 \in H$，其中距离是取在 $C[0,L]$ 或 $C^1[0,L]$，且 $S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}, \forall\ t \geqslant 0$。

(3) $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \rho_0, \|\frac{\partial u_0}{\partial x}\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \rho_1, u_0 \in \mathscr{A}$。

(4) $\forall\ u_0 \in \mathscr{A}$，存在唯一解 $u(t) \in \mathscr{A}$，且 $u(0) = u_0$。

(5) 设序列 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 依 $C[0,1]$ 收敛于 $u_0 \in \mathscr{A}$，则 $\{S(t)u_n\}_{n=1}^\infty$ 依 $C[0,1]$ 收敛于 $S(t)u_0, \forall\ t \in \mathbf{R}$。

对于 KS 方程，我们还有 Gevrey 类正则性结果。对任何 $r \geqslant 0$ 算子 $e^{rA^{\frac{1}{4}}}$ 为具参数 r 的 Gevrey 算子，早已证明，存在 $r = r(L) > 0$，使得整体吸引子 $\mathscr{A}$ 由属于 Geverey 类函数所组成，同时我们还

知道，属于某种 Gevrey 类的函数具有实解析性。

定理5.1.1 存在 $r=r(L)>0$ 和 $M=M(L)$ 使得

$$\|e^{rA^{\frac{1}{4}}}(u_1-u_2)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant M\|u_1-u_2\|_{L^2(\Omega)},\ u_1,u_2\in\mathscr{A}$$

证明 见文献[161]。

引理5.1.1 设 $f\in H$ 满足

$$\|e^{rA^{\frac{1}{4}}}f\|_{L^2(\Omega)}\leqslant M\|f\|_{L^2(\Omega)},r>0,M>0 \qquad (5.1.6)$$

则对任何 $d>0$，存在 $M'=M'(r,M,L,d)$，使得

$$\|f\|_{L^2(\Omega)}\leqslant M'\|f\|_{L^2(\Omega')}$$

其中 $\Omega'\subseteq\Omega,\dim(\Omega')\geqslant d$。

证明 首先，从式(5.1.6)推出

$$\|f^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}=\|A^{\frac{n}{4}}f\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\frac{n!}{r^n}\|e^{rA^{\frac{1}{4}}}f\|_{L^2(\Omega)}\leqslant$$

$$\frac{Mn!}{r^n}\|f\|_{L^2(\Omega)},\qquad n\in\mathbf{N}_0 \qquad (5.1.7)$$

其中 $f^{(n)}=\frac{d^nf}{dx^n},\mathbf{N}_0=\{0,1,2,\cdots\}$。因此，从 Agmon 不等式

$$\|f^{(n)}\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant\|f^{(n)}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\|A^{\frac{1}{4}}f^{(n)}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}=$$

$$\|A^{\frac{n}{4}}f\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\|A^{\frac{n+1}{4}}f\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\leqslant$$

$$\frac{M(n+1)!}{r^{n+\frac{1}{2}}}\|f\|_{L^2(\Omega)},\forall\ n\in\mathbf{N}_0$$

这就表明 f 能被延拓为一个全纯函数 $\bar{f}$ 在 $\Pi_r=\{z\in\mathbf{C}:|\mathrm{Im}\ z|<r\}$ 内。对于任何 $z\in\Pi_{\frac{r}{2}}$，可得

$$|\bar{f}(z)|\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|f^{(j)}(\mathrm{Re})|}{j!}|\mathrm{Im}\ z|^j\leqslant$$

$$\frac{M}{r^{\frac{1}{2}}}\|f\|_{L^2(\Omega)}\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)2^{-j}=M_1\|f\|_{L^2(\Omega)},M_1=\frac{4M}{r^{\frac{1}{2}}}$$

考虑函数族

$$\mathscr{F}=\{g\in\mathscr{H}(\Pi_{\frac{r}{2}}):\|g\|_{L^2(\Omega)}=1,|g(z)|\leqslant M_1,z\in\Pi_{\frac{r}{2}}\}$$

其中$\mathscr{H}(\Pi_{\frac{c}{2}})$表示$\Pi_{\frac{c}{2}}$上的全纯函数的集合，且注意到$\frac{f}{\|f\|_{L^2(\Omega)}}\in \mathscr{F}$(设$f\neq 0$)，而且$\mathscr{F}$是全纯函数在$\Pi_{\frac{c}{2}}$上的标准族。由通常的紧性原理推出，对任何$d>0$，存在$M'>0$，使得$\|g\|_{L^2(\Omega')}\geqslant\frac{1}{M'}$，$\forall\Omega'\subseteq\Omega,\dim\Omega'\geqslant d$。令$g=\frac{f}{\|f\|_{L^2(\Omega)}}$，即得引理结论。

设$n\in\mathbf{N}$，一个集合$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subseteq\Omega$，称之为"决定的"，如果对任何KS方程的一对解$u_1$和$u_2$，当

$$\lim_{t\to\infty}|u_1(x_j,t)-u_2(x_j,t)|=0,j=1,2,\cdots,n \tag{5.1.8}$$

推出

$$\lim_{t\to\infty}\|u_1(\cdot,t)-u_2(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}=0 \tag{5.1.9}$$

引理 5.1.2 为使集合$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset\Omega$是"决定的"，充分地是验证属于整体吸引子的任何两个解u_1和u_2，如果

$$u_1(x_j,t)=u_2(x_j,t),j=1,2,\cdots,n,t\leqslant 0 \tag{5.1.10}$$

推出

$$u_1(\cdot,0)=u_2(\cdot,0) \tag{5.1.11}$$

证明 设集合$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是不可"决定的"，我们能找到两个解，它们属于整体吸引子，满足式(5.1.10)，但不满足式(5.1.11)。因$\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$是不可决定的，因此存在KS方程的两个解v_1和v_2满足式(5.1.8)，但不满足式(5.1.9)，于是可找到一个序列$0\leqslant t_1<t_2<t_3<\cdots$，使得$\{v_1(t_n)-v_2(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$不收敛于0。选取子序列，利用(A1)、(A2)，可设$u_1^0=\lim\limits_{n\to\infty}v_1(t_n)\in\mathscr{A}$，$u_2^0=\lim\limits_{n\to\infty}v_2(t_n)\in\mathscr{A}$，且$u_1^0\neq u_2^0$，由(A4)，$u_1(t)=S(t)u_1^0$，$u_2(t)=S(t)u_2^0\in\mathscr{A}$，$\forall t\in\mathbf{R}$，依(A2)和(A5)，差$u_1(t)-u_2(t)$在集$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上为零($t\leqslant 0$)而$u_1(0)\neq u_2(0)$。引理5.1.2得证。

附注 我们有如下简单的事实：如$f\in C^1[a,b]$，且f具有一个零点在$[a,b]$上，则有

$$\| f \|_{L^2([a,b])} \leqslant (b-a) \| f' \|_{L^2([a,b])}$$

$$\| f \|_{L^\infty([a,b])} \leqslant (b-a)^{\frac{1}{2}} \| f' \|_{L^2([a,b])}$$

定理 5.1.2 存在 $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(L) > 0$ 和 $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(L) > 0$，使得任何集合 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subseteq \Omega$ 是决定的，其中 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$，$x_4 - x_1 = \varepsilon_1$，$x_2 - x_1 < \varepsilon_2$，$x_4 - x_3 < \varepsilon_2$。

证明 设 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subseteq \Omega$，$\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2 > 0$，由引理 5.1.2，设 u_1 和 u_2 为属于整体吸引子的两个解

$$u_1(x_j, t) = u_2(x_j, t), j = 1,2,3,4, t \leqslant 0 \qquad (5.1.12)$$

我们要证明：如果 $\varepsilon_1 > 0$ 充分小，$\varepsilon_2 > 0$ 比 ε_1 更小，则有 $u_1(\cdot, 0) = u_2(\cdot, 0)$。

注意到 $v = u_1 - u_2$ 满足

$$v_t + v_{xxxx} + v_{xx} + v u_{1x} + u_2 v_x = 0 \qquad (5.1.13)$$

式(5.1.13)乘以 v 并在 $\Omega' = [x_1, x_4]$ 上积分($t \leqslant 0$)得

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| v \|^2_{L^2(\Omega')} - v_x(x_4, t) v_{xx}(x_4, t) + v_x(x_1, t) v_{xx}(x_1, t) +$$

$$\int_{\Omega'} v_{xx}^2 \mathrm{d}x - \int_{\Omega'} v_x^2 \mathrm{d}x = - \int_{\Omega'} u_{1x} v^2 \mathrm{d}x - \int_{\Omega'} u_2 v v_x \mathrm{d}x =$$

$$- \int_{\Omega'} u_{1x} v^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{\Omega'} u_{2x} v^2 \mathrm{d}x$$

由(A3)可得

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| v \|^2_{L^2(\Omega')} + \| v_{xx} \|^2_{L^2(\Omega')} - \| v_x \|^2_{L^2(\Omega')} - 2\rho_1 \| v \|^2_{L^2(\Omega')} \leqslant$$

$$v_x(x_4, t) v_{xx}(x_4, t) - v_x(x_1, t) v_{xx}(x_1, t), t \leqslant 0$$

因 v 和 v_x 在 Ω' 中具有零点，$\forall\ t \leqslant 0$，我们有

$$\| v \|_{L^2(\Omega')} \leqslant \varepsilon_1 \| v_x \|_{L^2(\Omega')}, \| v_x \|_{L^2(\Omega')} \leqslant \varepsilon_1 \| v_{xx} \|_{L^2(\Omega')}$$

因此

$$\| v_{xx} \|^2_{L^2(\Omega')} - \| v_x \|^2_{L^2(\Omega')} - 2\rho_1 \| v \|^2_{L^2(\Omega')} \geqslant$$

$$(1 - \varepsilon_1^2 - 2\rho_1 \varepsilon_1^4) \| v_{xx} \|^2_{L^2(\Omega')}, t \leqslant 0$$

现固定 $\varepsilon_1 > 0$ 充分小，使得上式右端括号内 $\geqslant \frac{1}{2}$。由附注可得

$$\|v_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} - \|v_x\|^2_{L^2(\Omega)} - 2\rho_1\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \geqslant \frac{1}{2\varepsilon_1^4}\|v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon_1^4}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant$$

$$2(v_x(x_1,t)v_{xx}(x_1,t) - v_x(x_4,t)v_{xx}(x_4,t)),t \leqslant 0 \tag{5.1.14}$$

下面估计式(5.1.14)右端。首先注意到 v_x 至少在每个正向 $[x_1,x_2]$和$[x_3,x_4]$有一个零点($t\leqslant 0$)。由附注，有

$$|v_x(x_1,t)| \leqslant \varepsilon_2^{\frac{1}{2}}\|v_{xx}(t)\|_{L^2([x_1,x_2])} \leqslant \varepsilon_2^{\frac{1}{2}}\|v_{xx}(t)\|_{L^2(\Omega)}$$

类似地，有

$$|v_x(x_4,t)| \leqslant \varepsilon_2^{\frac{1}{2}}\|v_{xx}\|_{L^2(\Omega)}, \forall\ t \leqslant 0$$

另外

$$|v_{xx}(x_j,t)| \leqslant \|v_{xx}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant L^{\frac{1}{2}}\|v_{xxx}\|_{L^2(\Omega)}$$

$$j = 1,4, t \leqslant 0$$

因此，由式(5.1.14)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon_1^4}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant$$

$$4\varepsilon_2^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}\|v_{xx}\|_{L^2(\Omega)}\|v_{xxx}\|_{L^2(\Omega)}, t \leqslant 0$$

由定理5.1.1和引理5.1.1，上式右端

$$\leqslant 4\varepsilon_2^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2M}{r^2}\|v\|_{L^2(\Omega)}\right)\left(\frac{6M}{r^3}\|v\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

应用引理5.1.1，$f=v$，$d=\varepsilon_1$可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon_1^4}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{48\varepsilon_2^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}(MM')^2}{r^5}\|v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

其中 M' 和 r 依赖于 ε_1 和 L，但与 ε_2 无关。由 Gronwall 引理及(A3)可得，$\forall\ t\geqslant 0$

$$\|v(0)\|_{L^2(\alpha)}^2 \leqslant \|v(-t)\|_{L^2(\alpha)}^2 \exp\left(\frac{48\varepsilon_2^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} (MM')^2}{r^5} t - \frac{1}{\varepsilon_1^4} t\right) \leqslant$$

$$4\rho_0 \exp\left(\frac{48\varepsilon_2^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} (MM')^2}{r^5} t - \frac{1}{\varepsilon_1^4} t\right)$$

现 ε_2充分小，则$\|v(0)\|_{L^2(\alpha)} = 0$，推出 $v(\cdot, 0) = 0$

5.2 广义 Ginzburg-Landau 方程

考虑如下的广义 Ginzburg-Landau 方程的周期初值问题

$$\begin{aligned} \partial_t u + \nu u_x = \chi u + (\gamma_r + \mathrm{i}\gamma_i) u_{xx} - (\beta_r + \mathrm{i}\beta_i) |u|^2 u - \\ (\delta_r + \mathrm{i}\delta_i) |u|^4 u - (\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i) |u|^2 u_x - \\ (\mu_r + \mathrm{i}\mu_i) u^2 \overline{u_x}, x \in \mathbf{R}, \quad t > 0 \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

$$u(x,t) = u(x+1,t), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \geqslant 0 \tag{5.2.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R} \tag{5.2.3}$$

我们已经知道，当条件

$$\gamma_r, \delta_r > 0, \quad 4\delta_r \gamma_r > (\lambda_i - \mu_i)^2 \tag{5.2.4}$$

满足时，问题(5.2.1)～(5.2.3)存在唯一整体解 $u \in H^1_{\mathrm{per}}[0,1]$和有限维的整体吸引子。这里我们要证明的是，可找到有限点集 $E \subset [0,1]$，它完全决定了解的长时间行态，换言之，如果

$$\lim_{t \to \infty} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| = 0, \quad x \in E$$

则有

$$\lim_{t \to \infty} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| = 0, \quad x \in \mathbf{R}$$

其中 u_1和 u_2为问题(5.2.1)～(5.2.3)任意的两个解。

令

$$H = L^2_{\mathrm{per}}[0,1] = \{u \in L^2[0,1], \quad u(x+1) = u(x)\}$$

$$V_1 = H^1_{\mathrm{per}}[0,1] = \{u : u \in H, u_x \in H\}$$

$(\cdot,\cdot)$和$|\cdot|_0$表示在 H 中的内积和模。在 V_1空间的模为

$$|u|_1^2 = |u|_V^2 = |u|_0^2 + |u_x|_0^2$$

定理5.2.1 在条件(5.2.4)下，$u_0 \in V_1$，则存在一个正常数α_1，它依赖于方程(5.2.1)的系数，使得如 $x_1 < x_2, d_1 = x_2 - x_1 < \alpha_1$，$\gamma_r > 2d^2\beta_1$（$\beta_1$在证明中可见），且

$$\lim_{t\to\infty} |u_1(x_i,t) - u_2(x_i,t)| = 0, \quad i = 1,2 \qquad (5.2.5)$$

其中 u_1和 u_2为两个解，则有

$$\lim_{t\to\infty} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| = 0, \forall\ x \in \mathbf{R}$$

为证明定理5.2.1，我们需要如下引理：

引理5.2.1 设 $\Omega' = [x_1, x_2]$，$u \in C^1(\Omega', \mathbf{C})$，则对 $d = x_2 - x_2$

$$|u|_{0,\Omega'}^2 \leqslant 2|u(x_1)|^2 + 2d^2|u_x|_{0,\Omega'}^2$$

引理5.2.2 如果非负可微函数 f 满足

$$f'(t) + \alpha f(t) \leqslant g(t)$$

其中 $\alpha > 0$，$\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = 0$，则$\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$。

引理5.2.1和引理5.2.2的证明是显而易见的。

定理5.2.1的证明 令 $w = u_2 - u_1$，则 w 满足

$$\begin{aligned} & w_t + \nu w_x = \chi w + (\gamma_r + \mathrm{i}\gamma_i) w_{xx} - \\ & (\beta_r + \mathrm{i}\beta_i)(|u_2|^2 u_2 - |u_1|^2 u_1) - \\ & (\delta_r + \mathrm{i}\delta_i)(|u_2|^4 u_2 - |u_1|^4 u^1) - \\ & (\lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i)(|u_2|^2 u_{2x} - |u_1|^2 u_{1x}) - \\ & (\mu_r + \mathrm{i}\mu_i)(u_2^2 \overline{u_{2x}} - u_1^2 \overline{u_{1x}}) \end{aligned}$$

乘这个方程以$\overline{w}$，并在 $\Omega' = [x_1, x_2]$上积分，再取实部得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega'} |w|^2 \mathrm{d}x + \gamma_r \int_{\Omega'} |w_x|^2 \mathrm{d}x - \mathrm{Re}\ [(\gamma_r + \mathrm{i}\gamma_i) w_x \overline{w}]_{x_1}^{x_2} - \\ & \chi \int_{\Omega'} |w|^2 \mathrm{d}x + \frac{\nu}{2}(|w(x_2)|^2 - |w(x_1)|^2) = \\ & \mathrm{Re}\ (F(u_2) - F(u_1), w) \end{aligned} \qquad (5.2.6)$$

其中

$$F(u)=-(\beta_r+\mathrm{i}\beta_i)|u|^2u-(\delta_r+\mathrm{i}\delta_i)|u|^4u-$$
$$(\lambda_r+\mathrm{i}\lambda_i)|u|^2u_x-(\mu_r-\mathrm{i}\mu_i)u^2\overline{u_x}$$

令

$$g_1(t)=\mathrm{Re}\,[(\gamma_r+\mathrm{i}\gamma_i)w_x w]_{x_1}^{x_2}-\frac{\nu}{2}(|w(x_2)|^2-|w(x_1)|^2)$$

由(5.2.5)，$t\to\infty$时，$g_1(t)\to 0$。由文献[22]中的结果可知，存在常数 T，当 $t\geqslant T$ 时，有

$$|u_i|_\infty\leqslant\rho_1,|u_{ix}|_\infty\leqslant\rho_3,i=1,2$$

其中 ρ_1,ρ_3仅依赖于方程(5.2.1)的系数，因此当 $t\geqslant T$ 时

$$(F(u_2)-F(u_1),w)\leqslant$$
$$|\beta_r|\cdot\rho_1^2|w|_{0,\Omega}^2+2\sqrt{\beta_r^2+\beta_i^2}\rho_1^2|w|_{0,\Omega}^2+$$
$$2\rho_1\rho_3|w|_{0,\Omega}^2+4\sqrt{\delta_r^2+\delta_i^2}\rho_1^4|w|_{0,\Omega}^2+$$
$$(\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}+\sqrt{\mu_r^2+\mu_i^2})\rho_1^2\int_\Omega|w_x||w|\mathrm{d}x,$$
$$(\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}+\sqrt{\mu_r^2+\mu_i^2})\rho_1^2\int_\Omega|w_x||w|\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{\gamma_r}{2}|w|_{0,\Omega}^2+\frac{p^2}{2\gamma_r}|w|_{0,\Omega}^2$$

其中 $p=(\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}+\sqrt{\mu_r^2+\mu_i^2})\rho_1^2$。于是式(5.2.6)变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w|_{0,\Omega}^2+\gamma_r|w_x|_{0,\Omega}^2\leqslant$$
$$2(|\chi|+|\beta_r|\rho_1^2+2\sqrt{\beta_r^2+\beta_i^2}\rho_1^2+$$
$$4\sqrt{\delta_r^2+\delta_i^2}\rho_1^4+\frac{p^2}{\gamma_r}2\rho_1\rho_3)|w|_{0,\Omega}^2+g_1(t)$$

(5.2.7)

由引理5.2.1，得

$$\gamma_r |w_x|_{0,\Omega}^2 \geqslant \frac{\gamma_r}{2d^2}|w|_{0,\Omega}^2 - \frac{\gamma_r}{2d}|w(x_1)|^2$$

因此，由式(5.2.7)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w|_{0,\Omega}^2 + (\frac{\gamma_r}{2d^2} - \beta_1)|w|_{0,\Omega}^2 \leqslant g_1(t) + \frac{\gamma_r}{2d}|w(x_1)|^2$$

其中

$$\beta_1 = 2(|\chi| + |\beta_r|\rho_1^2 + 2\sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2}\rho_1^2 +$$
$$4\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2}\rho_1^4 + \frac{p^2}{\gamma_r}2\rho_1\rho_3)$$

由引理5.2.2得

$$\lim_{t\to\infty}|w|_{0,\Omega}^2 = 0$$

为了证明解 u_1和 u_2依点态逼近，需证

$$\lim_{t\to\infty}|w|_{L^\infty} = 0 \tag{5.2.8}$$

为此，选取任意序列 $T<t_1<t_2<\cdots, i\to\infty, t_i\to\infty$。由于整体吸引子 $\mathscr{A}$ 的紧性，则存在$\tilde{u}_1=\tilde{u}_1(x,t)\in\mathscr{A}, \tilde{u}_2=\tilde{u}_2(x,t)\in\mathscr{A}$，和子序列$\{t_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}|u_1(t_{nk}) - \tilde{u}_1|_{L^\infty(\Omega)} = 0$$

$$\lim_{k\to\infty}|u_2(t_{nk}) - \tilde{u}_2|_{L^\infty(\Omega)} = 0$$

因此，对于$\tilde{w}=\tilde{u}_2-\tilde{u}_1$，有

$$\lim_{k\to\infty}|w(t_{nk}) - \tilde{w}|_{L^\infty(\Omega)} = 0 \tag{5.2.9}$$

由式(5.2.8)知，$\tilde{w}(x)=0, x\in\Omega'$。因$\tilde{w}=0$是连续的，因而$\tilde{w}(x)=0, x\in\Omega'$。实际上依 Gevrey 类，$\tilde{w}=0$，因此它为 x 的实解析函数，从实解析函数的连续性，推出$\tilde{w}(x)=0, x\in\mathbf{R}$。从式(5.2.9)有

$$\lim_{k\to\infty}|w(t_{nk})|_{L^\infty} = 0$$

因$\{t_{nk}\}$是任意的，可得

$$\lim_{k\to\infty}|w(t)|_{L^\infty}=0$$

以下考察定常解的决定模数。式(5.2.1)、(5.2.2)的定态解集($u_t=0$)以 $S(\text{Coeff})$表示。

定理5.2.2 在条件(5.2.4)下,存在正常数 α_2,它依赖于方程(5.2.1)的系数,具有以下性质:设 $x_1<x_2$,其中 $d=x_2-x_1<\alpha_2$。设 $u_1,u_2\in S(\text{Coeff})$,记 $w=u_1-u_2$,如果每个函数 Re w 和 Im w 在 $\Omega'=[x_1,x_2]$上至少有2个零点,则 $w=0$,即 $u_1=u_2$

证明之前,我们需要如下引理

引理5.2.3 Poincare 型不等式:设 $\Omega'=[x_1,x_2]$,$d=x_2-x_1$。

(i)设 $w\in C^1(\Omega',\mathbf{C})$,$y_1,y_2\in\Omega'$,则

$$|w|_{\infty,\Omega'}\leqslant|\text{Re }w(y_1)+\text{iIm }w(y_2)|+d|w_x|_{\infty,\Omega'}$$

(ii)设 $w\in C^2(\Omega',C)$,且函数 Re w,Im w 在 Ω'上至少有2个零点,则有

$$|w_x|_{\infty,\Omega'}\leqslant d|w_{xx}|_{L^\infty(\Omega')}$$

$$|w|_{L^\infty(\Omega')}\leqslant d^2|w_{xx}|_{L^\infty(\Omega')}$$

引理5.2.4 如条件(5.2.4)满足,且 $u\in S(\text{Coeff})$,则有

$$|u|_{L^\infty}\leqslant\overline{\rho_1},\ |u_x|_{L^\infty}\leqslant\overline{\rho_3}$$

其中$\overline{\rho_1}^2=(1+\sqrt{a}\,\alpha^{-\frac{1}{2}})a$,$\overline{\rho_3}=\alpha^{-\frac{1}{2}}aK_1^{\frac{1}{2}}(1+\frac{a^2}{\alpha})$,常数 α,a 定义在以下证明中。

证明 作式(5.2.1)和 u 的内积,得

$$\nu\text{Re}\int_0^1u_x\bar{u}\text{d}x+\beta_r\int_0^1|u|^4\text{d}x+\delta_r\int_0^1|u|^6\text{d}x-$$

$$\chi|u|_0^2+\gamma_r|u_x|_0^2-(\lambda_r+\mu_r)\text{Re}\int_0^1|u|^2u_x\bar{u}\text{d}x-$$

$$(\lambda_i-\mu_i)\text{Im}\int_0^1|u|^2u_x\bar{u}\text{d}x=0$$

因

$$\mathrm{Re}\int_0^1 u_x\bar{u}\mathrm{d}x = 0, \mathrm{Re}\int_0^1 |u|^2 u_x\bar{u}\mathrm{d}x = 0,$$

$$(\lambda_r - \mu_i)\mathrm{Im}\int_0^1 |u|^2 u_x\bar{u}\mathrm{d}x \leqslant |\lambda_i - \mu_i|\int_0^1 |u|^3|u_x|\mathrm{d}x \leqslant$$

$$a_1 b_1 |u_x|_0 (\int_0^1 |u|^6 \mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{a_1^2}{2}\int_0^1 |u|^6\mathrm{d}x + \frac{b_1^2}{2}\|u_x\|_0^2$$

其中 $a_1 b_1 = |\lambda_i - \mu_i|$。由条件(5.2.4)可知，能选取常数 a_1, b_1，使得

$$\alpha = 2\gamma_r - b_1^2 > 0, \beta = 2\delta_r - a_1^2 > 0$$

则

$$\alpha|u_x|_0^2 + \beta\int_0^1 |u|^6\mathrm{d}x + 2\beta_r\int_0^1 |u|^4\mathrm{d}x - 2\chi|u|_0^2 \leqslant 0$$

设 $\chi > 0$、否则，丢弃这一项，有

$$\alpha|u_x|_0^2 \leqslant -\beta\int_0^1 (|u|^3 + \frac{\beta_r - 1}{\beta}|u|)^2\mathrm{d}x -$$

$$2\int_0^1 |u|^4\mathrm{d}x + 2\chi|u|_0^2 + \frac{(\beta_r - 1)^2}{\beta}|u|_0^2$$

即

$$2(|u|_0^2)^2 \leqslant 2\int_0^1 |u|^4\mathrm{d}x \leqslant (2\chi + \frac{(\beta_r - 1)^2}{\beta})|u|_0^2 - \alpha|u_x|_0^2$$

因此

$$|u|_0 \leqslant \sqrt{a}, \quad a = \frac{1}{2}(2\chi + \frac{(\beta_r - 1)^2}{\beta}),$$

$$\int_0^1 |u|^4\mathrm{d}x \leqslant a^2, |u_x|_0^2 \leqslant \frac{a^2}{\alpha}, \quad |u|_{L^\infty} \leqslant \overline{\rho_1}$$

作式(5.2.1)和 u_{xx} 的内积，再取实部，注意到 $u_t = 0$，有

$$|u_{xx}|_0^2 \leqslant K_1(1 + |u_x|_0^2)^2$$

因此

$$|u_{xx}|_0^2 \leqslant K_1\left(1 + \frac{a^2}{\alpha}\right)^2, |u_x|_{L^\infty} \leqslant \overline{\rho_3}$$

定理5.2.2的证明 因

$$|w_{xx}|_{\infty,\Omega} \leqslant$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma_r^2+\gamma_i^2}}\Big(|\mu||w_x|_{\infty,\Omega'}+\chi|w|_{\infty,\Omega'}+2\sqrt{\beta_r^2+\beta_i^2}\,\overline{\rho_1}^2|w|_{\infty,\Omega'}+$$

$$4\sqrt{\delta_r^2+\delta_i^2}\,\overline{\rho_1}^4|w|_{\infty,\Omega'}(\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}+\sqrt{\mu_r^2+\mu_i^2})\times$$

$$(\overline{\rho_1}^2|w_x|_{\infty,\Omega'}+2\,\overline{\rho_1}\,\overline{\rho_3}|w|_{\infty,\Omega'})\Big)$$

由引理5.2.3得

$$|w_{xx}|_{\infty,\Omega'}\leqslant$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma_r^2+\gamma_i^2}}\Big(|\nu|d+\chi d^2+2\sqrt{\beta_r^2+\beta_i^2}\,\overline{\rho_1}^2d^2+$$

$$4\sqrt{\delta_r^2+\delta_i^2}\,\overline{\rho_1}^4d^2+(\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}+$$

$$\sqrt{\mu_r^2+\mu_i^2})(\overline{\rho_1}^2d+2\,\overline{\rho_1}\,\overline{\rho_3}d^2)|w_{xx}|_{\infty,\Omega'}\Big)$$

由此可知，存在常数 a_2 依赖于方程(5.2.1)的系数，使得当 $d<a_2$ 时，有 $|w_{xx}|_{\infty,\Omega'}=0$，因而 $w_{xx}=0, x\in\Omega'$。因 Re w_{xx}，Im w_{xx} 为实解析函数，有 $w_{xx}(x)=0, x\in\mathbf{R}$。由于函数 Re w_x，Im w_x，Re w，Im w 有零点，推出 $w=0$。这就证明了定理5.2.2。

由定理5.2.2，对任何 $u\in S(\text{Coeff})$，具有如下性质：

定理5.2.3 设 $u\in S(\text{Coeff})$，$p\in\mathbf{C}$，设存在一个区间 $I=[x_1,x_2]$ 的长度不大于 a_2，使得函数 Re $(u(x)-p)$，Im $(u(x)-p)$ 在 I 上至少具有三个零点，则 u 是一个常数。若 $\beta_i\neq0,\delta_i\neq0$，则 $u=0$。

证明 见5.3节中定理的证明。

设 $\{u\}=\{u(x):x\in[0,1]\}\subset\mathbf{C}$，则对任何 $p\notin\{u\}$，则能定义一个环绕 p 的一个闭的可微路径 $u:[0,1]\to\mathbf{C}$ 的指标(整数)为环绕数

$$\text{Ind}_p(u)=\frac{1}{2\pi\text{i}}\int_0^1\frac{u'(t)}{u(t)-p}\text{d}t$$

推论5.1.1 设 $u\in S(\text{Coeff})$，$p\in\mathbf{C}$，则有

(i)如 $p\notin\{u\}$，则 $|\mathrm{Ind}_p(u)|\leqslant 2[\frac{1}{\alpha_2}]+2$。

(ii)如 $p\in\{u\}$，且 u 不是一个常数函数，则函数 $u-p$ 在 $[0,1]$ 上至少有 $2[\frac{1}{\alpha_2}]+2$ 个零点。

下面考虑定常解集 $S(\mathrm{Coeff})$ 分形维数的估计。我们知道对于任何 $u\in S(\mathrm{Coeff})$，它完全为任何两个邻近的点的值所决定，这表明 $S(\mathrm{Coeff})$ 能为四个参数所决定，我们证明 $S(\mathrm{Coeff})$ 的分形维数不超过4。

引理5.2.5 设 (E,d) 为一度量空间，$Y\subset E$，设对某个 $k\in\mathbf{N}$，存在一个有界的映照 $\phi:Y\to\mathbf{R}^k$，使得

$$|\phi(y_1)-\phi(y_2)|\geqslant Cd(y_1,y_2),y_1,y_2\in Y \quad (5.2.10)$$

其中 C 为某常数，则 $d_F(Y)\leqslant k$，$d_F(Y)$ 表示 Y 的分形维数。

证明 见文献[80]。

我们应用这个引理，其中 $E=[0,1]$，$Y=S(\mathrm{Coeff})$，$k=4$。考虑 $\phi:S(\mathrm{coeff})\to\mathbf{C}^2$，定义为

$$\phi(u)=(u(0),u(\alpha_2)) \quad (5.2.11)$$

其中 α_2 为定理5.2.2所确定。显然这个映照是有界的，因此，只要验证式(5.2.10)成立。对任何 $\varepsilon>0$，取 $u_1,u_2\in S(\mathrm{Coeff})$，设 $w=u_1-u_2$ 满足

$$|w(0)|<\varepsilon,|w(\frac{\alpha^2}{2})|<\varepsilon \quad (5.2.12)$$

我们要求寻找一个常数 $D=D(\mathrm{Coeff})$，使得式(5.2.10)推出

$$|w|_\infty\leqslant D\varepsilon \quad (5.2.13)$$

为此，分二步证明。

第一步： 估计 $w_x(0)$：注意到如 $\Omega'\subset\mathbf{R}$ 为具长度不超过 $\alpha=\alpha_2$ 的任意区间，则由 Lagrange 定理，存在 $y_1,y_2\in\Omega'$，使得

$$|\mathrm{Re}\ w_x(y_1)|<\frac{2\varepsilon}{d},|\mathrm{Im}\ w_x(y_2)|<\frac{2\varepsilon}{d} \quad (5.2.14)$$

由定理5.2.2，引理5.2.3和式(5.2.14)，有

$$|w_{xx}|_{\infty,\Omega'} \leqslant \frac{4\varepsilon}{d} + \frac{1}{4d^2}|w|_{\infty,\Omega'} \qquad (5.2.15)$$

令 $\Omega' = [0,d]$，由引理5.2.3(i)和式(5.2.15)有

$$|w|_{\infty,\Omega'} \leqslant |w(0)| + d|w_x|_{\infty,\Omega'} \leqslant$$
$$|w(0)| + d(|\mathrm{Re}\ w_x(y_1)| + |\mathrm{Im}\ w_x(y_2)|) +$$
$$d^2|w_{xx}|_{\infty,\Omega'} \leqslant \varepsilon + 4\varepsilon + 4d\varepsilon + \frac{1}{4}|w|_{\infty,\Omega'}$$

因此

$$|w|_{\infty,\Omega'} \leqslant 16\varepsilon,\ |w_{xx}|_{\infty,\Omega'} \leqslant \frac{4\varepsilon}{d} + \frac{4\varepsilon}{d^2}$$

$$|w_x|_{\infty,\Omega'} \leqslant \frac{4\varepsilon}{d} + 4\varepsilon + \frac{4\varepsilon}{d} = 4\varepsilon + \frac{8\varepsilon}{d}$$

因此

$$|w(0)| < \varepsilon,\ |w(\frac{\alpha_2}{2})| < \varepsilon,\ |w_x(0)| < 4\varepsilon + \frac{8\varepsilon}{d}$$

第二步： 设 $|w(x_0)|<\varepsilon_1,\ |w_x(x_0)|<\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_1}{d},\ x_0\in\mathbf{R}^1,\ \varepsilon_1>0$。则

$$|w(x)| < 8\varepsilon_1,\ |w_x(x)| < 3(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1}{d})$$
$$x \in [x_0, x_0 + d] = \Omega'$$

这由引理5.2.3即可推得。由第一步和第二步表明从式(5.2.12)推出

$$|w|_\infty \leqslant D\varepsilon$$

这就证明了式(5.2.13)。

定理5.2.4 $d_F(S(\mathrm{Coeff}))\leqslant 4$。

附注：$d_F(S(\mathrm{Coeff}))\leqslant 4$是不可改进的。

设 S_M 为如下问题的复值解集合

$$\begin{cases} u_{xx} + 4\pi^2 u = 0, \\ u(x+1) = u(x) \end{cases} \quad x\in\mathbf{R}^1,\ |u|_{L^\infty}\leqslant M \qquad (5.2.16)$$

很显然，$u=a\cos\pi x+b\sin\pi x\ (a,b\in\mathbf{C})$是(5.2.16)的解，$d_F(S_M)=4$即上界4是不可改进的。

5.3 环绕数的上界估计

考虑如下的 Ginzburg-Landau 方程的周期初值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-(1+\mathrm{i}\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+\mathrm{i}\mu)|u|^2u-au=0 \tag{5.3.1}$$

$$u(x+1,t)=u(x,t),x\in\mathbf{R},t\geqslant 0 \tag{5.3.2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),x\in\mathbf{R} \tag{5.3.3}$$

其中 $a>0$、ν,μ 均为给定实数。$u_0(x)\in H=\{u(x)\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}),u(x+1)=u(x)\}$。

定义5.3.1 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ 为可微周期函数，具有周期1，以 $\{f\}$ 表之，$\{f\}=\{f(x):x\in[0,1]\subseteq\mathbf{C}\}$。则 f 环绕点 $p\notin f$ 的环绕数为

$$\mathrm{ind}_p(f)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)-p}\mathrm{d}x$$

这里要给出整体吸引子的一切元素（不同于定常解）环绕数 $\mathrm{ind}_p(u)$ 的上界的估计。同时还给出解对于空间变元解析半径的估计以及高阶导数强挤压性质的证明。

设 H 上内积为

$$(u,v)=\mathrm{Re}\int_\Omega uv^*\mathrm{d}x$$

其中 v^* 代表 v 的复数共轭。$|u|=(u,u)^{\frac{1}{2}}$。由傅氏变换

$$u=\sum_{j=-\infty}^{\infty}u_j\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}jx},u_j\in\mathbf{C}$$

它满足

$$|u|^2=\sum_{j=-\infty}^{\infty}|u_j|^2<\infty$$

设 A 为闭的无界正定算子，定义为（包括它的正次幂）

$$A^su=\sum_{j=-\infty}^{\infty}|2\pi j|^{2s}u_j\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}jx}$$

算子的定义域为

$$D(A^s) = \{u = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j e^{2\pi i j x}: \sum_{j=-\infty}^{\infty} |2\pi j|^{2s}|u_j|^2 < \infty\}$$

注意到

$$|A^{\frac{m}{2}}u| = |u^{(m)}| = |\frac{\partial^m u}{\partial x^m}|, u \in D(A^{\frac{m}{2}}), m \in \mathbf{N}$$

如用 $B(u,v,w) = uvw^*$，$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$，则方程(5.3.1)具有形式

$$u_t + (1 + i\nu)Au + (1 + i\mu)B(u,u,u) - au = 0 \tag{5.3.4}$$

为了建立非线性项 B 的估计，利用如下的 Agmon 不等式：

$$|u|_\infty^2 = (\sup_{x\in\Omega}|u(x)|)^2 \leqslant |u||u_x| + |u|^2 \tag{5.3.5}$$

于此 $u \in C^1(\Omega,\mathbf{C})$，具有 1 周期，当$\int_\Omega u dx = 0$ 时，有

$$|u|_\infty^2 \leqslant |u||u_x| \tag{5.3.6}$$

因此

$$\begin{aligned}|(B(u_1,u_2,v),v)| &\leqslant |u_1||u_2||v|_\infty^2 \leqslant \\ &|u_1||u_2|(|v||v_x| + |v|^2)\end{aligned} \tag{5.3.7}$$

类似地

$$\begin{aligned}|(B(v,u_1,u_2),v)| &\leqslant |u_1||u_2||v|_\infty^2 \leqslant \\ &|u_1||u_2|(|v||v_x| + |v|^2)\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

对于周期初值问题(5.3.1)～(5.3.3)的解 $u(t) = S(t)u_0$，$t \geqslant 0$。则 S 具有如下性质：

(i) $S(t)H \subseteq H, \forall\ t \geqslant 0, \lim_{t\to 0^+} S(t)u_0 = S(0)u_0 = u_0, u_0 \in H$；

(ii) $S(t)S(s)u_0 = S(t+s)u_0, s,t \geqslant 0, u_0 \in H$；

(iii) 存在常数 $\rho_0 = \rho_0(a,\nu,\mu), t_0 = t_0(a,\nu,\mu)$ 使得

$$\{S(t)H\} \subseteq B = \{u \in H: |u| \leqslant \rho_0\}, t \geqslant t_0$$

$$S(t)B \subseteq B, \forall\ t \geqslant 0，可取\ \rho_0 = 2\sqrt{a}$$

定义5.3.2　整体吸引子

$$\mathscr{A} = \bigcap_{t>0} S(t)B$$

吸引子具有性质：

(1) $\mathscr{A}\neq\phi$；

(2) $S(t)\mathscr{A}=\mathscr{A},\forall\ t\geqslant 0$；

(3) $|u_t|\leqslant\rho_0, u_0\in\mathscr{A}$；

(4) $\lim\limits_{t\to\infty}\sup\limits_{u_0\in H}\text{dist}\ (S(t)u_0,\mathscr{A})=0$。

对 $\tau>0$，考虑算子

$$e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}u=\sum_{j=-\infty}^{\infty}u_j e^{\tau|2\pi j|}e^{2\pi ijx},\forall\ u=\sum_{j=-\infty}^{\infty}u_j e^{2\pi ijx} \tag{5.3.9}$$

使得

$$|u|_\tau^2=|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}u|^2=\sum_{j=-\infty}^{\infty}e^{2\tau|2\pi j|}|u_j|^2<\infty \tag{5.3.10}$$

$e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}$ 的定义域 $D(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}})$ 称为具参数 τ 的 Gevrey 函数类。它是一个在 $\mathbf{R}$ 上的 Hilbert 空间，具有内积

$$(u,v)_\tau=(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}u,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}v),u,v\in D(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}})$$

$|u|_\tau=(u,u)_\tau^{\frac{1}{2}}$。问题(5.3.1)～(5.3.3)的解是 Gevrey 正则类的。

设 $u_k\in D(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}),k=1,2,3,4$。$\tau>0$

$$u_k=\sum_{j=-\infty}^{\infty}u_k e^{2\pi ijx}$$

$$\tilde{u}_k=\sum_{j=-\infty}^{\infty}|u_{k,j}|e^{\tau|2\pi j|}e^{2\pi ijx}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\tilde{u}_{k,j}e^{2\pi ijx},\tau>0$$

引理5.3.1 $|(B(u_1,u_2,u_3),u_4)_\tau|\leqslant(B(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{u}_3),\tilde{u}_4)$。

证明

$$|(B(u_1,u_2,u_3),u_4)_\tau|=$$

$$|\text{Re}\sum_{j,m,k=-\infty}^{\infty}u_{1,j}u_{2,k}u_{3,j+k-m}^{*}u_{4,m}^{*}e^{2\tau|2\pi m|}|\leqslant$$

$$\sum_{j,m,k=-\infty}^{\infty}|u_{1,j}||u_{2,k}||u_{3,j+k-m}^{*}||u_{4,m}^{*}|e^{2\tau|2\pi m|}\leqslant$$

$$\sum_{j,m,k=-\infty}^{\infty} \widetilde{u}_{1,j}\widetilde{u}_{2,k}\widetilde{u}_{3,j-k-m}\widetilde{u}_{4,m} \times$$

$$\exp\,(2\pi\tau(|m| - |j+k-m| - |j| - |k|)) \leqslant$$

$$\sum_{j,m,k=-\infty}^{\infty} \widetilde{u}_{1,j}\widetilde{u}_{2,k}\widetilde{u}_{3,j+k-m}\widetilde{u}_{4,m} = (B(\widetilde{u}_1,\widetilde{u}_2,\widetilde{u}_3),\widetilde{u}_4)$$

由式(3.10)可知

$$|\widetilde{u}_i| = |u_i|_\tau, |\widetilde{u}_{i,x}| = |A^{\frac{1}{2}}u_i|_\tau, \tau \geqslant 0, i = 1,2,3,4$$

由此连同引理5.3.1以及式(5.3.7)、(5.3.8)推出

$$|(B(u_1,u_2,v),v)_\tau| \leqslant |u_1|_\tau |u_2|_\tau (|v|_\tau |A^{\frac{1}{2}}v|_\tau + |v|_\tau^2) \tag{5.3.11}$$

$$|(B(v,u_1,u_2),v)_\tau| \leqslant |u_1|_\tau |u_2|_\tau (|v|_\tau |A^{\frac{1}{2}}v|_\tau + |v|_\tau^2) \tag{5.3.12}$$

定理5.3.1　存在常数 $\rho_1 = \rho_1(a,\nu,\mu)$ 使得如下成立：如果 $|u_0| \leqslant \rho_0$，$u(t) = S(t)u_0$，则

$$|e^{(\frac{3}{8}\rho_1)tA^{\frac{1}{2}}}u(t)| \leqslant 2\rho_0, 0 \leqslant t \leqslant \frac{8\rho_1^2}{3} = t_1 \tag{5.3.13}$$

$$|e^{\rho_1 A^{\frac{1}{2}}}u(t)| \leqslant 2\rho_0, t \geqslant \frac{8\rho_1^2}{3} = t_1 \tag{5.3.14}$$

从以下证明中可知，可选取

$$\rho_1 = \frac{3}{8}(2a + 8\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2} + 16\rho_0^4(1+\mu^2))^{-\frac{1}{2}} \tag{5.3.15}$$

证明　令 $\phi(t) = (u,u)_{\alpha t}$，$\alpha > 0$ 为固定。则

$$\frac{1}{2}\phi'(t) = (e^{\alpha tA^{\frac{1}{2}}}u_t, e^{\alpha tA^{\frac{1}{2}}}u) + \alpha(A^{\frac{1}{2}}e^{\alpha tA^{\frac{1}{2}}}u, e^{\alpha tA^{\frac{1}{2}}}u) =$$

$$-(Au,u)_{\alpha t} - ((1+i\mu)B(u,u,u),u)_{\alpha t} +$$

$$\alpha|u|_{\alpha t}^2 + \alpha|A^{\frac{1}{4}}u|_{\alpha t}^2$$

因 $(i\nu Au,u)_{\alpha t} = 0$，由式(5.3.11)及插值不等式得

$$\frac{1}{2}\phi'(t) + |A^{\frac{1}{2}}u|_{\alpha}^{2} \leqslant$$

$$\sqrt{1+\mu^2}(|u|_{\alpha}^{4} + |u|_{\alpha}^{3}|A^{\frac{1}{2}}u|_{\alpha}) + \alpha|u|_{\alpha}^{2} + \alpha|u|_{\alpha}|A^{\frac{1}{2}}u|_{\alpha} \leqslant$$

$$\sqrt{1+\mu^2}|u|_{\alpha}^{4} + \frac{1}{2}(1+\mu^2)|u|_{\alpha}^{6} + \frac{1}{2}|A^{\frac{1}{2}}u|_{\alpha}^{2} +$$

$$\alpha|u|_{\alpha}^{2} + \frac{1}{2}\alpha^2|u|_{\alpha}^{2} + \frac{1}{2}|A^{\frac{1}{2}}u|_{\alpha}^{2}$$

因此

$$\phi'(t) \leqslant (2a+\alpha^2)\phi(t) + 2\sqrt{1+\mu^2}\phi(t)^2 + (1+\mu^2)\phi(t)^3$$

注意到假设 $\phi(0)\leqslant\rho_0^2$，只要 $\phi(t)\leqslant 4\rho_0^2$，则有

$$\phi'(t) \leqslant 4\rho_0^2(2a+\alpha^2+8\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2}+16\rho_0^4(1+\mu^2)) =$$

$$8\alpha^2\rho_0^2$$

其中

$$\alpha = \left(2a + 8\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2} + 16\rho_0^4(1+\mu^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

这就表明

$$\phi(t) \leqslant \phi(0) + 8\alpha^2\rho_0^2 t, \quad t \leqslant \frac{3}{8\alpha^2} = t_1$$

因 $\rho_1 = \frac{3}{8\alpha_1}$，因此式(5.3.13)成立，不等式(5.3.14)作为式(5.3.13)和 $S(t)$ 的性质的推论得到。

推论5.3.1 空间解析性：对任意 $u_0\in H$ 使得 $|u_0|\leqslant\rho_0$ 和固定 $t\geqslant t_1$，函数 Re $S(t)u_0$ 和 Im $S(t)u_0$ 为空间变元的实解析函数，具有解析半径大于等于 ρ_1，即有如下估计：$\forall\ t\geqslant t_1$

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\mathrm{Re}\ S(t)u_0\right| \leqslant n!2\rho_0\rho_1^{-n}, n=0,1,2,\cdots$$

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\mathrm{Im}\ S(t)u_0\right| \leqslant n!2\rho_0\rho_1^{-n}, n=0,1,2,\cdots$$

证明 以上两个估计来自式(5.3.14)和式(5.3.3)。为得到实解析性，固定任意 $\epsilon\in(0,1)$，取 $n\geqslant 1$，由式(5.3.6)得

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\mathrm{Re}\ S(t)u_0\right|_{\infty} \leqslant \left|\frac{d^n}{dx^n}\mathrm{Re}\ S(t)u_0\right|^{\frac{1}{2}}\left|\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\mathrm{Re}\ S(t)u_0\right|^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$(n+1)!2\rho_0\rho_1^{\frac{1}{2}}\rho_1^{-1} \leqslant n!2\varepsilon^{-1}\rho_0\rho_1^{-\frac{1}{2}}(\frac{1+\varepsilon}{\rho_1})^n$$

对 $n=0$，由式(5.3.5)

$$|\mathrm{Re}\ S(t)u_0|_\infty \leqslant (2\rho_0)^2(1+\frac{1}{\rho_1})$$

由此，易知 $\mathrm{Re}\ S(t)u_0$ 是实解析的。相同的证明对于 $\mathrm{Im}\ S(t)u_0$ 成立。

对于 GIE 的解的强挤压性的已知结果有

定理5.3.2[162]　存在常数 $\rho_2=\rho_2(a,\nu,\mu)$ 和 $\rho_3=\rho_3(a,\nu,\mu)$ 有如下性质：如果 u_1,u_2 为 GLE 的两个解，$|u_1(0)|\leqslant\rho_0$，$|u_2(0)|\leqslant\rho_0$，$v=u_1-u_2$，则至少下述断言之一成立：

(1) $|v(t)|\leqslant|v(0)|e^{-\rho_2 t}$，$t\geqslant0$。

(2) 存在 $t'>0$，使得

$$|A^{\frac{1}{2}}v(t)|^2 \leqslant \rho_3|v(t)|^2, t\geqslant t' \tag{5.3.16}$$

进一步，如(5.3.16)对 $t=t''$ 成立，则它对一切 $t\geqslant t''$ 成立。

推论5.3.2　如 $u_1,u_2\in\mathscr{A}$，$v=u_1-u_2$，则 $|A^{\frac{1}{2}}v|^2\leqslant\rho_2|v|^2$。

现给出高阶导数的强挤压性。

定理5.3.3　存在常数 $\rho_4=\rho_4(a,\nu,\mu)$ 和 $t_2=t_2(a,\nu,\mu)$，使得如下成立：如 u_1,u_2 为 GL 方程的解满足

$$|e^{\rho_1 A^{\frac{1}{2}}}u_i(t)| \leqslant 2\rho_0, t\geqslant 0, i=1,2 \tag{5.3.17}$$

和

$$|A^{\frac{1}{2}}v(t)|^2 \leqslant \rho_3|v(t)|^2, t\geqslant 0 \tag{5.3.18}$$

则有

$$|e^{\rho_1 A^{\frac{1}{2}}}v(t)| \leqslant 2|v(t)| \tag{5.3.19}$$

证明　容易看到

$$\begin{aligned} &v_t+(1+i\nu)Av+(1-i\mu)(B(u_1,u_2,v)+\\ &B(v,u_1+u_2,u_2))-av=0 \end{aligned} \tag{5.3.20}$$

令 $\phi(t)=(v,v)_{\alpha t}$，$\alpha>0$ 固定，则当 $\alpha t\leqslant\rho_1$ 时有

$$\frac{1}{2}\phi'(t) = (e^{\alpha t A^{\frac{1}{2}}}v_t, e^{\alpha t A^{\frac{1}{2}}}v) + \alpha(A^{\frac{1}{2}}e^{\alpha t A^{\frac{1}{2}}}v, e^{\alpha t A^{\frac{1}{2}}}v) =$$

$$-(Av,v)_{\alpha t} - ((1+i\mu)B(u_1,u_1,v),v)_{\alpha t} -$$

$$((1+i\mu)B(v,u_1+u_2,u_2),v)_{\alpha t} + a|v|_{\alpha t}^2 + \alpha|A^{\frac{1}{4}}v|_{\alpha t}^2$$

由估计式(5.3.11)、式(5.3.12)和式(5.3.17)得

$$\frac{1}{2}\phi'(t) + |A^{\frac{1}{2}}v|_{\alpha t}^2 \leqslant$$

$$\sqrt{1+\mu^2}|u_1|_{\alpha t}^2(|v|_{\alpha t}|A^{\frac{1}{2}}v|_{\alpha t} + |v|_{\alpha t}^2) +$$

$$\sqrt{1+\mu^2}|u_1+u_2|_{\alpha t}|u_2|_{\alpha t}(|v|_{\alpha t}|A^{\frac{1}{2}}v|_{\alpha t} + |v|_{\alpha t}^2) +$$

$$a|v|_{\alpha t}^2 - \alpha|v|_{\alpha t}|A^{\frac{1}{2}}v|_{\alpha t} \leqslant$$

$$|v|_{\alpha t}|A^{\frac{1}{2}}v|_{\alpha t}(12\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2} + \alpha) +$$

$$|v|_{\alpha t}^2(12\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2} + a) \leqslant$$

$$72\rho_0^4(1+\mu^2)|v|_{\alpha t}^2 + \frac{1}{2}|A^{\frac{1}{2}}v|_{\alpha t}^2 + \frac{1}{2}\alpha^2|v|_{\alpha t}^2 + \frac{1}{2}|A^{\frac{1}{2}}v|_{\alpha t}^2 +$$

$$|v|_{\alpha t}^2(12\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2} + a), \alpha t \leqslant \rho_1$$

因此

$$\phi'(t) \leqslant \phi(t)(14\rho_0^4(1+\mu^2) + \alpha^2 + 24\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2} + 2a) =$$

$$\phi(t)(\lambda_1 + \alpha^2), \quad \alpha t \leqslant \rho_1 \tag{5.3.21}$$

其中 λ_1适当地选取。另一方面，如作式(5.3.20)和 v 的内积，由式(5.3.18)推出

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v|^2 = -|A^{\frac{1}{2}}v|^2 - ((1+i\mu)B(u_1,u_1,v),v) -$$

$$((1+i\mu)B(u_1,u_1+u_2,v),v) + a|v|^2 \geqslant$$

$$-\rho_3|v|^2 - 12\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2}(|v||A^{\frac{1}{2}}v| + |v|^2) \geqslant$$

$$-|v|^2(\rho_3 + 12\rho_0^2\rho_3^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\mu^2} + 12\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2}) =$$

$$-\frac{\lambda_2}{2}|v|^2, \quad t \geqslant 0 \tag{5.3.22}$$

其中，适当地选取 λ_2。于是可得 $|v(t)|^2 \leqslant e^{-\lambda_2 t}|v(0)|^2$。连同(5.3.21)得

$$|e^{\alpha t A^{\frac{1}{2}}} v(t)|^2 \leqslant e^{(\lambda_1+\lambda_2-\alpha^2)t} |v(t)|^2, \alpha t \leqslant \rho_1$$

选取 $\alpha = \max(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}), t = t_2 = \min\{\frac{1}{4\lambda_1}, \frac{1}{4\lambda_2}, \frac{\rho_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{\rho_1}{\sqrt{\lambda_2}}\}$，且

$\rho_4 = \alpha t_2$，则有

$$|e^{\rho_4 A^{\frac{1}{2}}} v(t_2)| \leqslant e^{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}|v(t_2)|^2 \leqslant 4|v(t_2)|^2$$

于是，当 $t = t_2$ 得到式(5.3.19)。运用对时间的平移可得对一切 $t \geqslant t_2$，式(5.3.19)成立。

附注：如果忽略参数 μ, ν 的影响，则有

$$\rho_0 = O(a^{\frac{1}{2}}), \quad \rho_1^{-1} = O(a), \quad \rho_2^{-1} = O(a^{-2}),$$

$$\rho_3 = O(a^4), \quad \lambda_1 = O(a^2), \quad \lambda_2 = O(a^4),$$

$$\rho_4^{-1} = O(a^{-2}), \quad \text{当 } a \to \infty$$

推论5.3.3 设 $u_1, u_2 \in \mathscr{A}, v = u_1 - u_2$，则有

(i) $|v|_{\rho_4} \leqslant 2|v|$；

(ii) $|v^{(n)}| \leqslant 2n!\rho_4^{-n}|v|, n = 0,1,2,\cdots$；

(iii) $|v^{(n)}|_\infty \leqslant \frac{M}{2} n! (\frac{2}{\rho_4})^n |v|_\infty, n = 0,1,2\cdots$。

其中

$$M = \max\left\{4\rho_4^{-\frac{1}{2}}, 2(1+\frac{2}{\rho_4})^{\frac{1}{2}}\right\}$$

证明 由定义5.3.2吸引子的性质(2)，存在 $\tilde{u}_{u_1}, \tilde{u}_{u_2} \in \mathscr{A}$，使得 $S(t_1+t_2)\tilde{u}_{u_i} = u_i, i = 1,2$。由性质(3)和定理5.3.1，有

$$|e^{\rho_1 A^{\frac{1}{2}}} S(t)\tilde{u}_i| \leqslant 2\rho_0, t \geqslant t_1, i = 1,2$$

再由推论5.3.2，有

$$|A^{\frac{1}{2}}(S(t)\tilde{u}_{u_1} - S(t)\tilde{u}_{u_2})| \leqslant \rho_3 |S(t)\tilde{u}_{u_1} - S(t)\tilde{u}_{u_2}|, t \geqslant t_1$$

由定理5.3.3，即得(i)。由(ii)推得(ii)。(iii)对 $n \geqslant 1$。由式(5.3.6)和(ii)得

$$|v^{(n)}|_{\infty} \leqslant |v^{(n)}|^{\frac{1}{2}}|v^{(n+1)}|^{\frac{1}{2}} \leqslant 2(n+1)!\rho_4^{-\frac{1}{2}}\rho_4^{-n}|v| \leqslant$$

$$2n!\rho_4^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\rho_4}\right)^n|v|$$

对 $n=0$，用式(5.3.5)和(ii)得

$$|v|_{\infty} \leqslant |v|^{\frac{1}{2}}(|v|+|v_x|)^{\frac{1}{2}} \leqslant |v|\left(1+\frac{2}{\rho_4}\right)^{\frac{1}{2}}, |v| \leqslant |v|_{\infty}$$

由此即得(iii)。

利用推论5.3.3，可在含有实轴的小带上延拓为全纯函数，即有

推论5.3.4 设 $u_1, u_2 \in \mathscr{A}$，$v=u_1-u_2$。则函数 $\operatorname{Re} v$ 和 $\operatorname{Im} v$ 能分别延拓为函数 v_r 和 v_i，它们在

$$\pi_\delta = \{z \in \mathbf{C}, |\operatorname{Im} z| < \delta\}, \delta = \frac{\rho_4}{4}$$

中是全纯的，而且

$$|v_r(z)| \leqslant M|v|_{\infty} = M\sup_{x\in\Omega}|v(x)|, z \in \pi_\delta$$

$$|v_i(z)| \leqslant M|v|_{\infty} = M\sup_{x\in\Omega}|v(x)|, z \in \pi_\delta$$

证明 由推论5.3.1可知函数 $\operatorname{Re} v$ 和 $\operatorname{Im} v$ 为实解析函数，由推论5.3.3的(iii)可知它们在 $\pi_{2\delta}$ 中全纯。为证明最后的断言，取 $z \in \pi_\delta$。对 v_r 作 Taylor 展开：

$$|v_r(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\operatorname{Re} v^{(n)}(\operatorname{Re} z)(z-\operatorname{Re} z)^n\right| \leqslant$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}Mn!\frac{1}{(2\delta)^n}|v|_{\infty}\right)\delta^n = M|v|_{\infty}$$

对 v_i 也可同样证明得到。

现对旋转数的上界作估计。

命题5.3.1 设 v 为满足推论5.3.4断言的函数。设函数 $\operatorname{Re} v$ 和 $\operatorname{Im} v$ 在 Ω 中至少有 m 个零点(包括重数)，m 为非负整数。如果

$$m \geqslant \max\left\{0, \frac{\lg(M\sqrt{2})}{-\lg\left(\tanh\frac{\pi}{4\delta}\right)}+1\right\} = m_0$$

则 $v=0$。

为证明这个命题，我们需要如下的 Schwarz 引理。

引理5.3.2 设 f 为在 $\pi_\delta(\delta>0)$中的全纯函数，设

$$|f(z)| \leqslant M', z \in \pi_\delta$$

如果 $z_1,\cdots,z_m\in\pi_\delta$ 为 f 的零点(包括重数)。则有

$$|f(z)| \leqslant M\prod_{j=1}^{m}\left|\tanh\left(\frac{\pi(z-z_j)}{4\delta}\right)\right|, z\in\pi_\delta$$

命题5.3.1的证明 设 v_r 和 v_i 为 Re v 和 Im v 依推论5.3.4延拓的全纯函数。设 v_1为 v_r 或 v_i 之一。且 $x_1,\cdots,x_m$ 为 v_1的零点，$m\geqslant m_0$，则由 Schwarz 引理

$$|v_1|_\infty = \sup_{x\in\Omega}|v_1(x)| \leqslant M|v|_\infty\prod_{j=1}^{m}\sup_{x\in\Omega}\left|\tanh\left(\frac{\pi(x-x_j)}{4\delta}\right)\right| \leqslant$$

$$M\left(\tanh\left(\frac{\pi}{4\delta}\right)\right)^m|v|_\infty$$

因此

$$|v|_\infty = \sup_{x\in\Omega}\{|\mathrm{Re}\ v(x)|^2+|\mathrm{Im}\ v(x)|^2\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$M\sqrt{2}\left(\tanh\left(\frac{\pi}{4\delta}\right)\right)^m|v|_\infty$$

如果 $m\geqslant m_0$，则 $M\sqrt{2}\left(\tanh\left(\frac{\pi}{4\delta}\right)\right)^m<1$。因此，在 Ω 上，$v=0$。命题5.3.1得证。

最后，我们叙述和证明这一节的主要结果：

定理5.3.4 设 $u\in\mathscr{A}$，$p\in\mathbf{C}$。则有

(i)如果函数 Re $(u-p)$和 Im $(u-p)$中的任何一个至少在 Ω 内具有 m_0+1个不同的零点，则 $u(x)=p$，$x\in\Omega$。

(ii)如 $p\notin\{u\}$，则$|\mathrm{ind}_p(u)|\leqslant m_0+1$。

证明 显然，由(i)推出(ii)。现证(i)。设 $u\in\mathscr{A}$。且设函数 Re

$(u-p)$、$\mathrm{Im}\,(u-p)$的每一个至少具有m_0+1个零点。因$\mathrm{Re}\,(u-p)$和$\mathrm{Im}\,(u-p)$是实解析函数，我们能选取$0\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_{m_0+1}<1$和$0\leqslant y_1<y_2<\cdots<y_{m_0+1}\leqslant 1$使得$x_1,\cdots,x_{m_0+1}$为$\mathrm{Re}\,(u-p)$在$[x_1,x_{m_0+1}]$上的所有零点，$y_1,\cdots,y_{m_0+1}$为$\mathrm{Im}\,(u-p)$在$[y_1,y_{m_0+1}]$上的所有零点。选取

$$\varepsilon<\min\{\min_{1\leqslant j\leqslant m_0}(x_{j+1}-x_j),\min_{1\leqslant j\leqslant m_0}(y_{j+1}-y_j)\}\qquad(5.3.23)$$

令

$$u_1(x)=u(x),u_2(x)=u(x-\varepsilon),x\in\mathbf{R}$$

因GLE对于空间变元的平移是不变的，因此$u_1,u_2\in\mathscr{A}$。取$v=u_1-u_2$，令$i\in\{1,\cdots,m_0\}$，计算

$$\mathrm{Re}\,v(x_i+\varepsilon)=\mathrm{Re}\,u(x_i+\varepsilon)-\mathrm{Re}\,u(x_i)=$$

$$\mathrm{Re}\,u(x_i+\varepsilon)-\mathrm{Re}\,p$$

$$\mathrm{Re}\,v(x_{i+1})=\mathrm{Re}\,u(x_{i+1})-\mathrm{Re}\,u(x_{i+1}-\varepsilon)=$$

$$\mathrm{Re}\,p-\mathrm{Re}\,u(x_{i+1})$$

因$x_i+\varepsilon,x_i+1\in[x_i,x_{i+1}]$，$\mathrm{Re}\,v$至少在$(x_i,x_{i+1})$中消失一次。因此，它在$\Omega$中至少有$m_0$个零点。$\mathrm{Im}\,v$也然。由命题5.3.1，$v=0$，即$u(x)=u(x-\varepsilon)$，$\forall\ \varepsilon>0$满足式(5.3.23)。因此$u$为常数。定理5.3.4得证。

5.4 KS方程解的振荡性

考虑如下Kuramoto-Sivashinsky方程的周期初值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0\qquad(5.4.1)$$

$$u(x+L,t)=u(x,t),x\in\mathbf{R},t\geqslant 0\qquad(5.4.2)$$

$$u(x,0)=u_0(0),x\in\mathbf{R}\qquad(5.4.3)$$

$$\int_0^L u(x,t)\mathrm{d}x=0,t\geqslant 0\qquad(5.4.4)$$

其中 $L>0$。我们要证明对于问题(5.4.1)～(5.4.4)的解，要么趋于定态解，要么在某些时刻以后解的所有空间导数的零点数目保持有界，与解无关。记

$$H=\left\{u=\sum_{j=-\infty}^{\infty}u_j e^{iqjx},|u|^2=L\sum_{j=-\infty}^{\infty}|u_j|^2<\infty,\right.$$
$$\left.u_0=0,u_j=u^*{}_j,j\in\mathbf{Z}\right\}$$

其中 $q=\frac{2\pi}{L}$，“ $*$ ”表示复数共轭。如果 $u=\sum_{j=-\infty}^{\infty}u_j e^{iqjx}\in H$，$v=\sum_{j=-\infty}^{\infty}v_j e^{iqjx}\in H$，则

$$(u,v)=L\sum_{j=-\infty}^{\infty}u_j v_j$$

为了写 KS 方程为通常的泛函形式，引入算子 A 以及它的幂

$$A^s u=q^{4s}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|j|^{4s}u_j e^{iqjx},s\geqslant 0$$

其中

$$u\in D(A^s)=\left\{v=\sum_{j=-\infty}^{\infty}v_j e^{iqjx}\in H,\sum_{j=-\infty}^{\infty}|j|^{8s}|v_j|^2<\infty\right\}$$

注意到 $A^{\frac{1}{2}}u=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$u\in D(A^{\frac{1}{2}})$，$Au=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$，$u\in D(A)$，$u'=\frac{\partial u}{\partial t}$，$B(u,v)=u\frac{\partial v}{\partial x}$。于是 KSE 可写为

$$u'+Au-A^{\frac{1}{2}}u+B(u,u)=0 \qquad (5.4.1)'$$

如我们所知，式(5.4.1)′解的整体存在性，唯一性早已建立，因此，对于 $u_0\in H$，存在唯一解 $u(t)=S(t)u_0$，$u(0)=u_0$，且对 $t\geqslant 0$，映照 $S(t):H\to H$ 是连续的，而且 KSE 的耗散性也已经证明，即存在常数 $\rho_1=\rho_1(L)>0$，使得对任何 $u_0\in H$ 有

$$S(t)u_0\in B_{\rho_1}=\{v_0\in H:|v_0|\leqslant\rho_1\},t\geqslant t_1$$

其中 $t_1=t_1(L,|u_0|)\geqslant 0$，$S(t)B_r\subseteq B_{2r}$，$t\geqslant 0$，$r\geqslant\rho_1$，$\rho_1=C_1L^{\frac{8}{5}}$。也得到它的 Gevrey 正则性的某些结果。对任何 $\tau\geqslant 0$，引入算子

$$e^{\tau A^{\frac{1}{4}}}u=\sum_{j=-\infty}^{\infty}u_j e^{\tau q|j|}\cdot e^{iqjx},$$

$$u \in D(e^{\tau A^{\frac{1}{4}}}) = \{v = \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j e^{iqjx} \in H:$$

$$|e^{\tau A^{\frac{1}{4}}} v|^2 = L \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{2\tau q|j|} |v_j|^2 < \infty\}$$

可证明如下结果。

定理5.4.1[213] 存在正常数 $\rho_2=\rho_2(L)$和 $t_2=t_2(L)>0$,使得

$$|e^{t\rho_2 A^{\frac{1}{4}}} S(t)u_0| \leqslant 2|u_0|, t \in [0,t_2], u_0 \in B_{2\rho_1}$$

定理5.4.2 存在常数 $\rho_3=\rho_3(L)>0, t_2=t_2(L)>0, M_j=M_j(L)>0, j=1,2,\cdots$,具有如下性质:对任何 $u_0\in B_\rho$,存在 $t_3=t_3(L,u_0)\in[0,\infty]$,使得

(1) $|S(t)u_0|\leqslant|u_0|e^{-\rho_3 t}, 0\leqslant t\leqslant t_3$。

(2)对任何固定 $t\geqslant t_2+t_3, j\in \mathbf{N}_0=\{0,1,2,\cdots\}$, $\dfrac{d^j(S(t)u_0)}{dx^j}$在$[0,L]$上的零点数目$\leqslant M_j$。

我们将在最后证明这个定理,先证

推论5.4.1 如果 $u_0\in \mathscr{A}\backslash\{0\}$,其中吸引子 $\mathscr{A}=\bigcap_{t\geqslant 0} S(t)B_{\rho_1}$,则$\dfrac{d^j u_0}{dx^j}$在$[0,L]$上的零点数目$\leqslant M_j, j\in N_0$。

证明 设 $u_0\in \mathscr{A}$ 推论不真,则证明 $u_0=0$。对任何 $T>0$, $u_T\in B_{\rho_1}$,使得 $S(T)u_T=u_0$。由定理5.4.2,有 $T<t_2(L)+t_3(L,u_T)$。推之

$$|S(t)u_T| \leqslant |u_T|e^{-\rho_3 t}, t \leqslant T - t_2$$

令 $t=T-t_2$,可得

$$|u_{t_2}| \leqslant \rho_1 e^{-\rho_3(T-t_2)}$$

注意到 t_2仅依赖于 L,因此,令 $T\to+\infty$,得 $u_{t_2}=0$,即 $u_0=S(t_2)u_{t_2}=0$。

证明定理5.4.2之前,需要某些引理。

引理5.4.1[214] 存在正常数 $\rho_3=\rho_3(L)$和 $\rho_4=\rho_4(L)$,使得:对任何 $u_0\in B_{\rho_1}$,存在 $t_3=t_3(L,u_0)\in[0,\infty]$,使得

(1) $|A^{\frac{1}{2}}S(t)u_0|>\rho_4|S(t)u_0|$和$|S(t)u_0|\leqslant|u_0|e^{-\rho_3 t}$, $0<t<t_3$;

(2) $|A^{\frac{1}{2}}S(t)u_0|\leqslant\rho_4|S(t)u_0|$, $t\geqslant t_3$。

我们可得到比引理5.4.1(2)更强的结果。

引理5.4.2 存在正常数$\rho_5=\rho_5(L)$使得：如果$S(t)u_0\in B_{2\rho_1}$，$|A^{\frac{1}{2}}S(t)u_0|\leqslant\rho_4|S(t)u_0|$, $t\geqslant 0$，则有

$$|e^{\rho_5 A^{\frac{1}{4}}}S(t)u_0|\leqslant 2e^{\rho_4^2 t_2}|S(t)u_0|, t\geqslant t_2$$

由引理可推出

$$|A^{\frac{n}{4}}S(t)u_0|\leqslant\frac{2\rho_4^2 t_2}{\rho_5^n}|S(t)u_0|, t\geqslant t_2, n\in N_0 \quad (5.4.5)$$

这是因为

$$|e^{aA^{\frac{1}{4}}}v_0|\geqslant\frac{a^n}{n!}|A^{\frac{n}{4}}v_0|, \forall a\geqslant 0, n\in N_0, v_0\in D(A^{\frac{n}{4}})$$

证明 作式(5.4.1)和u的内积，得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2=-|A^{\frac{1}{2}}u|^2+|A^{\frac{1}{4}}u|^2>-|A^{\frac{1}{2}}u|^2\geqslant-\rho_4^2|u|^2$$

其中，用到了$(B(u,u),u)=0$。因此

$$|S(t)u_0|\leqslant|S(t+\tau)u_0|e^{\rho_4^2\tau}, t,\tau\geqslant 0$$

另一方面，定理5.4.1推出

$$|e^{\tau\rho_2 A^{\frac{1}{4}}}S(t+\tau)u_0|\leqslant 2|S(t)u_0|\leqslant 2|S(t+\tau)u_0|e^{\rho_4^2\tau},$$
$$t\geqslant 0, \tau\in[0,t_2]$$

令$\rho_5=t_2\rho_2$，可得

$$|e^{\rho_5 A^{\frac{1}{4}}}S(t)u_0|\leqslant 2e^{\rho_4^2 t_2}|S(t)u_0|, t\geqslant t_2$$

引理5.4.2得证。

作为引理5.4.2的推论有：

引理5.4.3 设$S(t)u_0\in B_{2\rho_1}$和$|A^{\frac{1}{2}}S(t)u_0|\leqslant\rho_4|S(t)u_0|$, $t\geqslant 0$。则对每一个固定的$t\geqslant t_2$，函数$u=S(t)u_0$(作x变元的函数)能拓展为函数$\tilde{u}$，它在

$$\pi_\delta = \{z \in \mathbf{C}: |\mathrm{Im}\, z| < \delta\}, \delta = \frac{\rho_5}{2}$$

中是全纯的。更进一步满足

$$\left|\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\tilde{u}(z)\right| \leqslant \rho_6^{(n)}|u|, z \in \pi_\delta, n \in \mathbf{N}_0$$

其中 $\rho_6^{(n)} = 2^{n+3}e^{\rho_4^2 t}(n+1)!\rho_5^{n-\frac{1}{2}}$。常数 t_2 和 ρ_5 分别为定理5.4.1和引理5.4.2中所引进的。

证明 引理5.4.2的假设是满足的，由 Agmon 不等式

$$\left|\frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}x^n}\right|_\infty \leqslant \left|A^{\frac{n}{4}}u\right|^{\frac{1}{2}}\left|A^{\frac{n+1}{4}}u\right|^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{2e^{\rho_4^2 t_2}(n+1)!}{\rho_5^{n-\frac{1}{2}}}|u|$$

由此即得引理的第一个结论。其次，用幂级数展开

$$\left|\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\tilde{u}(z)\right| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty}\frac{|z-\mathrm{Re}\, z|^j}{j!}\left|\frac{\mathrm{d}^{n+j}u}{\mathrm{d}x^{n+j}}\right|_\infty \leqslant$$

$$\frac{2e\rho_4^2 t_2}{\rho_5^{n+\frac{1}{2}}}|u|\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(n+j+1)!}{j!}2^{-j} =$$

$$\frac{2^{n+3}e^{\rho_4^2 t_2}(n+1)!}{\rho_5^{n+\frac{1}{2}}}|u|。\quad \forall z \in \pi_\delta,\quad n \in N_0$$

引理5.4.4 Schwarz 引理：设 f 为在 π_δ 上的全纯函数，$\delta > 0$。设

$$|f(z)| \leqslant M,\ z \in \pi_\delta, M > 0$$

如果 $z_1, z_2, \cdots, z_m \in \pi_\delta$ 为 f 的(包括重数)零点，则

$$|f(z)| \leqslant M\prod_{j=1}^{m}\left|\tanh\left(\pi\frac{z-z_j}{4\delta}\right)\right|, z \in \pi_\delta$$

定理5.4.1的证明 设 $u_0 \neq 0$，否则 $t_3 = \infty$。定理5.4.1的(1)来自引理5.4.1(1)。固定任意 $t \geqslant t_2 + t_3$，其中 t_2 为引理5.4.2所给定，t_3 为引理5.4.1所给定。令 $u = S(t)u_0$，固定 $j \in N_0$，设 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 为 $\frac{\mathrm{d}^j u}{\mathrm{d}x^j}$ 在$[0, L]$上的所有零点。引用 Schwarz 引理于 $\frac{\mathrm{d}^j\tilde{u}}{\mathrm{d}z^j}$($\tilde{u}$ 为引理5.4.3引进的)，以及引理5.4.1，引理5.4.3，有

$$\left|\frac{\mathrm{d}^j\widetilde{u}}{\mathrm{d}z^j}(x)\right| \leqslant \rho_6^{(j)}\left(\tanh\frac{\pi L}{2\rho_5}\right)^{N_j}|u|,\ x\in[0,L]$$

因此

$$|A^{\frac{1}{2}}u| \leqslant \rho_6^{(j)}\left(\tanh\frac{\pi L}{2\rho_5}\right)^{N_j}L^{\frac{1}{2}}|u| \leqslant$$

$$\rho_6^{(j)}\left(\tanh\frac{\pi L}{2\rho_5}\right)^{N_j}L^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^j|A^{\frac{j}{4}}u| = \rho_7^{(j)}|A^{\frac{j}{4}}u|$$

因 $u\neq 0$和 u 不能是多项式(u 是周期的,$\int_0^L u\mathrm{d}x=0$)。有 $\rho_7^{(j)}\geqslant 1$。这就表明

$$N_j \leqslant \lg\left[\rho_6^{(j)}L^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^j\right]\left(\lg\coth\frac{\pi L}{2\rho_5}\right)^{-1} = M_j,\ \forall j\in N_0$$

附注:

(1) 如果 $t\in[t_3,t_2+t_3]$,$j\in\mathbf{N}_0$,则$\dfrac{d^j(S(t)u_0)}{dx^j}$在$[0,L]$上的零点数目

$$\leqslant \lg\left[\rho_6^{(j)}L^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^j\left(\frac{t_2}{t-t_3}\right)^{j-\frac{1}{2}}\right]\left(\lg\coth\frac{\pi L t_2}{2\rho_5(t-t_3)}\right)$$

(2) M_j 对 j 的依赖(固定 L)为

$$M_j = O(j\lg j),\ j\to\infty$$

5.5 水平集的 Hausdorff 测度

考虑二维复 Ginzburg-Landau 方程

$$u_t - (1+\mathrm{i}\nu)\Delta u + (1+\mathrm{i}\mu)|u|^2u - au = 0 \quad (5.5.1)$$

其中分叉参数 $\nu\in\mathbf{R}$,$\mu\in\mathbf{R}$,$a\geqslant 0$,$u:\mathbf{R}^2\to\mathbf{C}$ 为未知函数。考虑区域 $\Omega=[0,1]^2$上的周期边界条件。

$$u(x+1,y,t) = u(x,y+1,t) = u(x,y,t)$$

$$x,y\in\mathbf{R},t\in[0,\infty) \quad (5.5.2)$$

和初始条件

$$u(x,y,0) = u_0(x,y),x,y\in\mathbf{R} \quad (5.5.3)$$

其中 u_0 为给定的 Ω 周期的局部平方可积函数。我们要研究式(5.5.1)水平集的 Hausdorff 测度的上界。我们将证明：对于任何非常数函数 $u\in\mathscr{A}$(整体吸引子)。置 $\mathscr{H}^1\{z\in\Omega:\mathrm{Re}\ u(z)=\mathrm{Re}\ \lambda\}$ 和 $\mathscr{H}^1\{z\in\Omega:\mathrm{Im}\ u(z)=\mathrm{Im}\ \lambda\}$ 至少有一个是囿于一个仅依赖于 ν，μ 和 a 的常数($\lambda\in\mathbf{C}$)，其中 $\mathscr{H}^n$ 表示 n 维 Hausdorff 测度。证明中除了要用到二维 GLE 的整体吸引子 Gevrey 正则性的有关结果，还用到了几何测度论[165]中的某些结果。

设 $\Omega=[0,L]^n;L>0,n\in\mathbf{N}$。令

$$L^2_{\mathrm{per}}(\Omega)=\{f:R^n\to\mathbf{R}:\int_\Omega f^2\mathrm{d}x<\infty,f\text{ 为 }\Omega\text{ 周期}\}$$

$f\in L^2_{\mathrm{per}}(\Omega)$，它的傅氏展开为

$$f(x)=\sum_{j\in\mathbf{Z}^n}f_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}qj\cdot x},x\in\mathbf{R}^n \tag{5.5.4}$$

其中 $f_j\in\mathbf{C}$ 为傅氏系数。$q=2\pi/L$(特别：$f_j=f^*_{-j},\forall\ j\in\mathbf{Z}^n$，这里"*"表示复数共轭)。注意到

$$\|f\|^2_{L^2}=\int_\Omega f^2\mathrm{d}x=L^n\sum_{j\in\mathbf{Z}^n}|f_j|^2$$

令

$$|j|=|j_1|+|j_2|+\cdots+|j_n|$$

$$|j|_2=(|j_1|^2+|j_2|^2+\cdots+|j_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$j=(j_1,j_2,\cdots,j_n)\in\mathbf{Z}^n$$

定义

$$\|f\|^2_m=L^n\sum_{j\in\mathbf{Z}^n}|qj|_2^{2m}|f_j|^2,m\geqslant 0 \tag{5.5.5}$$

定义 Sobolev 空间

$$H^m_{\mathrm{per}}(\Omega)=\{f(x)=\sum_{j\in\mathbf{Z}^n}f_j\mathrm{e}^{ijq\cdot x},$$

$$\|f\|^2_{H^m}=\|f\|^2_m+q^{2m}\|f\|^2_{L^2}<\infty\}$$

引进实值函数的 Gevrey 类。它的傅氏系数以指数衰减。以

$$T(r) = \{f = \sum_{j\in Z^n} f_j e^{jq\cdot x}:$$

$$\|f\|_{\Gamma(r)}^2 = L^n \sum_{j\in Z^n} e^{2q|j|2r} |f_j|^2 < \infty\}, r \geqslant 0 \quad (5.5.6)$$

表之。对任何函数定义在集 S 上，以

$$W(f,S) = \{x \in S: f(x) = 0\}$$

表示它的零点集。我们要证明的定理是

定理5.5.1 设 $r>0$ 且 $f\in\Gamma(r)$ 且不是零函数。满足

$$\|f\|_{\Gamma(r)} \leqslant M\|f\|_{L^2} \quad (5.5.7)$$

其中 $M>0$，则存在 $\alpha_1=\alpha_1(L,M,r,n)$。使得

$$\mathscr{H}^{n-1}(N(f,\Omega)) \leqslant \alpha_1$$

其中 $\alpha_1=C_1L^{n-1}(1+\lg M)e^{C_2L/r}$。这里及以后，$C_1, C_2, \cdots$ 均表示各种仅依赖于空间维数 n 的常数。

为证明这个定理，我们需要如下引理：

引理5.5.1 设 f 在

$$\Pi_\delta = \{z \in \mathbf{C}: |\mathrm{Im}\, Z| < \delta\}(\delta > 0)$$

上的全纯函数。它不是0常数函数。且满足

$$\sup_{z\in\Pi_\delta}|f(z)| \leqslant M \max_{x\in[0,L]} f(x)|, M \geqslant 1, L \geqslant 0 \quad (5.5.8)$$

则

$$\mathrm{card}\ (N(f,[0,L])) \leqslant \alpha_2, \alpha_2 = \alpha_2(\delta,M,L)$$

证明 设 $x_1, x_2, \cdots, x_N \in [0,L]$ 为 f 在 $[0,L]$ 上的不同零点。由 Schwarz 引理和式(5.5.8)推出

$$|f(x)| \leqslant \sup_{z\in\Pi_\delta} \Pi_{j=1}^N |\tanh\frac{\pi(x-x_j)}{4\delta}| \leqslant$$

$$M(\tanh\frac{\pi L}{4\delta})^N \max_{y\in[0,L]}|f(y)|, \forall x \in [0,L]$$

因此

$$M(\tanh\frac{\pi L}{4\delta})^N \geqslant 1$$

由此得

$$N \leqslant \frac{\lg M}{\lg \coth(\pi L/4\delta)} \leqslant (\lg M)^{\pi L/2\delta} = a_2$$

因 $M \geqslant 1, 1/\lg \coth x \leqslant e^{2x}, \forall x \in \mathbf{R}$ 即得。

在证明定理5.5.1之前，先应用 Agmon 不等式。

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \leqslant$$

$$C_3(\|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|f\|_n^{\frac{1}{2}} + q^{n/2}\|f\|_{L^2}), f \in H_{\mathrm{per}}^n(\Omega) \qquad (5.5.9)$$

由式(5.5.4)、(5.5.5)推出

$$\| \frac{\partial^{\alpha} f}{\partial x^{\alpha}} \|_m^2 = L^n \sum_{j \in \mathbf{Z}^n} |qj|_2^{2m} |(\mathrm{i}qj)^{\alpha}|_2^2 |f_j|^2 \leqslant$$

$$L^n \sum_{j \in \mathbf{Z}^n} |qj|_2^{2m+|\alpha|} |f_j|^2 \leqslant \frac{L^n(2(m+|\alpha|))!}{(2r)^{2(m-|\alpha|)}} \sum_{j \in \mathbf{Z}^n} |f_j| e^{2q|j|_{2r}} \leqslant$$

$$\frac{L^n(m+|\alpha|)!^2}{r^{2(m+|\alpha|)}} \sum_{j \in \mathbf{Z}^n} |f_j|^2 e^{2q|j|_{2r}}$$

$\forall \alpha \in \mathbf{N}_0^N, m \in \mathbf{N}_0, f \in H_{\mathrm{per}}^{(m+|\alpha|)}(\Omega)$。因此由式(5.5.6)

$$\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^{\alpha}} \|_m \leqslant \frac{(m+|\alpha|)!}{r^{m-|\alpha|}} \|f\|_{\Gamma(r)},$$

$$\alpha \in \mathbf{N}_0^n, m \in \mathbf{N}_0, f \in \Gamma(r) \qquad (5.5.10)$$

定理5.5.1的证明 由式(5.5.9)、(5.5.10)得

$$\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^{\alpha}} \|_\infty \leqslant C_3(\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^{\alpha}} \|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^{\alpha}} \|_n^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{n}{2}} \| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^{\alpha}} \|_{L^2}) \leqslant$$

$$\frac{C_3}{r^{|\alpha|}} (\frac{|\alpha|!^{\frac{1}{2}}(n+|\alpha|)!^{\frac{1}{2}}}{r^{n/2}} + q^{n/2} \| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^{\alpha}} \|_{L^2}) \leqslant$$

$$\frac{C_3 |\alpha|! 2^{(n+|\alpha|)/2}}{r^{|\alpha|}} (\frac{n!^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{n}{2}}} + q^{\frac{n}{2}}) \|f\|_{\Gamma(r)} \leqslant a_3 \frac{2^{|\alpha|} |\alpha|!}{r^{|\alpha|}} \|f\|_{\Gamma(r)}$$

$$(5.5.11)$$

其中

$$a_3 = C_3 2^{n/2} (\frac{n!^{\frac{1}{2}}}{r^{n/2}} + q^{n/2})$$

如同下式估计(5.5.12)。表明对给定任何 $x_0\in\mathbf{R}^n$,级数 $\sum_{\alpha\in\mathbf{N}_0^n}(\partial^{|\alpha|}f/\partial x^\alpha)(x-x_0)^\alpha$ 对于 $x\in\mathbf{R}^n$ 收敛,$|x-x_0|\leqslant r/2n$。这就是说,f 除了一个零集外,在每一点是实解析的。在每点的解析半径 $\leqslant r/2n$。因此能拓展 f 为全纯函数 $\tilde{f}$。在 $\Pi_\delta^n=\{z=(z_1,z_2,\cdots,z_n):|\text{Im } z_j|\leqslant\delta,\ \forall\ j\in\{1,\cdots,n\}\}$ 上,其中 $\delta=r/4n$。由式(5.5.7)、(5.5.11)有

$$
\begin{aligned}
|\tilde{f}(z)| &\leqslant \sum_{\alpha\in\mathbf{N}_0^n}\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}f(\text{Re } z)\right|\frac{\delta^\alpha}{\alpha!}\leqslant \\
& M\alpha_3\|f\|_{L^2}\sum_{\alpha\in\mathbf{N}_0^n}\frac{2^{|\alpha|}|\alpha|!\delta^\alpha}{r^{|\alpha|}\alpha!}\leqslant \\
& ML^{n/2}\alpha_3\|f\|_\infty\sum_{\alpha\in\mathbf{N}_0^n}\frac{|\alpha|!}{(2n)^{|\alpha|}\alpha!}= \\
& ML^{n/2}\alpha_3\|f\|_{L^\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)^k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}= \\
& ML^{n/2}\alpha_3\|f\|_{L^\infty}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}=\alpha_4\|f\|_{L^\infty}
\end{aligned}
$$

其中 $\alpha_4=2ML^{n/2}\alpha_3$,$\mathbf{N}_0=\{0,1,2,\cdots\}$。注意到 $n=1$时。由引理5.5.1即推出我们的结论。当 $n>1$。可找到 $x_0\in\Omega$。使得

$$
|\tilde{f}(x_0)|\geqslant\frac{1}{\alpha_4}\sup_{z\in\Pi_\delta^n}|\tilde{f}(z)| \tag{5.5.12}
$$

简单平移一下。可设 $x_0=0$。由文献[165;3.4.10]可知。存在奇性集 $S\subset\Omega$,具有 $H^{n-1}(S)=0$,使得 $N(f,\Omega)\backslash S$ 为可数的$(n-1)$维解析流形的并集,且有

$$
\mathscr{H}^{n-1}(N(f,\Omega)=\mathscr{H}^{n-1}(N(f,\Omega)\backslash s)<\infty
$$

现令 $x_1=(-L,0,0,0,\cdots,0)$,$x_2=(-L,L,0,0,\cdots,0)$,$x_3=(-L,0,L,\cdots,0)$,$\cdots$,$x_n=(-L,0,0,0,\cdots,L)$对 $j=1,2,\cdots n$ 和 $\omega\in S^{n-1}$。以 $l_j(\omega)$表示通过点 x_j。以 ω_j 为方向的直线和流形 $N(f,\Omega)\backslash S$ 的交点数。简单的几何考虑表明

$$\mathscr{H}^{n-1}(N(f,\Omega)) \leqslant C_4 L^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \int_{S^{n-1}} l_j(\omega)\mathrm{d}\omega \quad (5.5.13)$$

其中 C_4仅依赖于 n。现固定 $j\in\{1,2\cdots,n\}$和 $\omega\in S^{n-1}$，估计 $l_j(\omega)$。我们仅需考虑对 $\omega\in S^{n-1}$，$l_j(\omega)<\infty$。事实上，考虑函数 $g_j:\Omega\to S^{n-1}$定义为

$$g_j(x) = \frac{x-x_j}{|x-x_j|}, x\in\Omega$$

则从文献[165;2.10.11]得

$$\int_{S^{n-1}} l_j(\nu)d\nu \leqslant (\mathrm{Lip}\ g_j)^{n-1} \mathscr{H}^{n-1}(N(f,\Omega)) < \infty$$

其中 Lip g_j 为 gj 的 Lipschitz 常数。这就证明了 $l_j(\nu)<\infty$，$\nu\in S^{n-1}$。因此可设

$$\varphi(t) = \tilde{f}(x_j + t\omega), t\in\Pi_\delta$$

不是零函数。由式(5.5.12)有

$$|\varphi(0)| = |f(x_j)| = |f(0)| \geqslant \frac{1}{\alpha_4}\sup_{z\in\Pi_\delta^n}|\tilde{f}(z)| \geqslant \frac{1}{\alpha_4}\sup_{t\in\Pi_\delta}|\varphi(t)|$$

引理5.5.1推出

$$l_j(\omega) \leqslant \alpha_2(\delta,\alpha_4,L\sqrt{n+3})$$

因$\max\limits_{x\in\Omega}\mathrm{dist}(x_j,x)=L\sqrt{n+3}$以及式(5.5.13)得

$$\mathscr{H}^{n-1}(N(f,\Omega)) \leqslant C_5 L^{n-1}\alpha_2(\delta,\alpha_4,L\sqrt{n+3})$$

定理5.5.1证毕。

现来叙述 CL 方程的某些已知结果。并考证满足定理5.5.1的条件。

设 $\Omega=[0,1]^2$，H 为复值的。Ω 周期的。在 Ω 上具有平方可积的空间。对 $f\in H$。它的傅氏展开为

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbf{Z}^2} f_j \mathrm{e}^{2\pi i j\cdot x}, x\in\mathbf{R}^2 \quad (5.5.14)$$

其中 $f_j\in\mathbf{C}(j\in\mathbf{Z}^2)$。$H$ 为 $\mathbf{R}$ 上的 Hilbert 空间。可引用内积

$$(f,g) = \mathrm{Re}\int fg^*, f,g\in H$$

其模

$$\|f\|_{L^2} = (f,f)^{\frac{1}{2}}, f \in H$$

如果 f 为式(5.5.14)表示，则$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{j\in \mathbf{Z}^2} |f_j|^2$。令

$$A^s f = \sum_{j\in \mathbf{Z}^2} (|2\pi j|_2^2 + 1)^s f_j e^{2\pi i j\cdot x}, s \geqslant 0$$

其中 f 如式(5.5.14)表示。$|j|_2^2 = (j^{(1)})^2 + (j^{(2)})^2, \forall\ j = (j^{(1)}, j^{(2)}) \in \mathbf{Z}^2$。对于任意的 $s \geqslant 0$。A^s 为正闭算子。定义域为

$$D(A^s) = \{g = \sum_{j\in \mathbf{Z}^2} g_j e^{2\pi i j\cdot x} \in H:$$

$$|A^s g|^2 = \sum_{j\in \mathbf{Z}^2} |g_j|^2 (|2\pi j|_2^2 + 1)^{2s} < \infty\}$$

注意到 $Af = -\Delta f + f, f \in D(A)$。即有

$$\|A^{\frac{1}{2}} f\|_{L^2} \geqslant \|f\|_{L^2}, f \in D(A^{\frac{1}{2}})$$

令 $u' = u_t, B(u_1, u_2, u_3) = u_1 u_2 u_3^*$，则 GL 方程可写为

$$u' + (1 + i\nu)Au + (1 + i\mu)B(u,u,u) - (a + 1 + i\nu)u = 0 \tag{5.5.15}$$

对于非线性项 B。有如下的不等式：

$$|B(u_1,u_2,u_3),u_4| \leqslant \|u_1\|_{L^2}\|u_2\|_\infty\|u_3\|_\infty\|u_4\|_{L^2}$$
$$|B(u_1,u_2,u_3),u_4| \leqslant \|u_1\|_\infty\|u_2\|_\infty\|u_3\|_{L^2}\|u_4\|_{L^2} \tag{5.5.16}$$

$$|B(u_1,u_2,u_3),u_4| \leqslant C_6 \Pi_{j=1}^4 \|u_j\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|A^{\frac{1}{2}} u_j\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \tag{5.5.17}$$

已知对 $u_0 \in H$。存在解 $u(t) = S(t)u_0 (t \geqslant 0), u(0) = u_0$。算子 S 具有性质：

(i)$S(t)H \subset H, \forall\ t \geqslant 0, S(t): H \to H$ 为单射和连续的；

(ii)$S(t+s)u_0 = S(t)S(s)u_0, \forall s,t \geqslant 0, u_0 \in H$；

(iii)$\exists\ \rho_1, \rho_2, \rho_3$和 t_1。仅依赖于 ν, μ 和 a。使得

$$\|S(t)u_0\|_{L^2} \leqslant \rho_1, u_0 \in H, t \geqslant t_1$$

$$\|A^{\frac{1}{2}}S(t)u_0\|_{L^2} \leqslant \rho_2, u_0 \in H, t \geqslant t_1$$

$$\|S(t)u_0\|_{L^\infty} \leqslant \rho_3, u_0 \in H, t \geqslant t_1$$

令 $B_{\rho_1} = \{u_0 \in H : \|u_0\|_{L^2} \leqslant \rho_1\}$，则整体吸引子定义为

$$\mathscr{A} = \bigcap_{t \geqslant 0} S(t) B_{\rho_1}$$

整体吸引子具有如下性质：

(1)$\mathscr{A}$ 是 $D(A^{\frac{1}{2}})$中非空的。紧的子集；

(2)$S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}, \forall\ t \geqslant 0$；

(3)$\|u_0\|_{L^2} \leqslant \rho_1, u_0 \in \mathscr{A}$；

(4)$\lim\limits_{t\to\infty} \sup\limits_{\|u_0\|_{L^2} \leqslant M} \inf\limits_{v_0 \in \mathscr{A}} \|S(t)u_0 - v_0\|_{L^2} = 0, \forall\ M > 0$。

现在考虑 Gevrey 正则类。定义算子

$$e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} f = \sum_{j \in \mathbf{Z}^2} f_j e^{(|2\pi j|_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \tau} e^{2\pi i j \cdot x}, \tau \geqslant 0$$

$$f = \sum_{j \in \mathbf{Z}^2} f_j e^{2\pi i j \cdot x} \in D(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}) = \{g = \sum_{j \in \mathbf{Z}^2} g_j e^{2\pi i j \cdot x} :$$

$$\|g\|_{G(\tau)}^2 = \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} g\|_{L^2}^2 = \sum_{j \in \mathbf{Z}^2} |g_j|^2 e^{2(|2\pi j|_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \tau} < \infty\}$$

$$(f, g)_{G(\tau)} = (e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} f, e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} g), f, g \in D(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}})$$

命题5.5.1[164] 存在常数 $t_2 = t_2(\nu, \mu, a)$ 和 $\alpha_5 = \alpha_5(\nu, \mu, a)$，使得如下成立：如$|A^{\frac{1}{2}}S(t)u_0\|_{L^2} \leqslant \alpha\rho_2, \forall\ t \geqslant 0$，则

$$\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|_{G(\alpha_5 t/t_2)} \leqslant 2\rho_2, 0 \leqslant t \leqslant t_2$$

$$\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|G(\alpha_5) \leqslant 2\rho_2, t \geqslant t_2$$

命题5.5.2[164] 存在常数 $\alpha_6 = \alpha_6(\nu, \mu, a)$ 和 $\alpha_7 = \alpha_7(\nu, \mu, a) > 0$，使得如下成立：对任何解 u_1 和 u_2。有

$$\|A^{\frac{1}{2}}u_j(t)\|_{L^2} \leqslant \rho_2, t \geqslant 0, j = 1, 2$$

则存在唯一 $t_3 = t_3(\nu, \mu, a, u_1, u_2) \in [0, \infty]$。使得

$$\|A^{\frac{1}{2}}(u_1(t)-u_2(t))\|_{L^2} > \alpha_6\|u_1(t)-u_2(t)\|_{L^2}, t\in[0,t_3)$$

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_{L^2} \leqslant \|u_1(0)-u_2(0)\|_{L^2}e^{-\alpha_7 t}, t\in[0,t_3)$$

$$\|A^{\frac{1}{2}}(u_1(t)-u_2(t))\|_{L^2} \leqslant \alpha_6\|u_1(t)-u_2(t)\|_{L^2}, t\in[t_3,\infty)$$

以下研究两个解之差的 Gevrey 类性质。为此。我们将得到某些三线性项 B 的不等式。令 $u_k\in D(e^{rA^{\frac{1}{2}}}), k=1,2,3,4$和 $r>0$

$$u_k = \sum_{j\in\mathbf{Z}^2} u_k e^{2\pi i j\cdot x}$$

$$\tilde{u}_k = \sum_{j\in\mathbf{Z}^2} u_{kj}e^{2\pi i j\cdot x} = \sum_{j=-\infty}^{\infty}|u_{k_j}|e^{(|2\pi j|_2^2+1)^{\frac{1}{2}}r}e^{2\pi i j\cdot x}$$

注意到

$$\|A^s u\|_{G(r)} = \|A^s\tilde{u}_k\|_{L^2}, s\geqslant 0, k=\{1,2,3,4\} \quad (5.5.18)$$

引理5.5.2 我们有

$$|(B(u_1,u_2,u_3),u_4)_{G(r)}| \leqslant (B(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{u}_3),\tilde{u}_4)$$

证明 令 $\varphi(j)=(|2\pi j|_2^2+1)^{\frac{1}{2}}r, j\in\mathbf{Z}^2$。则有

$$|(B(u_1,u_2,u_3),u_4)_{G(r)}| =$$

$$\left|\mathrm{Re}\sum_{j,k,m\in\mathbf{Z}^2} u_{1,j}u_{2,j}u^*_{3,j}u^*_{4,j+k-m}e^{2\varphi(j+k-m)}\right| \leqslant$$

$$\sum_{j,k,m\in\mathbf{Z}^2}|u_{1,j}||u_{2,j}||u^*_{3,j}||u^*_{4,j+k-m}|e^{2\varphi(j+k-m)} \leqslant$$

$$\sum_{j,k,m\in\mathbf{Z}^2}\tilde{u}_{1,j}\tilde{u}_{2,j}\tilde{u}_{3,j}\tilde{u}_{4,j-k-m}e^{\varphi(j+k-m)-\varphi(j)-\varphi(k)-\varphi(m)} \leqslant$$

$$\sum_{j,k,m\in\mathbf{Z}^2}\tilde{u}_{1,j}\tilde{u}_{2,j}\tilde{u}_{3,j}\tilde{u}_{4,j-k-m} = (B(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{u}_3),\tilde{u}_4)$$

上面最后的不等式成立，是由于 φ 是偶函数，且

$$\varphi(j+k)\leqslant\varphi(j)+\varphi(k), j,k\in\mathbf{Z}^2$$

由引理5.5.2和式(5.5.17)推出

$$|(B(u_1,u_2,u_3),u_4)_{G(r)}| \leqslant C_6\prod_{j=1}^{4}\|u_j\|_{G(r)}^{\frac{1}{2}}\|A^{\frac{1}{2}}u_j\|_{G(r)}^{\frac{1}{2}}$$

(5.5.19)

其中 $u_1,u_2,u_3,u_4\in D(A^{\frac{1}{2}}e^{\tau A^{\frac{1}{2}}})$

引理5.5.3 设 u_1和 u_2为式(5.5.15)的两个解。满足

$$\|A^{\frac{1}{2}}u_j(t)\|_{G(\alpha_5)}\leqslant 2\rho_2, t\geqslant 0, j=1,2 \qquad (5.5.20)$$

$$\|u_j(t)\|_{L^\infty}\leqslant \rho_3, t\geqslant 0, j=1,2 \qquad (5.5.21)$$

则存在常数 $\alpha_8=\alpha_8(\nu,\mu,a)$和 $t_4=t_4(\nu,\mu,a)$,使得如果

$$\|A^{\frac{1}{2}}(u_1(t)-u_2(t))\|_{L^2}\leqslant \alpha_6\|u_1(t)-u_2(t)\|_{L^2}, t\geqslant 0 \qquad (5.5.22)$$

则

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_{G(\alpha_5)}\leqslant \alpha_8\|u_1(t)-u_2(t)\|_{L^2}, t\geqslant t_4$$

其中 $\alpha_5,\alpha_6,\rho_2,\rho_3$均为前面引过的。

证明 令 $v=u_1-u_2$。则

$$v'+(1+i\nu)Av+(1+i\mu)(B(u_1,u_1,v)+B(v,u_1+u_2,u_2))-(a+1+i\nu)v=0 \qquad (5.5.23)$$

固定 $\alpha>0$,令 $\varphi(t)=(v,v)_{G(\alpha t)}$。则当$0<\alpha t<\alpha_5$。有

$$\frac{1}{2}\varphi'(t)=(v',v)_{G(\alpha t)}+\alpha(A^{\frac{1}{2}}v,v)_{G(\alpha t)}=$$

$$-(Av,v)_{G(\alpha t)}-((1+i\mu)B(u_1,u_1,v),v)_{G(\alpha t)}-$$

$$((1+i\mu)B(v,u_1+u_2,u_2),v)_{G(\alpha t)}+$$

$$(a+1)\|v\|^2_{G(\alpha t)}+\alpha\|A^{\frac{1}{4}}v\|^2_{G(\alpha t)}$$

因$(i\nu v,v)_{G(\alpha t)}=(i\nu Av,v)_{G(\alpha t)}=0$,由式(5.5.19)得

$$\frac{1}{2}\varphi'(t)+\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2_{G(\alpha t)}\leqslant$$

$$C_6(1+\mu^2)^{\frac{1}{2}}\|u_1\|G(\alpha t)\|A^{\frac{1}{2}}u_1\|_{G(\alpha t)}\|v\|_{G(\alpha t)}\|A^{\frac{1}{2}}v\|_{G(\alpha t)}+$$

$$C_6(1+\mu^2)^{\frac{1}{2}}\|u_1+u_2\|^{\frac{1}{2}}_{G(\alpha t)}\|A^{\frac{1}{2}}(u_1+u_2)\|^{\frac{1}{2}}_{G(\alpha t)}\times$$

$$\|u_2\|^{\frac{1}{2}}_{G(\alpha t)}\|A^{\frac{1}{2}}u_2\|^{\frac{1}{2}}_{G(\alpha t)}\|v\|_{G(\alpha t)}\|A^{\frac{1}{2}}v\|_{G(\alpha t)}+$$

$$(a+1)\|v\|^{\frac{1}{2}}_{G(\alpha t)}+\alpha\|v\|_{G(\alpha t)}\|A^{\frac{1}{2}}v\|_{G(\alpha t)}\leqslant$$

$$C_6^2(1+\mu^2)\|u_1\|_{G(\alpha t)}^2\|A^{\frac{1}{2}}u_1\|_{G(\alpha t)}^2\|v\|_{G(\alpha t)}^2+$$

$$C_6^2(1+\mu^2)\|u_1+u_2\|_{G(\alpha t)}\|A^{\frac{1}{2}}(u_1+u_2)\|_{G(\alpha t)}\times$$

$$\|u_2\|_{G(\alpha t)}\|A^{\frac{1}{2}}u_2\|_{G(\alpha t)}\|v\|_{G(\alpha t)}^2+$$

$$\frac{1}{4}\|A^{\frac{1}{2}}v\|_{G(\alpha t)}^2+\frac{1}{4}\|A^{\frac{1}{2}}v\|_{G(\alpha t)}^2+$$

$$(a+1)\|v\|_{G(\alpha t)}^2+\frac{\alpha^2}{2}\|v\|_{G(\alpha t)}^2+\frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}v\|_{G(\alpha t)}^2$$

$$0\leqslant \alpha t\leqslant \alpha_5$$

因此，由式(5.3.20)得

$$\varphi'(t)\leqslant(\alpha_9+\alpha^2)\varphi(t),t\in[0,\frac{\alpha_5}{\alpha}]$$

其中 $\alpha_9=C_7(1+\mu^2)\rho_2^4+2a+2$。于是

$$\|v(t)\|_{G(\alpha t)}^2\leqslant e^{(\alpha_9+\alpha^2)t}\|v(0)\|_{L^2}^2,t\in[0,\frac{\alpha_5}{\alpha}]$$

选取 $\alpha=\alpha_9^{\frac{1}{2}},t=\alpha_5/\alpha_9^{\frac{1}{2}}$。可得

$$\|v(t_4)\|_{G(\alpha_5)}\leqslant e^{\alpha_5\alpha_9^{\frac{1}{2}}}\|v(0)\|_{L^2}$$

其中 $t_4=\alpha_5/\alpha_9^{\frac{1}{2}}$。对时间作平移。得

$$\|v(t+t_4)\|_{G(\alpha_5)}\leqslant e^{\alpha_5\alpha_9^{\frac{1}{2}}}\|v(t)\|_{L^2},t\geqslant 0 \qquad (5.5.24)$$

另一方面，作式(5.5.23)和 v 的内积。由式(5.5.16)得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|_{L^2}^2=-\|A^{\frac{1}{2}}v\|_{L^2}^2-((1+\mathrm{i}\mu)B(u_1,u_1,v),v)-$$

$$((1+\mathrm{i}\mu)B(v,u_1+u_2,u_2),v)-(a+1)\|v\|_{L^2}^2\geqslant$$

$$-\alpha_6^2\|v\|_{L^2}^2-(1+\mu^2)^{\frac{1}{2}}\|u_1\|_{L^\infty}^2\|v\|_{L^2}^2-$$

$$(1+\mu^2)^{\frac{1}{2}}\|u_1\|_{L^\infty}\|u_1+u_2\|_{L^\infty}\|v\|_{L^2}^2+(a+1)\|v\|_{L^2}^2\geqslant$$

$$-(\alpha_6^2+3\rho_3^2(1+\mu^2)^{\frac{1}{2}}-(a+1)\|v\|_{L^2}^2=-\alpha_{10}\|v\|_{L^2}^2$$

由此及式(5.5.24)。可得

$$\|v(t+t_4)\|_{G(\alpha_5)}\leqslant e^{\alpha_5\alpha_9^{\frac{1}{2}}}\|v(t)\|_{L^2}\leqslant$$

$$e^{\alpha_5\alpha_9^{\frac{1}{2}}} + \alpha_{10}t_4\|v(t+t_4)\|_{L^2}, t \geqslant 0$$

令 $\alpha_8 = e^{\alpha_5\alpha_9^{\frac{1}{2}}} + \alpha_{10}t_4$。即得引理结论。

定理5.5.2 设 $u_1^0, u_2^0 \in \mathscr{A}$。则

$$\|u_1^0 - u_2^0\|_{G(\alpha_5)} \leqslant \alpha_8\|u_1^0 - u_2^0\|_{L^2}$$

其中常数 α_5, α_6已分别在命题5.5.1和引理5.5.2中引用过。

证明 设 u_1和 u_2为分别满足 $u_1(0) = u_1^0$和 $u_2(0) = u_2^0$的GL 方程的两个解。因 $u_1^0, u_2^0 \in \mathscr{A}$。设 u_1和 u_2定义在 $t<0$。由吸引子性质(3)。有

$$\|u_j(t)\|_{L^2} \leqslant \rho_1, \|A^{\frac{1}{2}}u_j(t)\|_{L^2} \leqslant \rho_2$$

$$\|u_j(t)\|_{L^\infty} \leqslant \rho_3, t \in \mathbf{R}, j = 1,2$$

由命题5.5.1推出

$$\|A^{\frac{1}{2}}u_j(t)\|_{G(\alpha_5)} \leqslant 2\rho_2, t \in \mathbf{R}, j = 1,2$$

由命题5.5.2，有

$$\|A^{\frac{1}{2}}(u_1(t) - u_2(t))\|_{L^2} \leqslant \alpha_6\|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^2}, t \in \mathbf{R}$$

由引理5.5.3，有

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{G(\alpha_5)} \leqslant \alpha_8\|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^2}, t \in \mathbf{R}$$

当 $t=0$时。即得我们的论断。

为了估计水平集的 Hausdorff 测度。以下设 $n=2, L=1$。

引理5.5.4 如果$\|f\|_{G(\sigma)} \leqslant M\|f\|_{L^2}, f \in H$。则下列断言至少之一是成立的：

(i) $\|\mathrm{Re}\, f\|_{\Gamma(\sigma)} \leqslant M\|\mathrm{Re}\, f\|_{L^2}$；

(ii) $\|\mathrm{Im}\, f\|_{\Gamma(\sigma)} \leqslant M\|\mathrm{Im}\, f\|_{L^2}$；如 $\mathrm{Re}\, f = 0$。则(ii)成立；如 $\mathrm{Im}\, f = 0$。则(i)成立。

注意到如 $f = \sum\limits_{j \in \mathbf{Z}^2} f_j e^{2\pi i j\cdot x}, f_j \in \mathbf{C}$。则

$$\mathrm{Re}\, f = \sum_{j \in \mathbf{Z}^2} \frac{1}{2}(f_j + f^*_{-j})e^{2\pi i j\cdot x}$$

$$\operatorname{Im} f = \sum_{j\in Z^2} \frac{1}{2}\mathrm{i}(-f_j + f^*_{-j})\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} j\cdot x}$$

证明 我们有

$$\|\operatorname{Re} f\|^2_{\Gamma(r)} + \|\operatorname{Im} f\|^2_{\Gamma(r)} =$$

$$\frac{1}{4}\sum_{j\in Z^2} \mathrm{e}^{4\pi|j|_2 r}(|f_j + f^*_{-j}|^2 + |f_j - f^*_{-j}|^2) =$$

$$\sum_{j\in Z^2} |f_j|^2 \mathrm{e}^{4\pi|j|_2 r} \leqslant \sum_{j\in Z^2} |f_j|^2 \mathrm{e}^{2(|2\pi j|_2^2+1)^{\frac{1}{2}} r} =$$

$$\|f\|^2_{G(r)} \leqslant M^2\|f\|^2_{L^2} = M^2(\|\operatorname{Re} f\|^2_{L^2} + \|\operatorname{Im} f\|^2_{L^2})$$

对于任何可微函数 f。用 f'_ω 表示 f 沿方向 $\omega\in S^1$ 的方向导数。

引理5.5.5 设 $v_1=\operatorname{Re} u_0, v_2=\operatorname{Im} u_0, u_0\in\mathscr{A}$。则存在 $\alpha_{11}=\alpha_{11}(\nu,\mu,a)$。使得对任何 $\omega\in S^1$，如 $(u_0)'_\omega\neq 0$。则

$$\mathscr{H}^1(N((v_j)'_\omega,\Omega)) \leqslant \alpha_{11} \text{ 至少对一个 } j\in\{1,2\} \text{ 成立} \tag{5.5.25}$$

证明 设 $\omega\in S^1$，GL 方程对空间平移是不变的。由定理5.5.2，

$$\frac{1}{h}\|u_0(\cdot+h\omega)-u_0(\cdot)\|_{G(\alpha_5)} \leqslant \frac{\alpha_8}{h}\|u_0(\cdot+h\omega)-u_0(\cdot)\|_{L^2},$$

$$h\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$$

令 $h\to 0$。得

$$\|(u_0)'_\omega\|_{G(\alpha_5)} \leqslant \alpha_8\|(u_0)'_\omega\|_{L^2} \tag{5.5.26}$$

如 $(v_1)'_\omega\neq 0,(v_2)'_\omega\neq 0$，则由引理5.5.4有

$$\|(v_j)'_\omega\|_{\Gamma(\alpha_5)} \leqslant \alpha_8\|(v_j)'_\omega\|_{L^2}, \text{至少对一个 } j\in\{1,2\} \text{ 成立。} \tag{5.5.27}$$

对于这个 j。由定理5.5.1给出式(5.5.25)。其中 $\alpha_{11}=\alpha_1(1,\alpha_8,\alpha_5,2)$。另一方面。如 $(v_k)'_\omega=0$。对于某个 $k\in\{1,2\}$。则式(5.5.26)推出式(5.5.27)。$j=k$。再由定理5.5.1推出式(5.5.25)。

定理5.5.3 设 $u_0\in\mathscr{A}$ 为非常数函数。则存在 $\alpha_{12}=\alpha_{12}(\nu,\mu,a)$，使得

$$\min \{\mathscr{H}^1(N(\mathrm{Re}\ (u_0 - \lambda), \Omega)), \mathscr{H}^1(N(\mathrm{Im}\ (u_0 - \lambda), \Omega))\} \leqslant \alpha_{12},$$
$$\lambda \in \mathbf{C} \qquad (5.5.28)$$

推论5.5.1 设 $u_0 \in \mathscr{A}$ 为非常数函数。则或者

$$\mathscr{H}^1(N(\mathrm{Re}\ u_0 - \lambda_1, \Omega)) \leqslant \alpha_{12}, \lambda_1 \in \mathbf{R} \qquad (5.5.29)$$

或者

$$\mathscr{H}^1(N(\mathrm{Im}\ u_0 - \lambda_2, \Omega)) \leqslant \alpha_{12}, \lambda_2 \in \mathbf{R} \qquad (5.5.30)$$

或者两者都成立。如果 $\mathrm{Re}\ u_0$为一常数，则式(5.5.30)成立。反之，如 $\mathrm{Im}\ u_0$为一常数，则有式(5.5.29)。

我们先证推论成立。设不等式(5.5.29)不成立。$\lambda_1 \in \mathbf{R}$。对于任意 $\lambda_2 \in \mathbf{R}$。令 $\lambda = \lambda_1 + \mathrm{i}\lambda_2$。则由式(5.5.28)推出式(5.5.30)。类似地，我们能证：如果式(5.5.30)不成立，则式(5.5.29)成立。

现设 $\mathrm{Re}\ u_0$为常数函数。令 $\lambda = \lambda_1 + \mathrm{i}\lambda_2, \lambda_1 = \mathrm{Re}\ u_0, \lambda_2$任意。则由式(5.5.28)导出式(5.5.30)。类似地，我们能证：$\mathrm{Im}\ u_0$为常数时，推出式(5.5.29)。

在证明定理5.5.3之前，我们先引进某些符号。设 $f \in H, \omega = (\omega^{(1)}, \omega^{(2)}) \in S^1, \omega^{\perp} = (-\omega^{(2)}, \omega^{(1)}) \in S^1$。对任意 $t \in \mathbf{R}$，$\tilde{l}(t)$表示$f|_\Omega$在通过 $t\omega$-沿 ω 方向线上的零点数目(注意：当 $t > \sqrt{2}$ 时，$\tilde{l}(t) = 0$)。令

$$l(\omega, f) = \int \tilde{l}\ (t)\mathrm{d}t$$

由文献[165;2.10,10]可知，上面积分存在。

定理5.5.3的证明 因 u_0不是常数函数，存在三个方向 $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in S^1$，使得它们之间任意两个方向的夹角为$2\pi/3$，$(u_0)'_{\omega_j}$不是零函数。对任何 $j \in \{1,2,3\}$，令 $u_1 = \mathrm{Re}\ u_0, u_2 = \mathrm{Im}\ u_0$和 $\lambda = \lambda_1 + \mathrm{i}\lambda_2 \in \mathbf{C}(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R})$。我们寻求

$$m = \min_{j=1,2} \mathscr{H}^1(N(u_j - \lambda_j, \Omega))$$

的上界，如果 $u_1 - \lambda_1$和 $u_2 - \lambda_2$同时不是零函数。集合 $N(u_1 - \lambda_1, \Omega)$和 $N(u_2 - \lambda_2, \Omega)$由可数多的解析曲线所组成。可能有有限多个奇点。见文献[165;3.4,10]。这些解析曲线在每点上形成一个由具方

向 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$。至少有两条直线。至少为$\frac{\pi}{6}$的角度。因此

$$m \leqslant 2(l(\omega_k,u_1-\lambda_1)+l(\omega_l,u_1-\lambda_1)) \qquad (5.5.31)$$

$$m \leqslant 2(l(\omega_k,u_2-\lambda_2)+l(\omega_l,u_2-\lambda_2)),k,l \in \{1,2,3\},k \neq l \qquad (5.5.32)$$

当函数 $u_1-\lambda_1$ 或 $u_2-\lambda_2$ 为零函数时，上述结论也成立。由式(5.5.31)，存在 $k_1,k_2 \in \{1,2,3\}$，$(k_1 \neq k_2)$使得

$$l(\omega_k,u_1-\lambda_1) \geqslant \frac{m}{4},j=1,2$$

由式(5.5.32)，存在 $k_3,k_4 \in \{1,2,3\}$，$k_3 \neq k_4$，有

$$l(\omega_k,u_2-\lambda_2) \geqslant \frac{m}{4},j=3,4$$

则取 $k \in \{k_1,k_2\} \cap \{k_3,k_4\}$，可得

$$l(\omega_k,u_j-\lambda_j) \geqslant \frac{m}{4},j=1,2$$

由 Rolle 定理和计算，可得

$$l(\omega_k,(u_j)'_{\omega_k}) \geqslant \frac{m}{4}-\sqrt{2},j=1,2$$

因此，由文献[165;2.10,11]

$$\mathscr{H}^1((u_j)'_{\omega_k},\Omega) \geqslant \frac{m}{4}-\sqrt{2},j=1,2$$

引理5.8最后给出 $m \leqslant 4(\alpha_{11}+\sqrt{2})=\alpha_{12}$。

如果解的零点集不属于整体吸引子，则有定理：

定理5.5.4 设 u_1和 u_2为 GL 方程的两个解。令 $v=u_1-u_2$，则存在 $\alpha_{13}=\alpha_{13}(\nu,\mu,a)$，使得以下可能性之一成立：

(i)$\lim\limits_{t\to\infty}\|v(t)\|_{L^2}=0$；

(ii)存在 $t_5=t_5(\nu,\mu,a,u_1,u_2)$。

使得

$$\min\{\mathscr{H}^1(N(\operatorname{Re} v(t),\Omega)),\mathscr{H}^1(N(\operatorname{Im} v(t),\Omega))\} \leqslant \alpha_{13},t \geqslant t_5 \qquad (5.5.33)$$

证明 由命题5.5.2可推出式(5.5.20)、(5.5.21)，$(t>t_1+$

t_2)。设(i)不成立,则由命题5.5.1推出 $t_3<\infty$ 和不等式(5.5.22),($t\geqslant t_1+t_2+t_3$)。则定理5.5.1,引理5.5.7和引理5.5.3,对于适当的 α_{13},即得式(5.5.33)。

附注1 如果考虑 GL 方程纯实的情况,即 $\nu=\mu=0$,初值 u_0 也是实值函数。此时有定理5.5.3的推论。如果 $v_0\in\mathscr{A}$ 为非常数函数,则 $\mathscr{H}^1(N(v_0-\lambda,\Omega))\leqslant\alpha_{12},\lambda\in\mathbf{R}$。

附注2 定理5.5.4的结论难以扩展到任何解。对 $n\in\mathbf{N}$。构造 GL 方程的一个解 u_n。使得

$$\mathscr{H}^1(N(u_n(\cdot,\ \cdot,t),\Omega))=n+1,t\in[0,\infty)\tag{5.5.34}$$

考虑

$$\varphi'(t)+(2\pi n)^2(1+\mathrm{i}\nu)\varphi(t)+(1+\mathrm{i}\mu)|\varphi(t)|^2\varphi(t)-a\varphi(t)=0$$

具有初值 $\varphi(0)=\varphi_0,\varphi_0\in\mathbf{C},\varphi_0\neq0$。因

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\varphi(t)|^2+(2\pi n)^2|\varphi(t)|^2+|\varphi(t)|^4-a|\varphi(t)|^2=0$$

则存在上述问题的一个解 $\varphi:[0,\infty)\to\mathbf{C}\backslash\{0\}$。容易验证

$$u(x,y,t)=\varphi(t)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx},x,y\in\mathbf{R},t\geqslant0$$

为 GL 方程的一个解,满足式(5.5.34)。

5.6 一类整体吸引子的结构及其维数的下界估计

设 E 为 Banach 空间,具有模$\|\cdot\|$,连续半群算子 $S(t):E\to E$,

$$S(t+s)=S(t)S(s),\forall\ s,t\geqslant0\tag{5.6.1}$$

$$S(0)=I\tag{5.6.2}$$

映照$(t,u_0)\to S(t)u_0$从 $\mathbf{R}^+\times E$ 到 E 是连续的,z 为 $S(t)$的不动点,满足

$$S(t)z = z, \forall\, t \in \mathbf{R}^+ \tag{5.6.3}$$

设映照 $u \to S(t)u$ 在 z 的邻域 $O(\forall\, t \in \mathbf{R}^+)$是 Fréchet 可微的，而且 S'满足 Hölder 条件：

$$\|S'(t)u_1 - S'(t)u_2\| \leqslant C_3(T)\|u_1 - u_2\|^\alpha,$$
$$0 < \alpha \leqslant 1。\forall\, u_1, u_2 \in O, \forall\, t \in [0,T] \tag{5.6.4}$$

其中常数 C_3依赖于 T，不依赖于 u_1和 u_2。

定义5.6.1 设 z 为 $S(z)$的不动点，$S(z)=z$。我们说 z 为 $S(z)$的双曲不动点，如果以下两个条件满足：

(i)$S'(z)$的谱 $\sigma(S'(z))$不和圆$\{\lambda \in \mathbf{C}, |\lambda|=1\}$相交；

(ii)E_-为有限维，其中 $E_+=E_+(z)$，$E_-=E_-(z)$为分别对应于 $S'(z)$的子集包含在$\{\lambda \in \mathbf{C}, |\lambda|>1\}$和$\{\lambda \in \mathbf{C}, |\lambda|<1\}$的 E 的线性不变子空间。

定义5.6.2 我们说 $S(t)(t \in \mathbf{R}^+)$的不动点 z 是双曲的，如果以下条件满足：

(i)依定义5.6.1，z 为 $S(t)$的双曲不动点，$\forall\, t>0$，

(ii)对应于算子 $S'(t)(z)$的线性不变子空间 E_+和 E_-与 t 无关。

在 z 点的稳定和不稳定流形分别定义如下：

$$\mu_-(z) = \{u_0 \in E, \forall\, t \leqslant 0, \exists\, u(t) \in S(-t)^{-1}u_0,$$
$$S(t)u_0 \to z, t \to +\infty\}$$

$$\mu_+(z) = \{u_0 \in E, \forall\, t \leqslant 0, \exists\, u(t) \in S(-t)^{-1}u_0,$$
$$u(t) \to z, t \to -\infty\}$$

显然有

$$S(t)\mu_-(z) = \mu_+(z), S(t)\mu_-(z) = \mu_-(z), \forall\, t \geqslant 0 \tag{5.6.5}$$

令 $S_1=S(1)$，$W_+(z)$表示映照 S_1的双曲不动点的不稳定流形。类似于 S_1，可定义 $W_+^R(z)$，$W_-^R(z)$：

$$\begin{cases} W_+^R(z) = \{u_0 \in O_R(z), \forall\, n \in \mathbf{N}, \exists\, u_n \in O_R(z), \\ \qquad\qquad S_1^n u_n = s(n)u_n = u_0, u_n \to z, n \to \infty\} \\ W_-^R(z) = \{u_0 \in O_R(z), S_1^n u_0 \to z, n \to \infty\} \end{cases} \tag{5.6.6}$$

关于 $W_+^R(z)$在 z 附近的结构，有如下引理

引理5.6.1　设 R 充分小，则存在映照 g_+, g_-满足

$$g_+ : O_R(z) \cap E_+(z) \to E_-(z), g_+(z) = 0,$$

$$g_- : O_R(z) \cap E_-(z) \to E_+(z), g_-(z) = 0$$

使得集合 $W_+^R(z), W_-^R(z)$可表示为

$$\begin{cases} W_+^R(z) = \{u \in E, u = u_+ + g_+(u_+), \\ \qquad\qquad u_+ \in O_R(z) \cap E_+(z)\} \\ W_-^R(z) = \{u \in E, u = u_- + g_-(u_-), \\ \qquad\qquad u_- \in O_R(z) \cap E_-(z)\} \end{cases} \tag{5.6.7}$$

映照 g_+和 g_-为 Fréchet 可微的，它们的微分 g'_+, g'_-满足 Hölder 条件具有相同的指数 α，且 $g'_-(z) = g'_+(z) = 0$。

现设半群 $S(t)$具有吸引子 $\mathscr{A}$，则有以下定理

定理5.6.1　设 E 为 Banach 空间，$S(t)$为半群算子 $t \in \mathbf{R}^+$，它满足条件(5.6.1)～(5.6.4)。设 $S(t)$具有整体吸引子 $\mathscr{A}$，且 z 为 $S(t)$的双曲不动点，则有

$$\mathscr{A} \supset \mu_+(z) \supset W_+^R(z) \tag{5.6.8}$$

其中 $R > 0$充分小，$W_+^R(z)$可表为式(5.6.6)。特别 $W_+^R(z)$为 $\epsilon^{1,\alpha}$流形，它的维数和 $E_+(z)$的维数相同。

定义5.6.3　半群 $S(t)$在一个集合 $\mathscr{F} \subset E$ 的 Lyapunov 泛函是一个连续函数 $F: \mathscr{F} \to \mathbf{R}$，使得

(i)对任何 $u_0 \in \mathscr{F}$，函数 $z \to F(S(t))u_0)$为减少的；

(ii)如对某个 $\tau > 0, F(s(\tau)u_1) = F(u_1)$，则 u_1为半群 $S(t)$的不动点。

定理5.6.2　设给定半群 $S(t)$具有性质式(5.6.1)、(5.6.2)。

设 $S(t)$ 具有 Lyapunov 泛函 F，且 F 在 $\mathscr{Y}\subset E$ 上连续。整体吸引子 $\mathscr{A}\subset\mathscr{Y}$。令 ϵ 表示半群的不动点集，则

$$\mathscr{A}=\mu_{+}(\epsilon) \tag{5.6.9}$$

更进一步，如果 ϵ 是离散的，则 $\mathscr{A}$ 为从 ϵ 的一点到另一点的异宿轨道的并集，即有：

$$\mathscr{A}=\bigcup_{z\in\epsilon}\mu_{+}(z) \tag{5.6.10}$$

证明 因 $\epsilon\in\mathscr{A}$，容易验证 $\mu_{+}(\epsilon)\subset\mu_{+}(\mathscr{A})$，则可证明 $\mu_{+}(\mathscr{A})=\mathscr{A}$。因此 $\mu_{+}(\epsilon)\subset\mathscr{A}$。现证反向成立。设 $u_0\in\mathscr{A}$，则 u_0 属于包含在 $\mathscr{A}$ 中的完全轨线 $\{u(t),t\in\mathbf{R}\}$，$u_0=u(0)$。因 $\mathscr{A}$ 是紧的，我们可由 $S(t)$ 的连续性，推得集合

$$\gamma=\bigcap_{s<0}\overline{\{u(t),t<s\}}$$

是非空的，紧的，连通的和不变的。事实上，γ 为 u_0 的 α 极限集 $\alpha(u_0)$ 的一部分。如果算子 $S(t)$ 是单射的，则它是 $\alpha(u_0)$ 的全体。集合 $\overline{\{u(t),t<s\}}\subset\mathscr{A}$，因此也是紧的。对 $s<0$，它形成紧集的减少序列，因此 γ 是紧的和非空的。这些集合也是连通的，因而 γ 也是连通的。最后，可证明 γ 是不变的。

$$S(t)\gamma=\gamma,\forall\ t\geqslant 0 \tag{5.6.11}$$

现证明 F 沿 γ 是常数。

$$F|_{\gamma}=\lim_{t\to-\infty}F(u(t))=\sup_{t\in\mathbf{R}}F(u(t)) \tag{5.6.12}$$

事实上，因 τ 沿轨线是减少的，F 在紧集 $\mathscr{A}$ 上是有界的，$\lim\limits_{t\to-\infty}F(u(t))$ 存在，γ 的每一点是序列 $\{u(t_n)\}$ 当 $t_n\to-\infty$ 的极限，因此式(5.6.12)成立，由式(5.6.11)、(5.6.12)和 Lyapunov 泛函的定义，γ 仅由 $S(t)$ 的定常点组成，$\gamma\subset\epsilon$。因 $u_0\in\mu_{+}(\gamma)$，$u_0\in\mu_{+}(\varepsilon)$，因此 $\mathscr{A}\subset\mu_{+}(\varepsilon)$。

如设 ϵ 是离散的，则 γ 归结为一个定常解 z，整个 $\{u(t)\}$ 当 $t\to-\infty$ 时收敛于 γ。特别 $u_0\in\mu_{+}(z)$，因而(5.6.10)成立。

类似地，能证明当 $t\to\infty$ 时，$u(t)\to z'$。考虑 γ'

$$\gamma' = \bigcap_{s>0} \overline{\{u(t), t > s\}}$$

γ' 为 u_0的 ω 极限集 $\omega(u_0)$。能证明 $\omega(u_0) \subset \varepsilon$ 为聚点。

例 考虑

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d\Delta u + g(u) = 0, \Omega \times \mathbf{R}^+ \qquad (5.6.13)$$

$$u = 0, \partial \Omega \times \mathbf{R}^+ \qquad (5.6.14)$$

G 为 g 的原函数，

$$G(s) = \sum_{j=1}^{2p-1} \frac{b_j}{j+1} s^{j+1}$$

令

$$F(u) = \frac{d}{2}\|u\|^2 + G(u)$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(u(t)) = \mathrm{d}(u(t), u'(t)) + \int_\Omega g(u(t))u'(t)\mathrm{d}x =$$

$$- \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right|^2 \leqslant 0$$

因此问题(5.6.13)、(5.6.14)的 Lyapunov 泛函是存在的，并在 $H_0^1(\Omega) \cap L^{2p}(\Omega)$ 上是连续的。选取 $\mathscr{F}$ 为包含在 $\mathscr{A}$ 中的$H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$的有界集，$F$ 在 $\mathscr{F}$ 上是连续的。

由定理5.6.1可估计吸引子的下界。事实上，在定理5.6.1的假设下，z 为半群的双曲不动点。由式(5.6.8)有

$$\mathscr{A} \supset W_+^R(z)$$

其中 $W_+^R(z)$为 $\varepsilon^{1,a}$具维数 $n = \dim E_+(z)$的流形。因此

$$\dim \mathscr{A} \geqslant n$$

其中 dim $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{A}$ 的 Hausdorff 或 fractal 维数。

例如，我们考虑问题(5.6.13)、(5.6.14)，则 $z = 0$是定常解，当

$$g'(0) = b_1$$

式(5.6.13)、(5.6.14)的线性化方程为

$$\frac{\partial v}{\partial t} - d\Delta v + b_1 v = 0 \tag{5.6.15}$$

$$v(0) = \xi \tag{5.6.16}$$

即有 $L(t,0)\cdot\xi = v(t)$，$L(t,0) = S'(t)(0)$。令 $\lambda_h, h\in\mathbf{N}$ 表示如下 Dirichlet 问题的特征值：

$$\begin{cases} -\Delta w_h = \lambda_h w_h, w_h \in H_0^1(\Omega) \\ 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots, \lambda_h \to \infty, h \to \infty \end{cases} \tag{5.6.17}$$

类似地，$\mu_h, h\in\mathbf{N}$ 表示线性化算子

$$-d\Delta\phi_h + b_1\phi_h = \mu_h\phi_h, \phi_h \in H_0^1(\Omega) \tag{5.6.18}$$

的特征值序列，比较 $\phi_h = w_h$ 得

$$\mu_h = b_1 + d\lambda_h, \forall\ h \tag{5.6.19}$$

$S'(t)$的谱由它的特征值和0组成，$S'(t)$的特征值为 $\exp\{-\mu_h t\}$的数目，不稳定的对应于 $\mu_h<0$，稳定的对应于 $\mu_h>0$。如 $\mu_h\neq 0, \forall\ h$，则系统是双曲的。

$$\frac{-b_1}{d} \notin \bigcup_{j\in\mathbf{N}} \lambda_j \tag{5.6.20}$$

设式(5.6.20)成立，$S'(t)$的特征值的数目 n 在$\{|\lambda|<1\}$中，它等于 k，其中

$$\lambda_h < -\frac{b_1}{d} \tag{5.6.21}$$

由此推出

$$\dim \mathscr{A} \geqslant n \tag{5.6.22}$$

当然，如 $b_1<0$且充分大，则 n 也是任意大的。

第六章　具小耗散动力系统的结构

对于近可积的系统如何利用有限维动力系统的理论，例如 Melnihov 方法，中心流形理论，法向双曲理论应用于无限维动力系统中去，这是一个很令人感兴趣的问题。因为这样做可以得到比现有无穷维动力系统理论更细致的几何结构。Delanghlin，Wiggins，Li，Kovacic 等在文献[167，168]中对具耗散的 Sine-Gordon 方程，非线性 Schrödinger 方程进行了深入的研究。另一方面，在小扰动下，考察定常解的结构如何随时间而发展，研究扰动的动力系统结构也是一个值得深入分析的问题。最近以来，对于 Ginzburg-Landau 方程，Doelman，Kapitula，Holmes，Hohenberg，Keefe 等在文献[205，206，170]中作了详尽的研究，我们也在文献[172]中对具有五次以及具导数项的 Ginzburg-Landau 方程的动力系统作了研究。值得一提的是，这些不稳定丛的结构和向量丛上的第一陈数密切相关，同时，还利用了 Evans 函数的某些结果，见文献[171]。

6.1　五次 Ginzburg-Landau 方程

考虑如下 Ginzburg-Landau 方程

$$W_t = c_0 W + (c_0 + \mathrm{i}\epsilon c_1) W_{xx} - (\frac{c_0}{2} + \mathrm{i}\epsilon c_2)|W|^2 W - (\frac{c_0}{2} + \mathrm{i}\epsilon c_3)|W|^4 W \tag{6.1.1}$$

其中：$W(x,t)$ 为复值函数；$(x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$，$c_0, c_1, c_2, c_3$ 为实常数；ϵ 为小参数。如 $c_0 = 0$，式（6.1.1）即为 Hamilton 非线性

Schuödinger 方程

$$iW_t + \varepsilon c_1 W_{xx} - \varepsilon c_2 |W|^2 W - \varepsilon c_3 |W|^4 W = 0 \quad (6.1.2)$$

设式(6.1.1)具有如下形式的周期解

$$W(x,t) = Re^{i(kx-\omega t)} \quad (6.1.3)$$

将式(6.1.3)代入式(6.1.1)，分开实部、虚部可得

$$\begin{cases} R^4 + R^2 = 2(1-k^2) \\ w = \varepsilon(c_1k^2 + c_2R^2 + c_3R^4) \end{cases} \quad (6.1.4)$$

当 $\varepsilon=0$ 时，即得到定常解，对 $\varepsilon\neq0$，可知 $\omega=O(\varepsilon)$。现设式(6.1.1)具有如下形式的解

$$W(x,t) = \rho(x)e^{i[\theta(x)-\varepsilon\omega t]} \quad (6.1.5)$$

代入式(6.1.1)，分开实部、虚部可得

$$\begin{cases} -\varepsilon\omega\rho = c_0(2\rho_x\theta_x + \rho\theta_{xx}) + \varepsilon c_1(\rho_{xx} - \rho\theta_x^2) \\ \qquad - \varepsilon c_2\rho^3 - \varepsilon c_3\rho^5 \\ c_0\rho + c_0(\rho_{xx} - \rho\theta_x^2) - \varepsilon c_1(2\rho_x\theta_x + \rho\theta_{xx}) - \\ \qquad \dfrac{c_0}{2}\rho^3 - \dfrac{c_0}{2}\rho^5 = 0 \end{cases} \quad (6.1.6)$$

由式(6.1.6)可得

$$\begin{cases} 2\rho_x\theta_x + \rho\theta_{xx} = \dfrac{\varepsilon c_0\rho}{c_0^2 + \varepsilon^2c_1^2}\left[(c_1 - \omega) + (c_2 - \dfrac{c_1}{2})\rho^2 + \right. \\ \qquad \left. \rho^4(c_3 - \dfrac{c_1}{2})\right] \\ \rho_{xx} - \rho\theta_x^2 = -\dfrac{\rho}{c_0^2 + \varepsilon^2c_1^2}\left[(c_0^2 + \varepsilon^2c_1\omega) - (\dfrac{c_0^2}{2} + \varepsilon^2c_1c_2)\rho^2 - \right. \\ \qquad \left. (\dfrac{c_0^2}{2} + \varepsilon^2c_1c_3)\rho^4\right] \end{cases} \quad (6.1.7)$$

式(6.1.7)中令 $\varepsilon=0$ 可得可积方程组

$$2\rho_x\theta_x + \rho\theta_{xx} = 0 \tag{6.1.8}$$

$$\rho_{xx} - \rho^2\theta_x^2 = -\rho + \frac{1}{2}\rho^3 + \frac{1}{2}\rho^5 \tag{6.1.9}$$

它具有第一积分

$$\rho^2\theta_x = \Omega \tag{6.1.10}$$

$$\rho_x^2 + \rho^2 + \frac{\Omega^2}{\rho^2} - \frac{1}{4}\rho^4 - \frac{1}{6}\rho^6 = K \tag{6.1.11}$$

其中 Ω 和 K 为积分常数。以下考虑 $\Omega=\Omega(x)$ 作为扰动方程组的慢变量，令 $v=\rho_x$，由式(6.1.8)、(6.1.9)可得

$$\rho_x = v \tag{6.1.12}$$

$$v_x = \frac{\Omega^2}{\rho^3} - \rho + \frac{1}{2}\rho^3 + \frac{1}{2}\rho^5 + \\ + \frac{\varepsilon^2 c_1 \rho}{c_0^2 + \varepsilon^2 c_1^2}\left[(c_1 - \omega) + (c_2 - \frac{c_1}{2})\rho^2 + (c_3 - \frac{c_1}{2})\rho^4\right] \tag{6.1.13}$$

$$\Omega_x = \rho^2 \frac{\varepsilon c_0}{c_0^2 + \varepsilon^2 c_1^2}\left[(c_1 - \omega) + (c_2 - \frac{c_1}{2})\rho^2 + (c_3 - \frac{c_1}{2})\rho^4\right] \tag{6.1.14}$$

先考虑未扰动方程组平衡点的性质，在式(6.1.12)～(6.1.14)中令 $\varepsilon=0$，得

$$\begin{cases} \rho_x = v \\ v_x = \dfrac{\Omega^2}{\rho^3} - \rho + \dfrac{1}{2}\rho^3 + \dfrac{1}{2}\rho^5 \\ \Omega_x = 0 \end{cases} \tag{6.1.15}$$

令

$$g(p)=\frac{1}{4}p^4+\frac{1}{2}p^3-p^2+\Omega_0^2 \qquad (6.1.16)$$

其中：Ω_0 为实常数；$p=\rho^2$ 易知除 $p=0,\Omega=0$ 外，方程(6.1.16)的根就是方程组(6.1.15)的平衡点。函数 $g(p)$ 对于不同的常数 Ω_0 如图 6.1 所示。

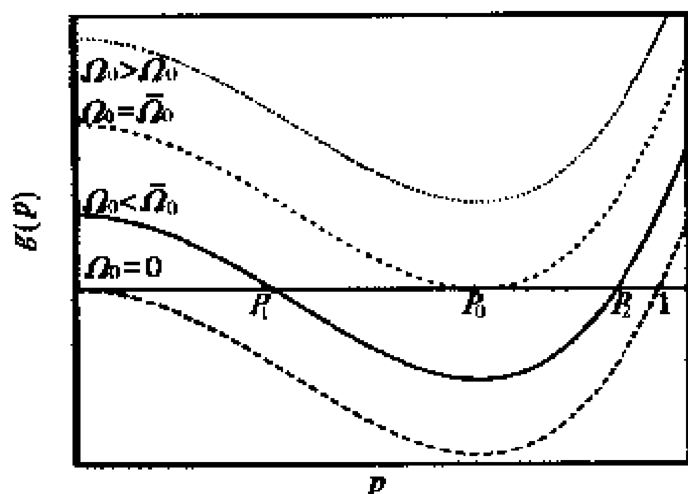


图 6.1 $p-g(p)$ 曲线

显然 $g(p)=2p(p+\frac{\sqrt{73}+3}{8})(p-\frac{\sqrt{73}-3}{8})$。因 $p\geqslant0$，函数 $g(p)$ 在 $p_0=\frac{\sqrt{73}-3}{8}$ 处有极小值，$g(p_0)=\frac{73\sqrt{73}-827}{1024}+\Omega_0^2$ 推出在 $\Omega=\Omega_0$ 平面 $g(p)$ 有两个正根 p_1,p_2，$0<|\Omega_0|<\tilde{\Omega}_0$，$\tilde{\Omega}_0=\sqrt{\frac{827-73\sqrt{73}}{1024}}$。对 $\Omega_0=0$，$g(p)$ 具有两个非负根 $p_1=0,p_2=1$。对于 $\Omega_0=\tilde{\Omega}_0$，$g(p)$ 具有一个根 $p=p_0$。于是有

引理 6.1.1 未扰动方程组(6.1.15)具有

(i) 三个平衡点：$(\pm1,0,0)$，$(0,0,0)$，$\Omega_0=0$；

(ii) 两对平衡点：$(\pm\sqrt{p_0},0,\pm\tilde{\Omega}_0)$，$\Omega_0=\tilde{\Omega}_0$；

(iii) 四对平衡点：$(\pm\sqrt{p_j}\,0,\pm\Omega_{0,j})$，$0<|\Omega_0|<\tilde{\Omega}_{0,j}=1,2$；

(iv) $\Omega_0>\tilde{\Omega}_0$ 时没有平衡点。

更进一步，

$$0 < p_1 < p_0 < p_2 < 1$$

且 $p_1(\Omega_0)$为 Ω_0 的增加函数，$p_2(\Omega_0)$为 Ω_0 的减少函数，且有

$$\lim_{|\Omega_0|\to\tilde{\Omega}} p_1(\Omega_0) \quad \lim_{\Omega_0 \to \Omega} p_1(\Omega_0) = p_0;$$

$$\lim_{\Omega_0 \to 0} p_1(\Omega_0) = 0; \quad \lim_{|\Omega_0|\to 0} p_2(\Omega_0) = 1$$

方程组(6.1.15)在平衡点$(\pm\rho_j^*, 0, \pm\Omega_j^*)$的特征方程为

$$\lambda^2 - \frac{1}{p_j}\left(\frac{5}{2}p_j^4 + \frac{3}{2}p_j^3 - p_j^2 - 3\Omega_0^2\right) = 0 \qquad (6.1.17)$$

记

$$q(p_j) = \frac{5}{2}p_j^4 + \frac{3}{2}p_j^3 - p_j^2 - 3\Omega_0^2 =$$

$$4p_j^2(p_j - p_0)\left(p_j + \frac{\sqrt{73} + 3}{8}\right)$$

当 $p_j < p_0$ 时，$q(p_j) < 0$ 推出 $\lambda_{1,2}(p_j)$具有纯虚根。因此 p_j 是稳定的中心不动点。另一方面，当 $p_j > p_0$ 时，$q(p_j) > 0$，则 p_j 是不稳定的鞍点型不动点。当 $p_j = p_0$ 时，$q(p_j) = 0$，由对式(6.1.17)特征根 λ 的分析，有如下结果：

引理 6.1.2 未扰动方程组(6.1.15)平衡点的性质如下：

(i) 当 $0 < |\Omega_0| < \tilde{\Omega}_0$，则平衡点$(\pm\sqrt{p_1}, 0, \pm\sqrt{|\Omega_0|})$为稳定中心，平衡点$(\pm\sqrt{p_2}, 0, \pm\sqrt{|\Omega_0|})$则为不稳定鞍点。

(ii) 当 $\Omega_0 = 0$ 时，平衡点(1,0,0)为不稳定鞍点，(0,0,0)为中心。

(iii) 当 $\Omega_0 = \tilde{\Omega}_0$ 时，平衡点$(\pm\sqrt{p_0}, 0, \pm\tilde{\Omega}_0)$为非双曲点定义 $K(\rho, v)$如下

$$K(\rho, v) = v^2 + \frac{\Omega^2}{\rho^2} + \rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 - \frac{1}{6}\rho^6 \qquad (6.1.18)$$

则 $K(\rho,0)$和方程组(6.1.15)相平面图如图 6.2 所示。

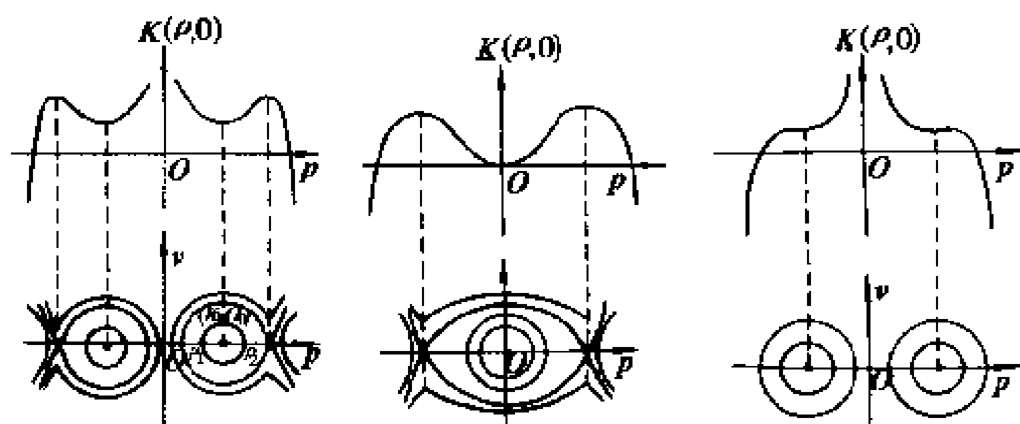


图 6.2 方程(6.1.15)的相平面图

于是可得如下结论。

引理 6.1.3

(i) 对于 $0<|\Omega_0|<\tilde{\Omega}_0$,存在二族周期轨道和二族同宿轨道,它们关于 v 轴是对称的,见图 6.2 和图 6.3(a)。

(ii) 对 $\Omega_0=0$,存在一族周期轨道和二族异宿轨道,见图 6.2(b)和图 6.3(b)。

(iii) $\Omega=\tilde{\Omega}_0$,存在二族周期轨道,它们关于 v 轴是对称的,见图 6.2(c)。方程组(6.1.15)的数值解,在相平面上对于参数 Ω_0:$0<|\Omega_0|<\tilde{\Omega}_0$ 和 $\Omega_0=0$ 如图 6.3(a)和 6.3(b)所示。

定义 $K_i(\Omega_0)=K(\rho_i(\Omega_0),0)$在平衡点 $\rho_i(\Omega)$的值,$i=1,2$。在 Ω_0 平面上的周期解对应于 $K_1(\Omega_0)$和 $K_2(\Omega_0)$($K_1<K_2$,$\forall\ \Omega_0$)之间的 K 值,这些周期解对应于方程(6.1.1)的解 $W(x,t)$,对 x 是拟周期的,对 t 是慢周期的,对于 $K\notin[K_1,K_2]$的解是无界的。式(6.1.15)周期解的积分值(K,Ω)在(K,Ω)平面上形成一个有界区域,它关于 K 轴是对称的,区域 E,K 与 Ω 的关系如图 6.4 所示。E 的边界 ∂E_i,由对应于平衡点 $\rho_i(\Omega)$($i=1,2$)的点组成:

$$\partial E_i=\{(K,\Omega);\Omega^2=y^2-\frac{1}{2}y^3-\frac{1}{2}y^4,$$

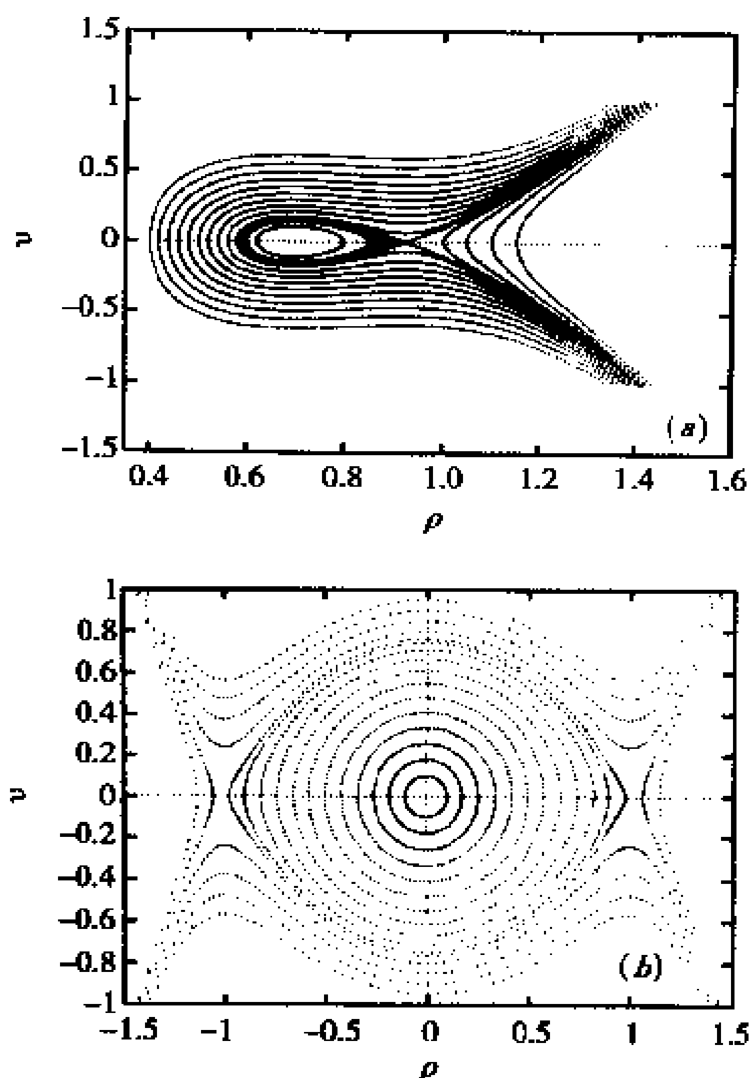


图 6.3

(a)由数值计算的 $0<|\Omega|<\Omega_0$ 的相平面图；

(b)由数值计算的方程(6.1.15)的相平面图。

$$K = 2y - \frac{3}{4}y^2 - \frac{2}{3}y^3, y = \rho_i^2, i = 1,2$$

在(K,Ω)平面上的区域 E，对应于定向(ρ,v,Ω)的体积 S，它的边界 ∂S 由一族同宿轨道给定，在 S 的内部，所有解都是周期的。

现考虑扰动方程组(6.1.12)～(6.1.14)，我们有

引理 6.1.4

(i) 由方程组(6.1.12)～(6.1.14)所确定的流，在对称变换：

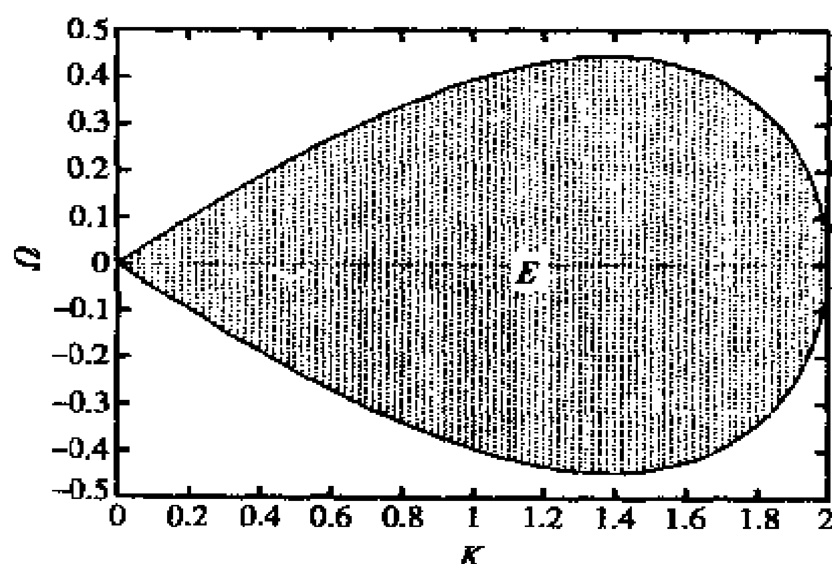


图 6.4　区域 E,K 与 Ω 的关系

$x\to-x$,$v\to-v$,$\Omega\to-\Omega$,以及 $\rho\to-\rho$,$v\to-v$ 下是不变的。

(ii) 如果 p,Ω 为方程组(6.1.12)～(6.1.14)的平衡点,则 p 满足

$$ap^2+bp+c=0 \tag{6.1.19}$$

$$p_2-\frac{1}{2}p^3-\frac{1}{2}p^4=\Omega^2 \tag{6.1.20}$$

其中 $a=c_3-\frac{c_1}{2}$,$b=c_2-\frac{c_1}{2}$,$c=c_1-\omega$,$p=\rho^2$,而且它们也是未扰动方程组的平衡点,如 p_* 为平衡点,则 $0<p_*<1$,而且平衡点的位置不依赖于 c_0 和 ε。

引理 6.1.5　非负实数 p_* 满足式(6.1.20)当且仅当

$$0\leqslant\Omega^2=-\frac{1}{2}p_*^2(p_*-1)(p_*-12)\Leftrightarrow 0\leqslant p_*\leqslant 1$$

对 $a\neq 0$,能改写方程组(6.1.19)、(6.1.20)如下:

$$p^2+rp+s=0 \tag{6.1.21}$$

$$p^2-\frac{1}{2}p^3-\frac{1}{2}p^4=\Omega^2 \tag{6.1.22}$$

其中 $r=\frac{b}{a}$,$s=\frac{c}{a}$。对式(6.1.21)、(6.1.22)的解 p,Ω 可得到如下

根和系数的关系。

引理 6.1.6

(i) 对 $s=\frac{r^2}{2}, r\geqslant -2$，存在单重正根 $p_0=\frac{|r|}{2}$ 满足式(6.1.21)(见图 6.5 中 AO 线段)。

(ii) $0<s<\frac{r^2}{4}, r+s>-1, r<0$，则存在两个正根 $0<p_1<p_2<1$，满足式(6.1.21)(见图 6.5 区域(Ⅰ))。

(iii) $s=0, -1<r<0$，则存在一个零根 $p_1=0$ 和一个正根 $p_2=|r|$，(见图 6.5 线段 OC)。

(iv) $s+r>-1, s<0$，则存在式(6.1.21)的一个正根 $0<p_1<1$(见图 6.5 区域(Ⅱ))。

(v) $s+r=-1, -2<r$，则存在式(6.1.21)的一个正根(见图 6.5 线段 AB)。

(vi) $s=0, r=0$，则式(6.1.19)仅有一个零根 $p=0$。

(vii) $a=0, 0<-\frac{c}{b}<1$，则存在式(6.1.21)一个正根 $p=-\frac{c}{b}<1$。

由引理 6.1.6 可得

定理 6.1.1 设 $f(p)=p^2-\frac{1}{2}p^3-\frac{1}{2}p^4$。则

(i) $s=\frac{r^2}{4}, 0>r\geqslant -2$；或者 $\omega=c_1-\Delta<c_2+c_3, 2c_2<c_1<2c_3$；或者 $\omega=c_1+\Delta>c_2+c_3, 2c_3<c_1<2c_2$。则存在式(6.1.21)的单重正根 $0<p_0<\frac{c_1-2c_2}{2(2c_3-c_1)}<1$，和存在式(6.1.21)、(6.1.22)或式(6.1.12)～(6.1.14)的四个平衡点：$(\rho_0, 0, \pm\Omega_0)$，$(-\rho_0, 0, \pm\Omega_0)$，其中 $\pm\rho_0=\pm\sqrt{p_0}$，$\pm\Omega_0=\pm\sqrt{f(p_0)}$，$\Delta=\frac{(c_2-\frac{c_1}{2})^2}{4(c_3-\frac{c_1}{2})}$；

(ii) $0<s<\frac{r^2}{4}, r+s>-1, r<0$；或者 $c_1-\Delta<\omega<\min\{c_1, c_2+$

$c_3\}$, $2c_2<c_1<2c_3$；或者 $\max\{c_1, c_2+c_3\}<\omega<c_1+\Delta$, $2c_3<c_1<2c_2$。

则存在式(6.1.21)的两个正根 $0<p_1<p_2<1$，式(6.1.19)～(6.1.20)或式(6.1.12)～(6.1.14)的八个平衡点：

$(\rho_1, 0, \pm\Omega_1)$, $(-\rho_1, 0, \pm\Omega_1)$, $(\rho_2, 0, \pm\Omega_2)$, $(-\rho_2, 0, \pm\Omega_2)$

其中 $\pm\rho_i=\pm\sqrt{p_i}$, $i=1,2$, $\Omega^2=\Omega_i^2=(-\Omega_i)^2$, $i=1,2$。

(iii) $s=0$, $-1<r<0$；或者 $2c_2<\omega=c_1<\min\{c_2-c_3, 2c_3\}$；或者

$$\max\{c_2+c_3, 2c_3\}<\omega=c_1<2c_2$$

存在一个零根 $p=0$ 和一个正根 $p_1=\dfrac{c_1-2c_2}{2c_3-c_1}<1$，和五个平衡点：

$$(0,0,0),(\rho_1,0,\pm\Omega_1),(-\rho_1,0,\pm\Omega_1)$$

其中 $\pm\rho_1=\pm\sqrt{p_1}$, $\pm\Omega_1=\pm\sqrt{f(p_1)}$。

(iv) $s<0$, $r+s>-1$；或者 $\omega\leqslant c_2+c_3$, $c_1<\min\{2c_3, \omega\}$；或者

$$\omega\geqslant c_2+c_3, c_1>\max\{2c_3, \omega\}$$

则存在式(6.1.21)的一个正根 $0<p<1$ 和式(6.1.19)、(6.1.20)或式(6.1.12)～(6.1.14)的四个平衡点：

$$(\rho_1,0,\pm\Omega_1),(-\rho_1,0,\pm\Omega_1)$$

其中 $\pm\rho_1=\pm\sqrt{p}$, $\pm\Omega_1=\pm\sqrt{f(p)}$。

(v) $r+s=-1$, $-2<r$；或者 $c_1-\Delta<\omega=c_2+c_3<c_1<2c_3$；或者

$$2c_3<c_1<\omega=c_2+c_3<c_1+\Delta$$

则存在一个正根 $p=1$ 和两个平衡点(1,0,0)和(−1,0,0)。

(vi) $r=0$, $s=0$，对 $c_1\neq 2c_3$, $\omega=c_1=2c_2$，则存在一个平衡点(0,0,0)。

(vii) $a=0$, $0<-\dfrac{c}{b}<1$，则存在一个正根 $p=-\dfrac{c}{b}<1$，两个平衡点：$\left(\pm\sqrt{-\dfrac{c}{b}}, 0, \pm\Omega\right)$。

当系数 $a=c_3-\frac{c_1}{2}\neq 0$ 时，方程组(6.1.12)～(6.1.14)平衡点的数目依赖于 r 和 s，在图 6.5 中表明 r 和 s 的关系。在区域(Ⅰ)和(Ⅱ)中分别存在两个正根和一个正根，在原点 $O(0,0)$，仅有根 $(0,0,0)$。图 6.6 表明有 8 个平衡点，它们在 $v=0$ 平面上关于 Ω,ρ 轴对称。

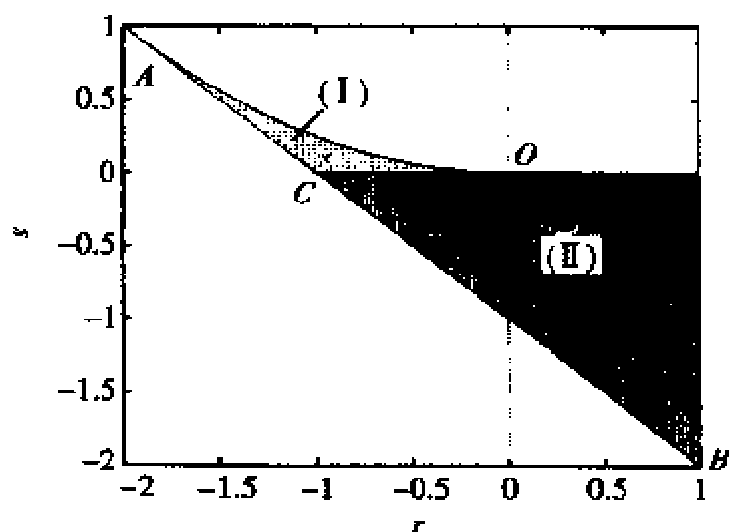


图 6.5　r 和 s 的关系

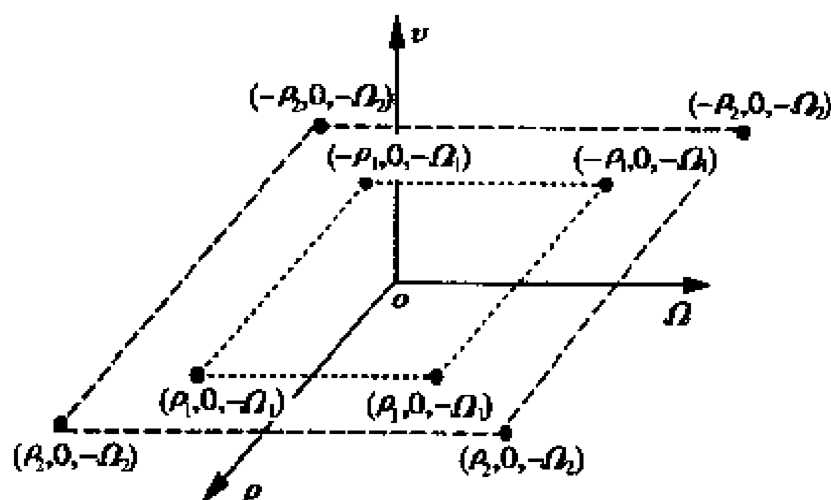


图 6.6　8 个平衡点图

以下讨论扰动方程组(6.1.12)～(6.1.14)平衡点的性质，为此可得它的特征值方程

$$\lambda^3 - A_j\lambda - B_jC_j = 0 \qquad (6.1.23)$$

其中

$$A_j = -3\frac{\Omega_j^2}{\rho_j^4} - 1 + \frac{3}{2}\rho_j^2 + \frac{5}{2}\rho_j^4 + \frac{\varepsilon^2 c_1}{c_0^2 + \varepsilon^2 c_1^2}[c + 3b\rho_j^2 + 5a\rho_j^4]$$

$$B_j = \frac{2\Omega_j}{\rho_j^3}$$

$$C_j = \frac{\varepsilon c_0 \rho_j}{c_0^2 + \varepsilon^2 c_1^2}[2c + 4b\rho_j^2 + 6a\rho_j^4], j = 1,2$$

因

$$ap_j^2 + bp_j + c = 0, p_j^2 - \frac{1}{2}p_j^3 - \frac{1}{2}p_j^4 = \Omega_j^2$$

因此可得

$$A_j = 4(p_j - p_0)(p_j + \frac{\sqrt{73} + 3}{8}) + \frac{2\varepsilon^2 c_1 p_j}{c_0^2 + \varepsilon^2 c_1^2}(b + 2ap_j)$$

$$B_jC_j = \frac{4\Omega_j \varepsilon c_0}{c_0^2 + \varepsilon^2 c_1^2}(b + 2ap_j)$$

为了方便讨论，设 $c_1 > 0, \varepsilon c_0 > 0$。

情况Ⅰ：式(6.1.19)、(6.1.20)具有两个根。

设式(6.1.19)、(6.1.20)具有两个正根，则 $p_1 < -\frac{b}{2a} < p_2$，即 $2ap_1 + b < 0$。如 $\Omega_j > 0$，

$$B_1C_1 < 0, B_2C_2 > 0, A_1 < 0, A_2 > 0 \qquad (6.1.24)$$

首先，考虑在最小正根 p_1 处的稳定性。设 $\Omega_j > 0$，λ_1^1，λ_2^1 和 λ_3^1 为式(6.1.23)的三个根，根和系数的关系如下：

$$\lambda_1^1 + \lambda_2^1 + \lambda_3^1 = 0 \qquad (6.1.25)$$

$$\lambda_1^1\lambda_2^1 + \lambda_1^1\lambda_3^1 + \lambda_2^1\lambda_3^1 = -A_1 > 0 \qquad (6.1.26)$$

$$\lambda_1^1\lambda_2^1\lambda_3^1 = B_1C_1 < 0 \qquad (6.1.27)$$

由式(6.1.27)推出存在一个负根，如 $\lambda_3^1 < 0$，令 $\lambda_1^1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$，$\lambda_2^1 = \alpha - \mathrm{i}\beta$，将 λ_j^1 代入式(6.1.25)，有 $\alpha = -\frac{\lambda_3^1}{2} > 0$。因此

$$\mathrm{Re}\,\lambda_1^1=\mathrm{Re}\,\lambda_2^1>0,\lambda_3^1<0$$

其次，分析较大的正根 p_2。设 $f_2(\lambda)=\lambda^3-A_2\lambda-B_2C_2$，则有 $f'_2(\lambda)=3\lambda^2-A_2$，$f_2(\lambda)$有两个临界点$\pm\sqrt{\dfrac{A_2}{3}}$，因 $B_2C_2=O(\varepsilon)$推出

$$\begin{cases}f(-\sqrt{\dfrac{A_2}{3}})=\dfrac{2}{3}A_2\sqrt{\dfrac{A_2}{3}}-B_2C_2>0\\ f(\sqrt{\dfrac{A_2}{3}})=-(\dfrac{2}{3}A_2\sqrt{\dfrac{A_2}{3}}+B_2C_2)<0\end{cases}$$

因 $f_2(0)=-B_2C_2<0$，则 $\lambda_1^2<0,\lambda_2^2<0,\lambda_3^2>0$，($\lambda_1^2<-\sqrt{\dfrac{A_2}{3}}<\lambda_2^2$，$\lambda_3^2>\sqrt{\dfrac{A_2}{3}}$)。由以上分析，可得

定理 6.1.2 设式(6.1.21)、(6.1.22)或式(6.1.12)～(6.1.14)有两种不同类型的平衡点，$\varepsilon c_c>0,\Omega_j>0,c_1>0$，则 p_1 为鞍点一焦点，p_2 为鞍点，更进一步有

(i) 对于平衡点 $p_1^1(\rho_1,0,\Omega_1)$，$p_1^2(-\rho_1,0,\Omega_1)$有

$\dim W^s_{\mathrm{loc}}((\pm\rho_1,0,\Omega_1))=1$，

$\dim W^u_{\mathrm{loc}}((\pm\rho_1,0,\Omega_1))=2$，(见图 6.7($a$))。

(ii) 对平衡点 $p_1^3(\rho_1,0,-\Omega_1)$，和 $p_1^4(-\rho_1,0,-\Omega_1)$有

$\dim W^s_{\mathrm{loc}}((\pm\rho_1,0,-\Omega_1))=2$，

$\dim W^u_{\mathrm{loc}}((\pm\rho_1,0,-\Omega_1))=1$，(见图 6.7($b$))

(iii) 对平衡点 $p_2^1(\rho_2,0,\Omega_2)$，和 $p_2^2(-\rho_2,0,\Omega_2)$有

$\dim W^s_{\mathrm{loc}}((\pm\rho_2,0,\Omega_2))=2$，

$\dim W^u_{\mathrm{loc}}((\pm\rho_2,0,\Omega_2))=1$，(见图 6.7($c$))。

(iv) 对平衡点 $p_2^3(\rho_2,0,-\Omega_2)$，和 $p_2^4(-\rho_2,0,-\Omega_2)$有

$\dim W^s_{\mathrm{loc}}((\pm\rho_2,0,-\Omega_2))=1$，

$\dim W^u_{\mathrm{loc}}((\pm\rho_2,0,-\Omega_2))=2$，(见图 6.7($d$))。

其中 $W^s_{\mathrm{loc}}((\pm\rho_j,0,\Omega_j))$和 $W^u_{\mathrm{loc}}((\pm\rho_j,0,\Omega_j))$分别表示在平衡点

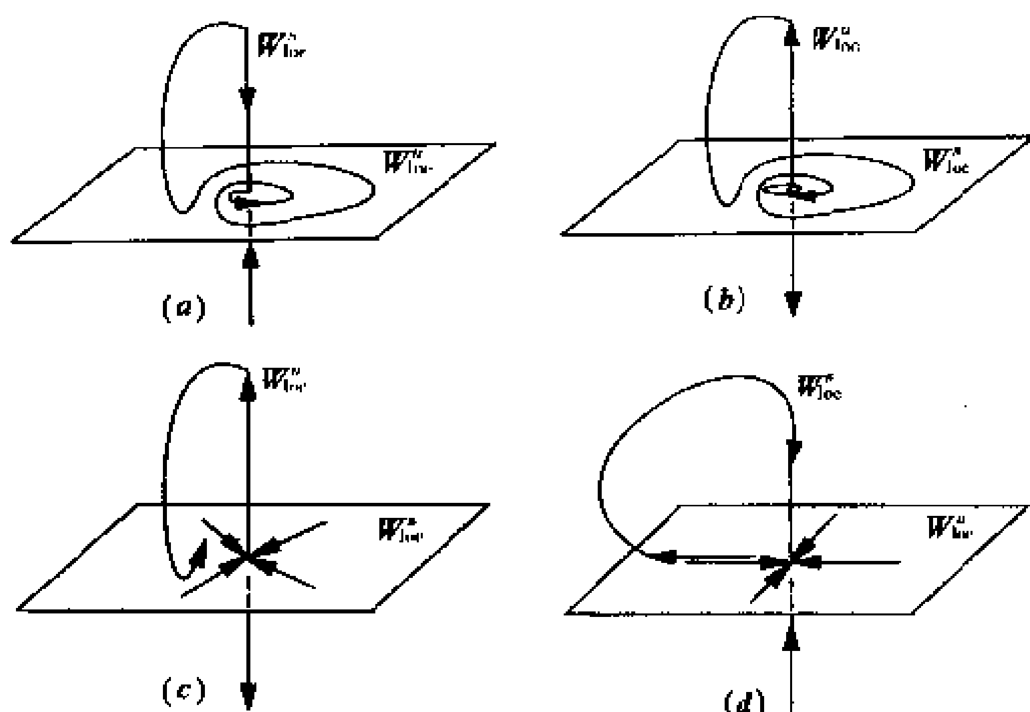


图 6.7

(a) $p_1^2(-\rho_1,0,\Omega_1)$或 $p_1^1(\rho_1,0,\Omega_1)(W^s=1,W^u=2)$;

(b) $p_1^4(-\rho_1,0,-\Omega_1)$或 $p_1^3(\rho_1,0,-\Omega_1)(W^s=2,W^u=1)$;

(c) $p_2^2(-\rho_2,0,\Omega_2)$或 $p_2^2(\rho_2,0,\Omega_2)(W^s=2,W^u=1)$;

(d) $p_2^4(-\rho_2,0,-\Omega_2)$或 $p_2^3(\rho_2,0,-\Omega_2)(W^s=2,W^u=1)$。

$(\pm\rho_j,0,\Omega_j)(j=1,2)$处的稳定、不稳定流形。

情况Ⅱ:式(6.1.19)、(6.1.20)具有一个根

如 $a=0$,则 $p_*=\dfrac{\omega-c_1}{c_2-\dfrac{c_1}{2}}$为式(6.1.21)、(6.1.22)的一个正根,

由式(6.1.23)有

$$f(\lambda)=\lambda^3-A\lambda-BC=0$$

其中

$$A=4(p_*-p_0)(p_*+\frac{\sqrt{73}+3}{8})+\frac{2\varepsilon^2c_1b}{c_0^2+\varepsilon^2c_1^2}p_*,$$

$$BC=\frac{4\Omega_*\varepsilon c_0b}{c_0^2+\varepsilon^2c_1^2},p_0=\frac{\sqrt{73}-3}{8}$$

(i) 设 $\Omega_* \varepsilon c_0 b>0$，如 c_0, b 给定，则 $\Omega_* \varepsilon c_0 b$ 的符号由 Ω_* 的符号决定。更进一步，如 $0<p_*<p_0$，推出 $A<0+O(\varepsilon^2)$，$BC>0+O(\varepsilon)$ 有

$$\operatorname{Re}\lambda_2=\operatorname{Re}\lambda_3=-\lambda_1<0 \tag{6.1.28}$$

如 $p_0<p_*\leqslant 1$，推出 $A>0+O(\varepsilon^2)$，$BC>0+O(\varepsilon)$ 有

$$\lambda_1<0,\lambda_2<0,\ \lambda_3>0 \tag{6.1.29}$$

(ii) 设 $\Omega_* \varepsilon c_0 b>0$，如 $0<p_*<p_0$ 推出 $A<0+O(\varepsilon^2)$，$BC<0+O(\varepsilon)$，则有

$$\operatorname{Re}\lambda_2=\operatorname{Re}\lambda_3=-\lambda_1>0 \tag{6.1.30}$$

如 $p_0<p_*\leqslant 1$，推出 $A>0+O(\varepsilon^2)$，$BC<0+O(\varepsilon)$，则有

$$\lambda_1<0,\lambda_2>0,\lambda_3>0 \tag{6.1.31}$$

因此有

定理 6.1.3 如果 $a=0\,(c_1=2c_3)$，$\varepsilon c_0 b>0$，则存在式(6.1.12)～(6.1.14)的四个平衡点 $(\pm\rho_*,0,\Omega_*)$，$(\pm\rho_*,0,-\Omega_*)$。进一步有

(i) 如 $(\pm\rho_*)^2=p_*<p_0$，则平衡点为鞍-焦点，

$\dim W_{\mathrm{loc}}^s((\pm\rho_*,0,\Omega_*))=2$,

$\dim W_{\mathrm{loc}}^u((\pm\rho_*,0,\Omega_*))=1$（类似于图 6.7(*b*)），

$\dim W_{\mathrm{loc}}^s((\pm\rho_*,0,-\Omega_*))=1$

$\dim W_{\mathrm{loc}}^u((\pm\rho_*,0,-\Omega_*))=2$（类似于图 6.7(*a*)）。

(ii) 如 $p_0<(\pm\rho_*)^2=p_*\leqslant 1$，则平衡点为鞍点，且

$\dim W_{\mathrm{loc}}^s((\pm\rho_*,0,\Omega_*))=2$,

$\dim W_{\mathrm{loc}}^u((\pm\rho_*,0,\Omega_*))=1$（类似于图 6.7(*c*)），

$\dim W_{\mathrm{loc}}^s((\pm\rho_*,0,-\Omega_*))=1$,

$\dim W_{\mathrm{loc}}^u((\pm\rho_*,0,-\Omega_*))=2$（类似于图 6.7(*d*)）。

如 $a\neq 0$，则有如下定理：

定理 6.1.4 设式(6.1.21)、(6.1.22)具有一根，如 $c_1\neq 2c_2$ $(a\neq 0)$，$\varepsilon c_0>0$，$c_1>0$，则存在式(6.1.19)、(6.1.20)或式(6.1.12)

~(6.1.14)四个平衡点，且

(i) 如$(\pm\rho_*)^2=p_*<p_0$，平衡点为鞍-焦点，且

$\dim W^s_{loc}((\pm\rho_*,0,\Omega_*))=1$，

$\dim W^u_{loc}((\pm\rho_*,0,\Omega_*))=2$(类似于图 6.7(a))，

$\dim W^s_{loc}((\pm\rho_*,0,-\Omega_*))=2$，

$\dim W^u_{loc}((\pm\rho_*,0,-\Omega_*))=1$，(类似于图 6.7(b))。

(ii) 如$p_0<(\pm\rho_*)^2=p_*<1$，则平衡点为鞍点，且

$\dim W^s_{loc}((\pm\rho_*,0,\Omega_*))=2$，

$\dim W^u_{loc}((\pm\rho_*,0,\Omega_*))=1$(类似于图 6.7(c))，

$\dim W^s_{loc}((\pm\rho_*,0,-\Omega_*))=1$，

$\dim W^u_{loc}((\pm\rho_*,0,-\Omega_*))=2$(类似于图 6.7(d))。

现研究周期轨道。

由式(6.1.12)~(6.1.14)可知具有不动点

$$\begin{cases}\rho=R,\\ \Omega=R^2k,\\ v=0\end{cases}$$

其中：R,k 满足式(6.1.4)；不动点对应于式(6.1.1)的周期解。我们现来讨论方程组(6.1.12)~(6.1.14)不具式(6.1.3)形式周期解的存在性与非存在性。

由式(6.1.10)、(6.1.14)可知

$$K_r=\frac{2\Omega\varepsilon c_0}{c_0^2+\varepsilon^2c_1^2}\left[(c_1-\omega)+\rho^2\left(c_2-\frac{c_1}{2}\right)+\rho^4\left(c_3-\frac{c_1}{2}\right)\right] \tag{6.1.32}$$

$$\Omega_r=\rho_2\frac{\varepsilon c_0}{c_0^2+\varepsilon^2c_1^2}\left[(c_1-\omega)+\rho^2\left(c_2-\frac{c_1}{2}\right)+\rho^4\left(c_3-\frac{c_1}{2}\right)\right] \tag{6.1.33}$$

未扰动方程组的积分K,Ω(见式(6.1.10)、(6.1.11))为扰动方程组的慢变元：$K_r,\Omega_r=O(\varepsilon)$。我们可用在 E 的 $O(\varepsilon)$邻域 E_ε 上定义的 Poincare 映照 P 来描述扰动方程组(6.1.12)~(6.1.14)的有

界解的动力学行为。设$(K_0,\Omega_0)\in E_\varepsilon$，考虑$\Gamma_\varepsilon(x)$为式(6.1.12)～(6.1.14)具初值$v(0)=0,\Omega(0)=\Omega_0,\rho(0)$使得$K(0)=K_0$的解。设$(\overline{\rho},0,\overline{\Omega})$为$\Gamma_\varepsilon(x)$和$v=0$平面$(\frac{dv}{dt}<0)$的第二个交点，则有

$$p(K_0,\Omega_0)=(\overline{K}(\overline{\rho},0,\overline{\Omega}),\overline{\Omega})=(\overline{\rho}^2-\frac{\overline{\Omega}^2}{\overline{\rho}^2}-\frac{1}{4}\overline{\rho}^4-\frac{1}{6}\overline{\rho}^6,\overline{\Omega})$$

定义$\Delta K(K_0,\Omega_0)$和$\Delta\Omega(K_0,\Omega_0)$为

$$p(K_0,\Omega_0)=(\overline{K},\overline{\Omega})=(K_0+\Delta K(K_0,\Omega_0),\Omega_0+\Delta\Omega(K_0,\Omega_0))$$

表达式$\Delta K,\Delta\Omega$能计算到$O(\varepsilon)$

$$\Delta K(K_0,\Omega_0)=\int_0^{X_\varepsilon(K_0,\Omega_0)}K_x(\Gamma_\varepsilon(x))\mathrm{d}x$$

$$\Delta\Omega(K_0,\Omega_0)=\int_0^{X_\varepsilon(K_0,\Omega_0)}\Omega_x(\Gamma_\varepsilon(x))\mathrm{d}x$$

其中$X_\varepsilon(K_0,\Omega_0)$为$\Gamma_\varepsilon$通过的时间（"时间$=x$"）。事实上，

$$\Delta K=\int_0^{X(K_0,\Omega_0)}\frac{2\Omega_\varepsilon}{c_0}(\rho^2-\rho_*^2)\left[(c_2-\frac{c_1}{2})+(c_3-\frac{c_1}{2})(\rho^2+\rho_*^2)\right]\mathrm{d}x+O(\varepsilon^2)$$

在Ω_0平面上，轨线$(\rho_0(x),v_0(x))$为K积分式(6.1.10)、(6.1.11)所确定，它和ρ轴$(v=\rho_x)$相交于两点$0<\rho_1(K_0,\Omega_0)<\rho_2(K_0,\Omega_0)$（见图6.3(a)），因此，令$\rho^2=R,\rho_1^2=R_1,\rho_2^2=R_2$可得

$$\Delta K=-\frac{\Omega_0\varepsilon}{c_0}\int_{R_1(K_0,\Omega_0)}^{R_2(K_0,\Omega_0)}\times\frac{(\rho_*^2-R)\left[(c_2-\frac{c_1}{2})+(c_3-\frac{c_1}{2})(R+\rho_*^2)\right]}{\sqrt{K_0R-R^2-\Omega_0^2+\frac{1}{4}R^3+\frac{1}{6}R^4}}\mathrm{d}R+O(\varepsilon^2)\tag{6.1.34}$$

当$\rho_2(x)<\rho_*^2$时，$\Delta K<0$，类似可得

$$\Delta\Omega = -\frac{\varepsilon}{c_0}\int_{R_1(K_0,\Omega_0)}^{R_2(K_0,\Omega_0)} \cdot$$

$$\frac{(\rho_*^2 - R)\left[(c_2 - \frac{c_1}{2}) + (c_3 - \frac{c_1}{2})(R + \rho_*^2)\right]}{\sqrt{K_0 R - R^2 - \Omega_0^2 + \frac{1}{4}R^3 + \frac{1}{6}R^4}} \mathrm{d}R + O(\varepsilon^2)$$

(6.1.35)

当 $\rho^2(x) < \rho_*^2$ 时，$\Delta\Omega < 0$。因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\Omega^2 - \rho_*^2 K) = \frac{2\Omega\varepsilon c_0}{c_0^2 + \varepsilon^2 c_1^2}(\rho^2 - \rho_*^2)^2 (c_3 - \frac{c_1}{2})$$

为方便计，设 $a = c_3 - \frac{c_1}{2} > 0$，则

$$2\Omega\Delta\Omega - \rho_*^2 \Delta K > 0, (\Omega\varepsilon c_0 > 0) \qquad (6.1.36)$$

由式(6.1.36)可知对 $\Omega_0 \neq 0$，$\Delta\Omega = \Delta K = 0$ 是不可能的，因此 Poincare 映照对 $\Omega \neq 0$ 不具有不动点。

定理 6.1.5 对 $\Omega \neq 0$，$\varepsilon \neq 0$ 扰动方程组(6.1.12)～(6.1.14)的一切周期解是坍塌的，由于扰动方程(6.1.1)的一切拟周期解破裂。

对于 $\Omega = 0$ 存在 K_0，使得 $\Delta K(K_0, 0) = \Delta\Omega(K_0, 0) = 0$，因此

定理 6.1.6 存在具小复系数的 Ginzburg-Landau 方程不同于形式 $R\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$ 的对时间慢周期和对空间的周期解。

现讨论异宿轨道，方程组(6.1.12)～(6.1.14)对某些特殊值具有异宿轨道。从平衡点$(\pm\sqrt{p_j}, 0, \Omega_j)$的二维不稳定流形 Γ_u^+，定义为

$$\Gamma_u^+ = \{(K_i^+, \Omega_i^+)\}_{i \in I}, I = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

其中$(K_1^+, \Omega_1^+) \in E_*$ 为 Γ_u^+ 和 $v = 0$ 平面的第一个交点$(v_x < 0)$，$(K_{i+1}^+, \Omega_{i+1}^+) = p(K_i^+, \Omega_i^+)$。类似可定义 γ_s^+，它是 E_* 中的点集，和 Γ_u^+ 对称(关于 K 轴)。Γ_s^- 对应于$(\mp\sqrt{p_j}, 0, \pm\Omega_j)$或$(\pm\sqrt{p_j}, 0,$

于 Ω_j)的一维稳定流形。选取系数 $c_0,c_1,c_2,c_3,\varepsilon$ 和 ω,使得 $\Gamma_u^+ = \Gamma_s$ 。由引理 6.1.4 的对称性,类似于文献[205]的证明,由 Poincare 映照,可得

定理 6.1.7 对任何 ε 充分小,至少存在系数 c_0,c_1,c_2,c_3 依赖于 $j(j=1,2)$,使得方程组(6.1.12)~(6.1.14)具有异宿轨道相连($\sqrt{p_j}$,0,Ω_j)和($\sqrt{p_j}$,0,$-\Omega_j$),以及($-\sqrt{p_j}$,0,Ω_j)和($-\sqrt{p_j}$,0,$-\Omega_j$)相连,如图 6.8。

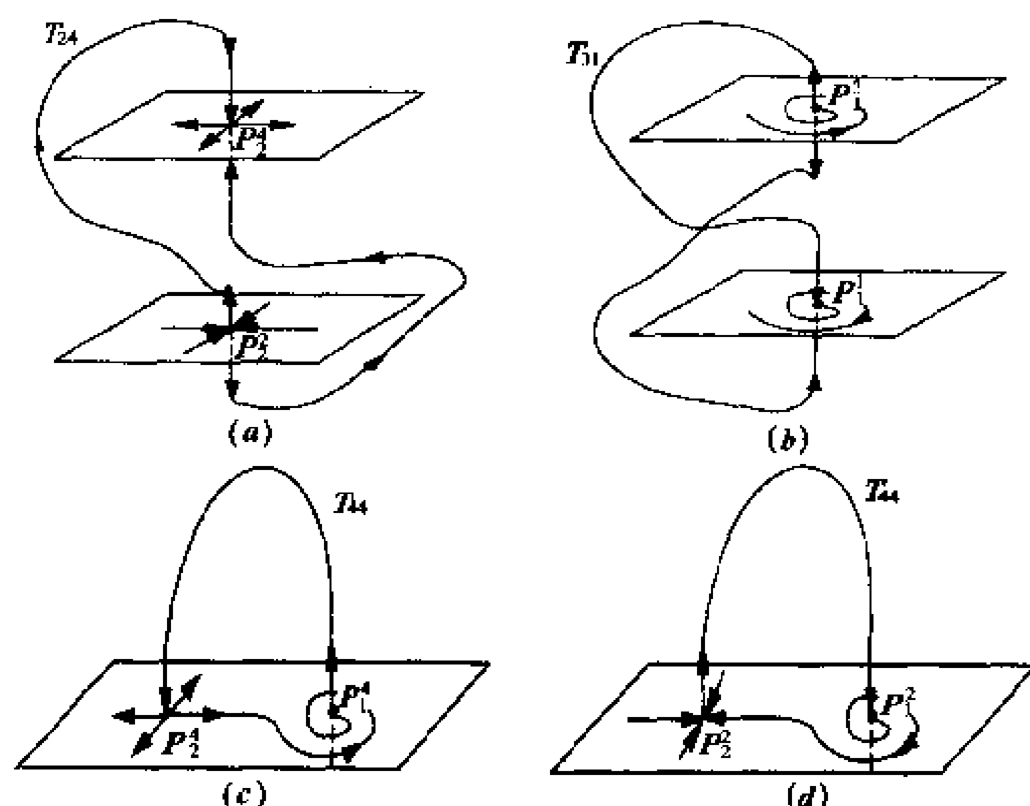


图 6.8 异宿轨道的几何图形

附注 1: 可能存在某异宿轨道或同宿轨道,如图 6.8,图 6.9 所示。

附注 2: 存在双脉冲同宿轨道如图 6.10 所示。

附注 3: 由数值计算存在双同宿轨道,如图 6.15 所示。

在图 6.11 中,我们画异宿轨道,$c_0=1,c_1=4.5,c_2=2,c_3=3$,

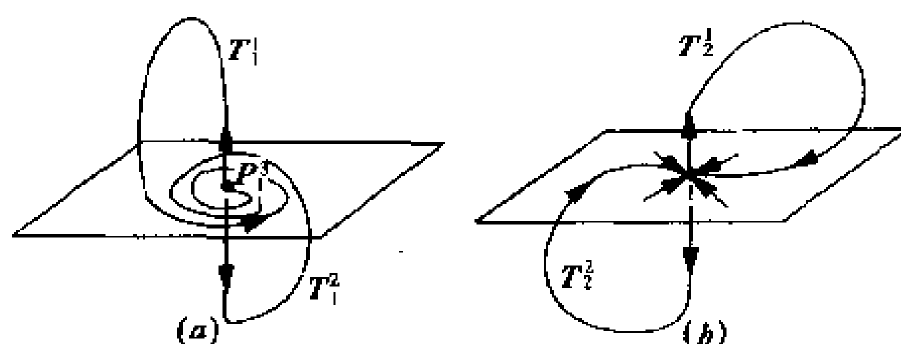


图 6.9　同宿轨道的对称性

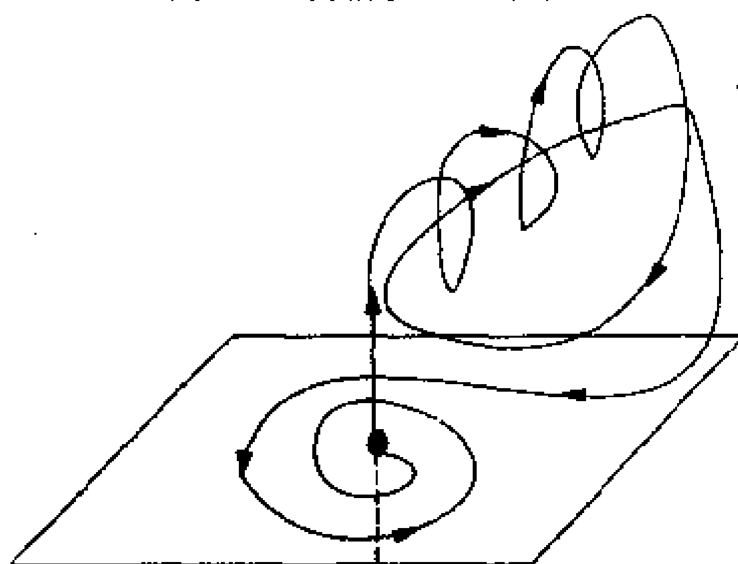


图 6.10　同宿轨道的双脉冲

$\epsilon=0.002,\Omega=c_1-\dfrac{2(c_3+c_2-c_1)(c_2-\frac{c_1}{2})(c_3-\frac{c_2}{2}-\frac{c_1}{4})}{(c_3-\frac{c_1}{2})(c_3-2c_2+\frac{c_1}{2})}$。此时取初值 $\rho=\dfrac{\sqrt{-b+\sqrt{b^2-4ac}}}{2a}+\epsilon,c=c_1-\omega,b=c_2-0.5c_1,a=c_3-0.5c_1,v=0,\Omega=((-0.5\rho-0.5)\rho+1)\rho^2$。从图 6.11 可看到异宿轨道从一个平衡点(0.73107084,0,0.58700412)到另一个平衡点(0.73107084,0,−0.58700412)。首先,轨线钟形旋转,当 $\rho\to 0$ 时 v 变成很尖,轨道再反钟形旋转,最后和另一个平衡点相连。在图 6.12 中,作图 6.11 中的异宿轨道在 $\Omega=0$ 上的投影。在图 6.13

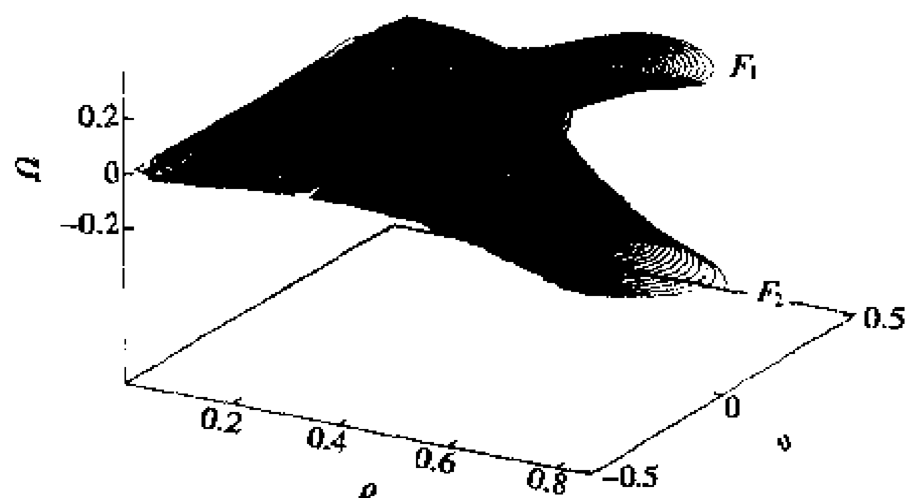


图 6.11 异宿轨道

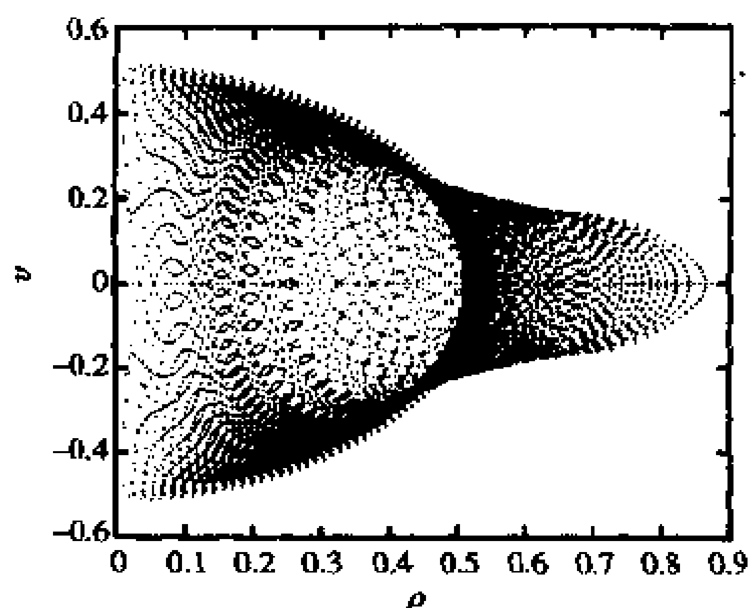


图 6.12 异宿轨道在 $\Omega=0$ 上的投影

中，在 $v=0$ 给出 Poincare 截断。在图 6.11 中，异宿轨道 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}<0$。

对于三次—五次 Ginzburg-Landau 方程(6.1.1)，我们数值模拟采用拟谱方法和 FFT(快速傅氏变换)。数值结果表明，如 $\varepsilon\neq0$，则式(6.1.1)的解不是周期的(图 6.14)。在图 6.14 中，采用相平面 $(|W(x_0,t)|,|W(x_0,t)|_t)$，$x_0=\frac{\pi}{q}$，$q=1.0931$，取初值 $W(x,0)$

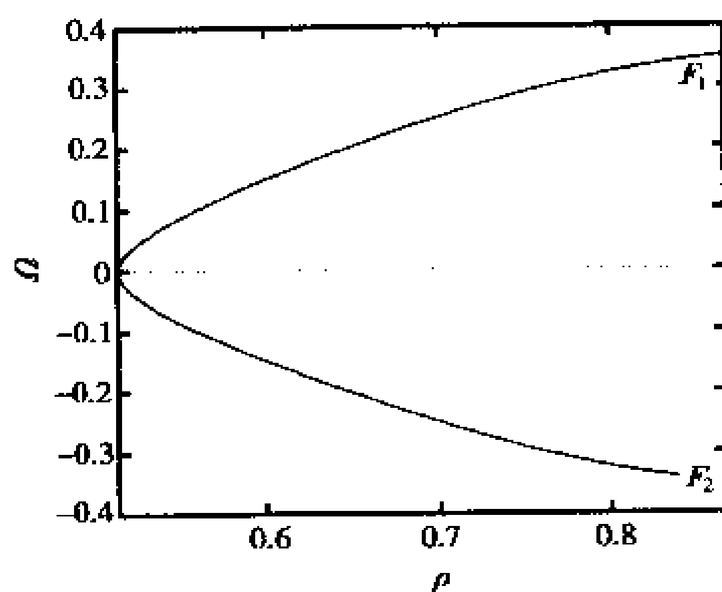


图 6.13　异宿轨道在 $v=0, \frac{dv}{dt}<0$ 平面上的 Poincaré 截面

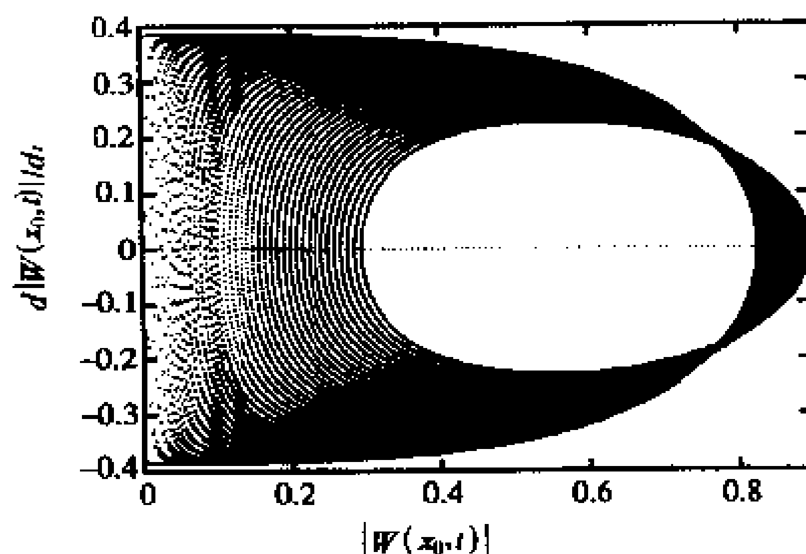


图 6.14　在相平面$(|W(x_0,t)|, |W(x_0,t)|_t)$上 $W(x,t)$的流($\varepsilon=0.025$)

$=1+0.02\exp(\mathrm{i}\frac{\pi}{4})\cos(qx)$，$\varepsilon=0.0025$，在图 6.15 中，给出 $\varepsilon=0$ 的流图象。

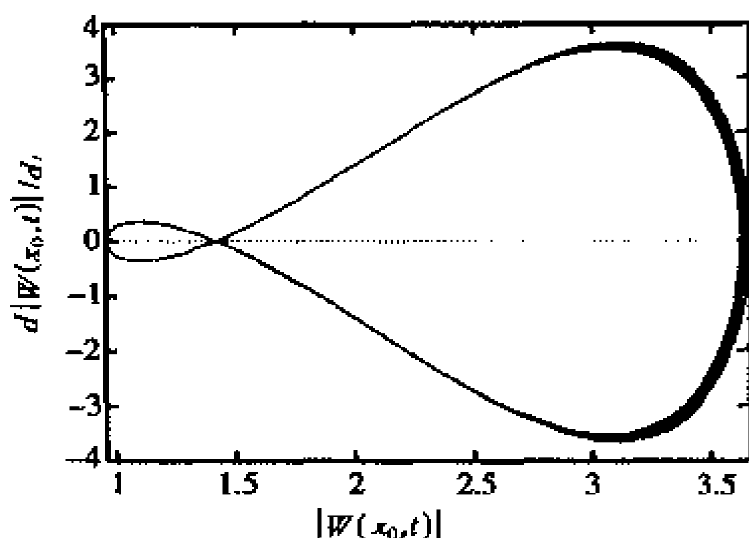


图 6.15 在相平面$(|W(x_0,t)|,|W(x_0,t)|_t)$上 $W(x,t)$的流($\varepsilon=0$)

6.2 具导数项 Ginzburg-Landau 方程

考虑如下具导数项 Ginzburg-Landau 方程

$$u_\tau + \tilde{\nu} u_x = (\tilde{\mu} + \mathrm{i}\,\tilde{\sigma})u + (1 + \mathrm{i}\,\tilde{\beta})\, u_{xx} +$$
$$(\tilde{\eta} + \mathrm{i}\,\tilde{\delta})|u|^2 u + (\tilde{\xi} + \mathrm{i}\,\tilde{\gamma})|u|^4 u -$$
$$(\tilde{\alpha} + \mathrm{i}\,\tilde{q})|u|^2 u_x - (\tilde{m} + \mathrm{i}\,\tilde{n})u^2 u_x \tag{6.2.1}$$

其中:$(x,\tau)\in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^+$;$u(x,t)$为复值示知函数;$\tilde{\nu},\tilde{\mu},\tilde{\sigma},\tilde{\beta},\tilde{\eta},\tilde{\delta},\tilde{\xi}$,$\tilde{\gamma},\tilde{\alpha},\tilde{q},\tilde{m},\tilde{n}$均为实常数;$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$。现考虑式(6.2.1)的行波解结构。令$z=x-\varepsilon c\tau$,其中$0<\varepsilon\ll 1$。令$\tilde{\nu}=\varepsilon\nu,\tilde{\mu}=1,\tilde{\eta}=-\dfrac{1}{2},\tilde{\beta}=\varepsilon\beta$,$\tilde{\sigma}=\varepsilon\sigma,\tilde{\delta}=\varepsilon\delta,\tilde{\xi}=-\dfrac{1}{2},\tilde{\gamma}=\varepsilon\gamma,\tilde{\alpha}=\varepsilon\alpha,\tilde{q}=\varepsilon q,\tilde{m}=\varepsilon m,\tilde{n}=\varepsilon n$。在$(z,\tau)$平面上,式(6.2.1)变为

$$u_\tau = \varepsilon(c-\nu)u_z + (1+\mathrm{i}\varepsilon\beta)u_{zz} + (1+\mathrm{i}\varepsilon\sigma)u +$$
$$\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\varepsilon\delta\right)|u|^2 u + \left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\varepsilon\gamma\right)|u|^4 u -$$

$$\epsilon(\alpha + \mathrm{i}q)|u|^2 u_z - \epsilon(m + \mathrm{i}n)u^2 \bar{u}_z \tag{6.2.2}$$

为方便计，引入极坐标形式，令

$$u(z,\tau) = r(z,\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(z,\tau)} \tag{6.2.3}$$

和

$$t = \epsilon^2\tau, z = \epsilon Z, \theta = \epsilon Q \tag{6.2.4}$$

则由式(6.2.2)可得

$$\begin{cases} \epsilon^2 r_t = \epsilon^2 r_{ZZ} + \epsilon^2 \beta r Q_{ZZ} + \epsilon^2(c + 2\beta Q_Z - \nu)r_Z + \\ r(1 - \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}r^4 - Q_Z^2) - \epsilon^2(\alpha + m)r^2 r_Z - \\ r^3\epsilon(q - n)Q_Z & (6.2.5) \\ Q_t = Q_{ZZ} - \epsilon^2\beta\frac{r_{ZZ}}{r} + 2\frac{r_Z Q_Z}{r} + \\ (c + \beta Q_Z - \nu)Q_Z - (\sigma + \delta r^2 + \gamma r^4) - \\ (\alpha - m)r^2 Q_Z + \epsilon(q + m)r r_Z & (6.2.6) \end{cases}$$

设 $r_Z, r_{ZZ}, r_t, Q_Z, Q_{ZZ}$ 为 $O(1)$，对于 $\forall\ (x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^t$，$\epsilon > 0$。上式令 $\epsilon \to 0$，得

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}r^4 - Q_z^2 = 0 \\ Q_t = Q_{ZZ} + 2\frac{r_Z Q_Z}{r} + (c + \beta Q_Z - \nu)Q_Z \\ - (\sigma + \delta r^2 + \gamma r^4) - (\alpha - m)r^2 Q_Z \end{cases} \tag{6.2.7}$$

从式(6.2.7)的第一个方程解出 r^2 再代入第二个方程，可以得到仅含 Q 的二阶抛物型方程。为方便计，在式(6.2.5)、(6.2.6)中令 $\beta = 0$，并且仍记 Z 为 z，Q 为 θ，则有

$$\begin{cases} \epsilon^2 r_t = \epsilon^2 r_{zz} + \epsilon^2(c - \nu - (\alpha + m)r^2)r_z + \\ \qquad r(1 - \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}r^4 - \theta_z^2) - r^3\epsilon(q - n)\theta_z \\ \theta_t = \theta_{zz} + (c - \nu - (\alpha - m)r^2 + 2\frac{\gamma_z}{r})\theta_z - \\ \qquad (\sigma + \delta r^2 + \gamma r^4) + \epsilon(q + n)r r_z \end{cases} \tag{6.2.8}$$

我们寻求式(6.2.8)的定常解。$0<\varepsilon\ll 1$。因为这是一个具奇性的方程组,存在两种不同的尺度,慢方程组为

$$\begin{cases} \varepsilon r' = s \\ \varepsilon s' = -\varepsilon(c-\nu-(\alpha+m)r^2)s - \\ \qquad r(1-\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4-\phi^2)+\varepsilon r^3(q-n)\phi \\ \theta' = \phi \\ \phi = -(c-\nu-(\alpha-m)r^2+2\frac{s}{\varepsilon r})\phi + \\ \qquad (\sigma+\delta r^2+\gamma r^4)-\varepsilon(q+n)rs \end{cases} \tag{6.2.9}$$

其中“$'$”$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$。在变元变换 $z=\varepsilon\xi$ 下,快方程组为

$$\begin{cases} \dot{r} = s \\ \dot{s} = -\varepsilon(c-\nu-(\alpha+m)r^2)s - \\ \qquad r(1-\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4-\phi^2)+\varepsilon r^3(q-n)\phi \\ \dot{\theta} = \varepsilon\phi \\ \dot{\phi} = -\varepsilon(c-\nu-(\alpha-m)r^2+2\frac{s}{\varepsilon r})\phi + \\ \qquad \varepsilon(\sigma+\delta r^2+\gamma r^4)-\varepsilon(q+n)rs \end{cases} \tag{6.2.10}$$

其中“$\cdot$”$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}$。当 $\varepsilon=0$ 时,存在不变流形

$$M_c = \{(r,s,\theta,\phi): r^2+r^4+2\phi^2=2, s=0, \theta\in\mathbf{R}\} \tag{6.2.11}$$

在这个流形上线性化式(6.2.10),当 $r^2>\frac{\sqrt{73}-2}{8}$ 时,或 $\phi^2<$

$\frac{35-\sqrt{73}}{64}$时，M_0 是法向双曲的，由文献[207]可知存在式(6.2.9)的不变流形 M_ϵ 它以阶 $O(\epsilon)$ 逼近 M_0。流形 M_ϵ 作为如下集：

$$M_\epsilon=\{(r,s,\theta,\phi):r=M^r(\phi,\epsilon),s=M^s(\phi,\epsilon),$$

$$\theta\in\mathbf{R},\phi^2<\frac{35-\sqrt{73}}{64}\}\tag{6.2.12}$$

其中：$M^r(\phi,0)=\sqrt{\frac{\sqrt{9-8\phi^2}-1}{2}}$；$N^s(\phi,0)=0$。注意到在式(6.2.10)中，$\theta$ 可以不和其它方程耦合，因此式(6.2.10)实际上为 (r,s,ϕ) 的方程组。而 θ 作为辅助方程和它耦合，容易验证，式(6.2.9)的最后一个方程可写为

$$(r^2\phi)'=r^2[(\nu+(\alpha-m)r^2-c)\phi+(\sigma+\delta r^2+\gamma r^4)-$$

$$\frac{\epsilon}{2}(r^2)'(q+n)]\tag{6.2.13}$$

由 $r=M^r$ 在 M_ϵ 上的表示，上述整个不变流形可以写为

$$\begin{cases}\theta'=\phi\\ \phi'=\dfrac{9-8\phi^2-\sqrt{9-8\phi^2}}{9-16\phi^2-\sqrt{9-8\phi^2}}g(\phi)+O(\epsilon)\end{cases}\tag{6.2.14}$$

其中

$$g(\phi)=A+B\phi+C\sqrt{9-8\phi^2}+D\phi\sqrt{9-8\phi^2}+E\phi^2$$

$$A=\sigma-\frac{\delta}{2}-\frac{5}{2}\gamma,B=\nu-c-\frac{\alpha-m}{2}$$

$$C=\frac{\delta-\gamma}{2},D=\frac{\alpha-m}{2},E=-2\gamma$$

当 $\epsilon=0$ 时，设式(6.2.14)可通过选择参数，具有两个临界点 $\phi_\pm$，连接这两个临界点的轨线记为 $\tilde{\phi}(z)$，$\lim\limits_{z\to\pm\infty}\tilde{\phi}(z)=\phi_\pm$。因临界点对式(6.2.14)($\epsilon=0$)是双曲的，当 $\epsilon\neq0$ 时，它们的扰动是光滑的(实际上与 ϵ 无关)，因此在流形 M_ϵ 上具有轨线

$$\tilde{r}(z)=\sqrt{\frac{\sqrt{9-8\tilde{\phi}(z)^2}-1}{2}}+O(\varepsilon)$$

$$\tilde{\theta}(z)=\int_0^z\tilde{\phi}(s)\mathrm{d}s$$

定理 6.2.1 存在 $\varepsilon_0>0$，使得如果 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$，则存在参数空间的一个区域，使得式(6.2.9)的异宿轨线在 M_ε 上存在，这条轨线连结式(6.2.8)的两个不同的稳定平面波解。

现考察奇性轨线的稳定性，令

$$r(z)=\rho(z),\theta(z)=\int_0^z\phi(s)\mathrm{d}s \tag{6.2.15}$$

其中 $\lim\limits_{z\to\pm\infty}\phi(z)=\phi_\pm$。考虑波的扰动

$$r(z,t)=\rho(z)+R(z,t),\theta(z,t)=\int_0^z\phi(s)\mathrm{d}s+\Theta(z,t) \tag{6.2.16}$$

保持 R 和 θ 的线性项可得

$$\begin{cases}R_t=R_{zz}+[c-\nu-(\alpha+m)\rho^2]R_z-[\dfrac{2\rho\phi}{\varepsilon^2}+\dfrac{\rho^3}{\varepsilon}(q-n)]\times\\ \qquad\theta_z-\dfrac{1}{\varepsilon^2}[1-\dfrac{3}{2}\rho^2-\dfrac{5}{2}\rho^4-\\ \qquad\phi^2-2\varepsilon^2(\alpha+m)\rho\rho_z-3\varepsilon\rho^2(q-n)\phi]R,\\ \Theta_t=\Theta_{zz}+[c-\nu-(\alpha-m)\rho^2+2\dfrac{\rho_z}{\rho}]\Theta_z+\\ \qquad[2\dfrac{\phi}{\rho}+\varepsilon(q+n)\rho]R_z+\\ \qquad[c(q+n)\rho_z-2(\alpha-m)\phi\rho-2\dfrac{\rho_z}{\rho}\phi-2\delta\rho-4\gamma\rho^3]R\end{cases} \tag{6.2.17}$$

令 $R(z,t)=R(z)\mathrm{e}^{\lambda t},\Theta(z,t)=\Theta(z)\mathrm{e}^{\lambda t}$，代入式(6.2.17)可得特征值问题

$$
\begin{cases}
\epsilon^2 R'' + \epsilon^2[c - \nu - (\alpha + m)\rho^2]R' - [\frac{2\rho\phi}{\epsilon^2} + \rho^3\epsilon(q - n)]\\
\Theta' + [1 - \frac{3}{2}\rho^2 - \frac{5}{2}\rho^4 - \phi^2 - 2\epsilon^2(\alpha + m)\rho\rho_z - \\
3\epsilon\rho^2(q - n)\phi]R = \epsilon^2\lambda R, \\
\Theta'' + [c - \nu - (\alpha - m)\rho^2 + 2\frac{\rho_z}{\rho}]\Theta' + [2\frac{\phi}{\rho} + \epsilon(q + n)\rho] \\
R' + [\epsilon(q + n)\rho_z - 2(\alpha - m)\phi\rho - 2\frac{\rho_z}{\rho}\phi - 2\delta\rho - \\
4\gamma\rho^3]R = \lambda\Theta
\end{cases}
\tag{6.2.18}
$$

其中“$'$”$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$，$\lambda\in\mathbf{C}$ 为特征值。如果对任何具有正的实部的 $\lambda\in\mathbf{C}$，存在式(6.2.18)的非平凡解$(R(z),\Theta(z))$，则齐性轨道是不稳定的，如同方程组(6.2.9)、(6.2.10)、(6.2.18)具有快—慢结构方程组。有

慢方程组为

$$
\begin{cases}
\epsilon R' = s \\
\epsilon s' = -\epsilon[c - \nu - (\alpha + m)\rho^2]s + [\frac{2\rho\phi}{\epsilon^2} + \rho^3\epsilon(q - n)]\Phi - \\
\qquad [1 - \frac{3}{2}\rho^2 - \frac{5}{2}\rho^4 - \phi^2 - 2\epsilon^2(\alpha - m)\rho\rho_z - \\
\qquad 3\epsilon\rho^2(q - n)\phi - \epsilon^2\lambda]R \\
\Theta' = \Phi \\
\Phi' = -[c - \nu - (\alpha - m)\rho^2 + 2\frac{\rho_z}{\rho}]\Phi - \\
\qquad [2\frac{\phi}{\rho} + \epsilon(q + n)\rho]\frac{s'}{\epsilon} - \\
\qquad [\epsilon(q + n)\rho_z - 2(\alpha - m)\phi\rho - 2\frac{\rho_z}{\rho^2}\phi - 2\delta\rho - 4\gamma\rho^3]R + \\
\qquad \lambda\Theta \\
\tau' = k(1 - \tau^2)
\end{cases}
\tag{6.2.19}
$$

其中变元 τ 由如下关系定义

$$z=\frac{1}{2k}\ln\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right) \tag{6.2.20}$$

其中 $k>0$ 为充分小，因此方程组(6.2.19)在 $\mathbf{C}^4\times[-1,1]$上有解 $(R,s,\Theta,\tau)\in\mathbf{C}^1$（见文献[170]中引理 3.1）。注意到 $\tau\to\pm1$。当且仅当 $z\to\pm\infty$，由于引进 τ 的方程，使方程组(6.2.19)为自恰的。利用变元变换 $z=\varepsilon\xi$，则

快方程组为

$$\begin{cases}\dot{R}=s\\ \dot{s}=-\varepsilon[c-\nu-(\alpha-m)\rho^2]s'+[\dfrac{2\rho\phi}{\varepsilon^2}+\rho^3\varepsilon(q-n)]\Phi-\\ \quad[1-\dfrac{3}{2}\rho^2-\dfrac{5}{2}\rho^4-\phi^2-2\varepsilon^2(\alpha+m)\rho\rho_z-\\ \quad 3\varepsilon\rho^2(q-n)\phi-\varepsilon^2\lambda]R\\ \dot{\Theta}=\varepsilon\Phi'\\ \dot{\Phi}=-\varepsilon[c-\nu-(\alpha-m)\rho^2]\Phi+2\dfrac{\dot{\rho}}{\rho^2}\phi R-2\dfrac{\dot{\rho}}{\rho}\Phi-2\dfrac{\phi}{\rho}s-\\ \quad\varepsilon(q+m)\rho s+\varepsilon\lambda\Theta-\\ \quad\varepsilon[(q+n)]\dot{\rho}-2(\alpha-m)\phi\rho-2\delta\rho-4\gamma\rho^3]R\\ \dot{\tau}=\varepsilon k(1-\tau^2)\end{cases}$$

$$\tag{6.2.21}$$

设 Σ 为在复平面上含有右半平面的开集，它的边界为 Γ，$\bar{\Sigma}$表示它的闭包，显然，$\{0\}\subset\sigma_e(L)\cap\bar{\Sigma}$。令 $Y=(R,s,\Theta,\Phi)^T$，则方程组(6.2.19)可写成

$$\begin{cases}Y'=M(\lambda,\tau,\varepsilon)Y\\ \tau'=k(1-\tau^2)\end{cases} \tag{6.2.22}$$

定义渐近矩阵 $M^{\pm}(\lambda,\varepsilon)$为

$$M^{\pm}(\lambda,\varepsilon)=\lim_{\tau\to\pm1}M(\lambda,\tau,\varepsilon) \tag{6.2.23}$$

则给出式(6.2.22)的渐近方程组为

$$\begin{cases} Y' = M^{+}(\lambda,\varepsilon)Y \\ \tau' = 0 \end{cases} \tag{6.2.24}$$

由文献[171]可知，对 $\lambda\in\Sigma$，存在解 $Y_j(\lambda,\tau,\varepsilon)$，$j=1,2,3,4$，使得

$$\begin{cases} \lim\limits_{z\to-\infty} Y_j(\lambda,z,\varepsilon) = 0, j = 1,2 \\ \lim\limits_{z\to+\infty} Y_j(\lambda,z,\varepsilon) = 0, j = 2,3 \end{cases} \tag{6.2.25}$$

集合 $\{Y_1,Y_2\}$ 和 $\{Y_3,Y_4\}$ 是线性无关的，这是因为 $\lambda\in\Sigma$，矩阵 $M^{\mp}(\lambda,\varepsilon)$ 具有两个正实部的特征值和两个具有负实部的特征值。对 $\lambda\in\Sigma$，Evans 函数给定为

$$D(\lambda,\varepsilon) = e^{-\int_0^z \mathrm{tr} M(\lambda,s,\varepsilon)ds}|Y_1\cdots Y_4|(\lambda,z,\varepsilon)$$

其中 $|\cdot|$ 表示 4×4 矩阵的行列式。

引理 6.2.1 对每个固定 ε 和 $\lambda\in\Sigma$，

$D(\lambda,\varepsilon)$ 关于 λ 是解析的。

$D(\lambda,\varepsilon)=0$ 当且仅当 λ 是一个特征值

证明 见文献[171]。

引理 6.2.2 对 $\lambda\in\Sigma$，$D(\lambda,\varepsilon)=0$ 推出存在 L 的一个特征函数，当 $|z|\to\infty$ 时它指数衰减于零。其中算子 L 为式(6.2.17)的缩写形式

$$\begin{pmatrix} R \\ \Theta \end{pmatrix}_t = L\begin{pmatrix} R \\ \Theta \end{pmatrix}$$

实际上，在限制于方程组(6.2.9)中，波由二维不变流形 M_ε 所构造。这个流形是正规双曲的，具有一个一维不稳定流形和一个一维稳定流形。在 M_ε 上，波实际上是一维不稳定流形和一维稳定流形的交集。在四维相空间中，波为二维不稳定流形和二维稳定流

形的交集。由文献[170]有

引理 6.2.3 对每个 $\varepsilon>0$，Evans 函数 $D(\lambda,\varepsilon)$ 在 $\lambda=0$ 是解析的。

附注： 当 $\varepsilon=0$，$D(\lambda,0)$ 在 $\lambda=0$ 处是不解析的，这是由于波是一个奇性解。

引理 6.2.4 存在 $\varepsilon_0>0$，使得如果 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$，则 $E(0,\varepsilon)\neq 0$。

对任何简单闭曲线 $K\subset\Omega$，在 K 上没有特征值，一个在 S^2 上的 k 维复丛称之为与 K 相关的增广的不稳定丛 $\varepsilon(K)$。令人关心的一个拓扑不变量就是在 S^2 上从 $\varepsilon(K)$ 的第一陈数。对在 S^2 上任何复丛 E，令 $c_1[E]\in H^2(S^2;\mathbf{Z})$ 表示 E 的第一陈类。在 E 中的第一陈数为

$$c_1(E)=\langle c_1[E],[S^2]\rangle\in\mathbf{Z}$$

我们知道，在 Ω 上的 Evans 函数 $D(\lambda)$，它的零点精确等于 L 在 Ω 内的特征值个数（包括重数）。K 为 Ω 中一条简单闭曲线。考虑在 $\mathbf{C}$ 中曲线 $D(K)$，如果在 K 上没有 L 的特征值，则 $D(K)\subset\mathbf{C}\backslash\{0\}$，旋转数 $W(D(K))$ 和第一陈数以及 L 在 K 内的特征值个数有如下关系：

定理 6.2.2[171] 以下三个数是相等的：

(1)$W(D(K))$，(2)$C_1(\varepsilon(K))$，(3)L 在 K 内的特征值个数（包括代数重数）。

令 $\varepsilon>0$，Evans 函数在原点是解析的，则存在 $\beta_0(\varepsilon)>0$，其中 $\varepsilon\to0$，$\beta_0(\varepsilon)\to0$，使得 $D(\lambda,\varepsilon)$ 在区域 $\Sigma_\varepsilon=\Sigma\cup B(0,\beta_0(\varepsilon))$ 上是解析的。令 $U^{\pm}(\lambda)$ 分别表示 $M^{\pm}(\lambda,\varepsilon)$ 的二维不稳定子空间，从这些子空间出发在 S^2 上的复二维丛和增广不稳定丛，将在一条给定的简单闭曲线 $K\subset\Sigma_\varepsilon$ 上被构造出来。

Grassmann$G_k(\mathbf{C}^4)$ 为 $\mathbf{C}^4$ 中的一个 k 维子空间的集合，线性方程(6.2.22)归结为在 $G_k(\mathbf{C}^4)\times[-1,1]$ 上的一个方程。如果方程使得 $\tau'=0$，则每一个 k 维子空间对每个 τ 将变成 $G_k(\mathbf{C}^4)$ 中的一个不动点。存在丛和 Grassmann 之间的一个紧密联系。设 ε 为在 S^2 上的一个 k 丛，它是 $S^2\times\mathbf{C}^4$ 中的一个子丛，则存在自然映照 $F:S^2$

$\to G_k(\mathbf{C}^4)$，它将每一点映到纤维上。丛 ϵ 是在 $G_k(\mathbf{C}^4)$ 上标准丛的拉回。存在 k 丛的同构类和这些映照的同伦类之间的一对一的对应。显然，如果一个分类映照同伦于一个常数，即丛是平凡的，则丛的第一陈数为零。对固定 $\lambda\in\Sigma_\epsilon$，$\tau\in(-1,+1)$ 的二丛 $U^*(\lambda,\tau)$ 能被构造出来，它实际上为式(6.2.22)的在 $(y,\tau)=(0,-1)$ 的不稳定流形。如文献[171]中所指出，如 λ 不是一个特征值，则丛能延拓到 $\tau=\pm1$，形成过 $\tau=\pm1$ 的纤维，记为 $U^\pm(\lambda)$。设 $K\subset\Sigma_\epsilon$ 为一曲线，同胚于不含 L 特征值的 S^1，令 K_0 为 K 的有界区域，则在集合

$$K_0\times\{-1\}\cup K\times[-1,+1]\cup K_0\times\{+1\} \tag{6.2.26}$$

上构造了一个丛。集合式(6.2.26)在拓扑上等同于 S^2。如图 6.16 所示。

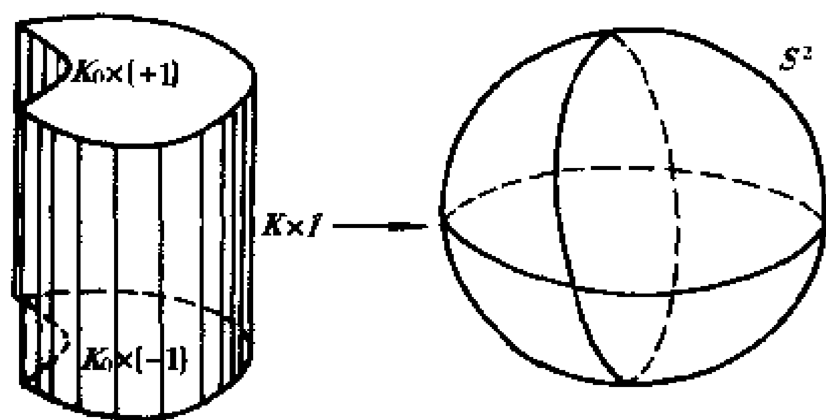


图 6.16

增广不稳定丛 $\epsilon(K)$ 具有如下纤维

$$\begin{cases} U^\pm(\lambda), & \tau=\pm1, \\ U^*(\lambda,\tau), & \tau\in(-1,+1) \end{cases}$$

以下我们证明存在 $\lambda_0>0$，使得如果 $|\lambda|>\lambda_0$，则 λ 不是式

(6.2.18)的特征值，令

$$\Psi(z)=\frac{\rho'(z)}{\rho(z)}$$

对式(6.2.19)，$\epsilon\neq 0$，引入尺度变换

$$y=z|\lambda|^{\frac{1}{2}},\tilde{s}=\frac{s}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}},\tilde{\Phi}=\frac{\Phi}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \qquad (6.2.27)$$

则式(6.2.19)变为

$$\begin{cases}
\epsilon R'=\tilde{s},\\
\epsilon\tilde{s}'=-\dfrac{\epsilon}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}[c-\nu-(\alpha+m)\rho^2]\tilde{s}+\\
\qquad\dfrac{\rho}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}\left[\dfrac{2s\phi}{\epsilon^2}+\rho^3\epsilon(q-n)\right]\tilde{\Phi}-\\
\qquad\left\{\dfrac{1}{|\lambda|}\left[1-\dfrac{3}{2}\rho-\dfrac{5}{2}\rho^4-\phi^2-2\epsilon^2(\alpha+m)\rho^2\Psi-\right.\right.\\
\qquad\left.\left.3\epsilon\rho^2(q-n)\phi^2\right]-\epsilon^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg\lambda}\right\}R,\\
\Theta'=\tilde{\Phi},\\
\tilde{\Phi}'=-\dfrac{1}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}[c-\nu-(\alpha-m)\rho^2+z\Psi]\tilde{\Phi}-\\
\qquad\dfrac{1}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}\left[\dfrac{2\phi}{\rho}+\epsilon(q+n)\rho\right]\dfrac{\tilde{s}}{\epsilon}-\\
\qquad\dfrac{1}{|\lambda|}\left[\epsilon(q+n)\rho\Psi-2(\alpha-m)\phi\rho-\dfrac{2\Psi}{\rho}\phi-\right.\\
\qquad\left.2\delta\rho-4\gamma\rho^3\right]R+\epsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg\lambda}\Theta,\\
\tau'=\dfrac{k}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}(1-\tau^2)
\end{cases}$$

$$(6.2.28)$$

其中“$'$”$=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}$。令$|\lambda|\to\infty$得

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon R' &= \tilde{s}, \\ \varepsilon \tilde{s}' &= \varepsilon^2 e^{i\arg\lambda} R, \\ \Theta' &= \tilde{\Phi}, \\ \tilde{\Phi}' &= \varepsilon e^{i\arg\lambda}\Theta, \\ \tau' &= 0 \end{aligned}\right. \tag{6.2.29}$$

取 $\varepsilon=1$，则得方程组

$$\left\{\begin{aligned} R' &= \tilde{s}, \\ \tilde{s}' &= e^{i\arg\lambda} R, \\ \Theta' &= \tilde{\Phi}, \\ \tilde{\Phi}' &= e^{i\arg\lambda}\Theta, \\ \tau' &= 0 \end{aligned}\right. \tag{6.2.30}$$

因 $\tau'=0$，上述方程组在每个 τ 片上是不变的，对于 $\tau\in[-1,+1]$，式(6.2.30)右端的特征值为 $\pm e^{i\frac{\arg\lambda}{2}}$。因此当 $|\arg\lambda|<\pi$ 时，存在两个具正实部的特征值，和两个具负实部的特征值。对每个 τ，由式(6.2.30)所定义的流在 Grassmann $G_\tau(\mathbf{C}^4)$ 上具有一个吸引子，它是一个不稳定的子空间，因此，当 $\tau\in[-1,1]$则在 $G_\tau(\mathbf{C}^4)$上存在一条曲线，它是一个吸引子，于是由文献[170]中命题 2.2 的证明可得

引理 6.2.5 存在 $\lambda_0>0$，使得如 $|\lambda|>\lambda_0$，则 λ 不是方程组(6.2.18)的一个特征值，且 λ_0 不依赖于 ε。

现考虑快又稳定丛 $\varepsilon_f(K)$和慢不稳定丛 $\varepsilon_s(K)$的构造。由式(6.2.19)的快慢结构，二维丛 $\epsilon(K)$能分解为两个一维丛：$\varepsilon_f(K)$和 $\varepsilon_s(K)$的直接和。首先，可构造 $\varepsilon_f(K)$，当 $\varepsilon=0$ 时，有 $\dot{\rho}=0$，$\rho^2+\rho^4+2\phi^2=2$，其中 $\cdot=\frac{d}{d\xi}$。置 $\varepsilon=0$ 于式(6.2.21)，则有

$$
\begin{cases}
\dot{R} &= s, \\
\dot{s} &= (4-\rho^2-4\phi^2)R+2\phi\rho s, \\
\dot{\Phi} &= -\dfrac{2\phi}{\rho}s, \\
\dot{\Theta} &= 0, \\
\dot{\tau} &= 0
\end{cases}
\tag{6.2.31}
$$

则式(6.2.31)右端的特征值为$\pm\sqrt{4-\rho^2-8\phi^2}$和0。令$\zeta(\lambda,\tau)$为式(6.2.31)对$\tau\in[-1,1]$的不稳定特征向量，则得到投影轨线$\zeta\in \mathbf{C}P^3\times[-1,1]$。因这条轨线取快不稳定特征向量，它是在$\mathbf{C}P^3\times[-1,1]$中的一个吸引子。对邻近吸引子给以一个小的$\epsilon$扰动，这条轨线形成了$\varepsilon(K)$的一维子丛$\varepsilon_f(K)$。当$\epsilon=0$时，这个子丛是平凡的，同时对平凡丛以$\epsilon$延续，于是有

引理 6.2.6 存在$\epsilon_1>0$，使得如$0\leqslant\epsilon<\epsilon_1$，则丛$\varepsilon_f(K)$使得$c_1(\varepsilon_f(K))=0$。

现构造慢不稳定丛$\varepsilon_s(R)$，式(6.2.31)具有不变流形M_0^L

$$
M_0^L=\{(R,s,\Theta,\Phi,\tau):s=0,\ R=\frac{2\rho\phi}{4-\rho^2-4\phi^2},\Theta\in\mathbf{R},\tau\in[-1,1]\}
\tag{6.2.32}
$$

由式(6.2.12)可知当$4-\rho^2-4\phi^2>0$时，这个流形是正规双曲的。但因这个条件为波存在的条件，因此它是平凡地满足。类似于文献[170]的证明有

引理 6.2.7 存在$\epsilon_2>0$，使得如$0<\epsilon<\epsilon_2$。则丛$\varepsilon_s(K)$使得$c_1(\varepsilon_s(K))=0$。

于是可得我们的主要结果，整体丛$\varepsilon(K)$作为Whitney和$\tau(K)=\varepsilon_s(K)\oplus\varepsilon_f(K)$，令$\epsilon_3=\min\{\epsilon_0,\epsilon_1,\epsilon_2\}$。因两个向量丛的第一陈数是依子丛可加的，即有

$$
c_1(\varepsilon(K))=c_1(\varepsilon_s(K))+c_1(\varepsilon_f(K))=0
$$

则由文献[171]可得如下线性稳定结果：

定理 6.2.3 如$0<\epsilon<\epsilon_3$，则不存在式(6.2.18)在K_0中的特

征值，其中 K_0 为 K 的有界区域。

非线性稳定结果来自文献[170]中的定理 1.2。设行波为在四维相空间中的二维不稳定流形和二维稳定流形的交，且 Evans 函数在复平面的右闭半平面不为零。则行波解是稳定的，我们有

定理 6.2.4 设参数 $c,\nu,\beta,\sigma,\delta,\gamma,\alpha,q,m,n$ 能选取得使 $p(\phi)=0$，有两个解 $\phi_\pm$，使得 $\phi_\pm^2<\frac{35-\sqrt{73}}{64}$。则存在 $\varepsilon_0>0$，使得如果 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$，则存在式(6.2.8)的行波解，它为 $O(\varepsilon)$ 逼近于 M_0。这个解形如式(6.2.15)，则存在 $0<\varepsilon_1<\varepsilon_0$，使得如 $0<\varepsilon<\varepsilon_1$，行波解是稳定的。

6.3 扰动非线性 Schrödinger 方程

考虑扰动非线性 Schrödinger 方程，即具小耗散的非线性 Schrödinger 同宿轨道的不变性，为此我们要研究正规双曲流形的存在性以及整体可积理论等。

6.3.1 预备性结果

考虑如下的扰动非线性 Schrödinger 方程

$$iq_t = q_{xx} + 2[|q|^2 - \omega^2]q + i\varepsilon[\hat{D}q - 1] \qquad (6.3.1)$$

其中：常数 $\omega\in(\frac{1}{2},1)$；ε 是一个小的正常数；$\hat{D}$ 是在 Sobolev 空间 $H_{e,p}^1$上的有界耗散线性算子，其中 Sobolev 空间 $H_{e,p}^1$：$\{\varphi\in H^1,\varphi$ 为偶的，2π 周期函数$\}$。有众所周知的存在定理：

定理 6.3.1 Cauchy 问题：$\forall q_0\in H_{e,p}^1,\forall t\in(-\infty,\infty)$，存在方程(6.3.1)的唯一解 $q(t,q_0;\varepsilon)$，在 $H_{e,p}^1$中对 t 连续，且 $q|_{t=0}=q_0$；$q(t,q_0,\varepsilon)$光滑地依赖于 q_0 和 ε。

因此流 $F^t(q_0;\varepsilon)=q(t,q_0;\varepsilon)$能作为在 $H_{e,p}^1$上的光滑动力系统。

常数平面 Π_c，

$$\Pi_c := \{q(x,t) : \partial_x q(x,t) \stackrel{\text{def}}{=\!=} 0\}$$

为方程(6.3.1)的不变平面，在 Π_c 上，方程(6.3.1)可写为

$$\mathrm{i}q_t = 2[q\bar{q} - \omega^2]q - \mathrm{i}\varepsilon[\alpha q + 1] \tag{6.3.2}$$

其中已设耗散算子 $\hat{D}$ 在常数平面 Π_c 为

$$\hat{D}q = -\alpha q, \alpha > 0$$

取极坐标，

$$q = \sqrt{I}\exp \mathrm{i}\theta$$

则有

$$\begin{cases} I_t = -2\varepsilon[\alpha I + \sqrt{I}\cos\theta], \\ \theta_t = -2(1-\omega^2) + \dfrac{\alpha}{\sqrt{I}}\sin\theta \end{cases} \tag{6.3.3}$$

当 $\varepsilon=0$ 时，未扰动轨线在 Π_c 上为具不动点的圆 S_ω，$I=\omega^2$。对 $\varepsilon>0$，扰动轨线在 Π_c 上是很不相同的，见图 6.17。

首先，存在三个不动点：O，它是原点的变形；Q，鞍点，圆 S_ω 的变形；P 螺旋线的收缩点，也是圆 S_ω 的变形。可得这些不动点及其增长率如下：

$$\begin{cases} I_0 = \varepsilon^2[\dfrac{1}{4\omega^4}] + O(\varepsilon^4), \\ \theta_0 = -\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon\dfrac{\alpha}{2\omega^2} + O(\varepsilon^2), \\ I_p = \omega^2 + \dfrac{\varepsilon}{2\omega}\sqrt{1-\alpha^2\omega^2} + O(\varepsilon^2), \\ \theta_p = -\arctan\dfrac{\sqrt{1-\alpha^2\omega^2}}{\alpha\omega} + O(\varepsilon), \\ I_q = \omega^2 - \dfrac{\varepsilon}{2\omega}\sqrt{1-\alpha^2\omega^2} + O(\varepsilon^2), \\ \theta_q = \arctan\dfrac{\sqrt{1-\alpha^2\omega^2}}{\alpha\omega} + O(\varepsilon) \end{cases} \tag{6.3.4}$$

$$\begin{cases} \sigma_0 = \pm\mathrm{i} - \varepsilon\alpha + O(\varepsilon^2), \\ \sigma_p = \pm 2\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon\omega}[1-\alpha^2\omega^2]^{\frac{1}{4}} - \varepsilon\alpha + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}), \\ \sigma_q = \pm 2\sqrt{\varepsilon\omega}[1-\alpha^2\omega^2]^{\frac{1}{4}} - \varepsilon\alpha + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) \end{cases} \tag{6.3.5}$$

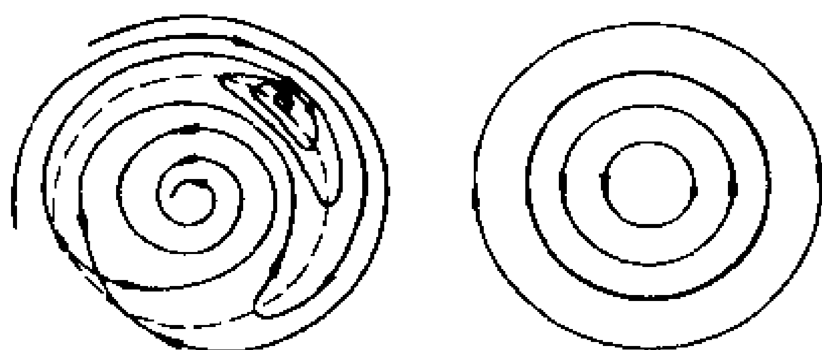


图 6.17 ODE 相位图

引入变元 J，

$$J = I - \omega^2$$

于是式(6.3.3)可写为

$$\begin{cases} J_t = -2\varepsilon[\alpha(J+\omega^2) + \sqrt{J+\omega^2}\cos\theta], \\ \theta_t = -2J + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{J+\omega^2}}\sin\theta \end{cases} \tag{6.3.6}$$

为了描述流接近于 Q 点的稳定流形，作尺度坐标变换

$$\begin{cases} \tau = \nu t, \\ J = \nu j \end{cases} \tag{6.3.7}$$

其中 $\nu=\sqrt{\varepsilon}$。在这种坐标下，方程(6.3.3)在 Π_ε 上为

$$\begin{cases} j_\tau = -2[\alpha(\omega^2+\nu j) + (\omega^2+\nu j)^{\frac{1}{2}}\cos\theta] \\ \theta_\tau = -2j + \nu(\omega^2+\nu j)^{-\frac{1}{2}}\sin\theta \end{cases} \tag{6.3.8}$$

记 $y=(j,\theta)^T$，则有

$$Y_\tau = Y(y,\nu) \tag{6.3.9}$$

其中 $Y=(Y_1,Y_2)^T$ 为方程(6.3.8)所确定，Q 点的坐标为 $y_q=(j_q,\theta_q)$其中

$$j_q = -\nu\frac{(1-\alpha^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}}{2\omega} + O(\nu^3),$$

$$\theta_q = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2\omega^2}}{\alpha\omega}\right) - \pi + O(\nu^2)$$

在 y_q 处线性化，记$\tilde{y}=y-y_q$，可得

$$\tilde{y}_\tau = Y'(y_q,\nu)\,\tilde{y} + O(\tilde{y}^2)$$

其中 Y' 为 2×2 的矩阵

$$\begin{bmatrix} -\nu(2\alpha+(\omega^2+\nu j_q)^{-\frac{1}{2}}\cos\theta_q) & 2(\omega^2+\nu j_q)^{\frac{1}{2}}\sin\theta_q \\ -2-\frac{\varepsilon}{2}(\omega^2+\nu j_q)^{-\frac{3}{2}}\sin\theta_q & \nu(\omega^2+\nu j_q)^{-\frac{1}{2}}\cos\theta_q \end{bmatrix}$$

$Y'(y_q;\nu)$的特征值为

$$\begin{cases} \lambda = -2\sqrt{\omega}(1-\alpha^2\omega^2)^{\frac{1}{4}} - \nu\alpha + O(\nu^2), \\ \mu = 2\sqrt{\omega}(1-\alpha^2\omega^2)^{\frac{1}{4}} - \nu\alpha + O(\nu^2) \end{cases} \tag{6.3.10}$$

特征向量为 $e_1(\nu)$和 $e_2(\nu)$。特征向量依赖于 ν，且有

$$e_1(0) = (-\frac{\sigma}{2},1)^T,$$

$$e_2(0) = (\frac{\sigma}{2},1)^T,$$

$$\sigma = 2\sqrt{\omega}(1-\alpha^2\omega^2)^{\frac{1}{4}}$$

由文献[231]可知，从正则扰动理论和稳定流形定理有，对 ε 充分小，存在 Q 的开邻域，它与 ε 无关，使得 Q 在 U 中的稳定流形为 ν 的光滑函数，因此局部稳定流形的部分能参数表示为

$$\begin{aligned} y &= y_*(s;\nu), \\ s &= \exp[\lambda\tau] \end{aligned} \tag{6.3.11}$$

其中 $0\leqslant s\leqslant s_*=\exp[\lambda\tau_*]$，$s_*$ 是一个小的数，且与 ε 无关。为了解离开 Q 点的稳定流形，注意到 Q 为 Q_0 点

$$j_0 = 0,$$

$$\theta_0 = \arctan(\frac{\sqrt{1-\alpha^2\omega^2}}{\alpha\omega}) - \pi$$

的 ν 阶扰动，方程(6.3.8)为守恒方程

$$j_\tau = -2(\alpha\omega^2 + \omega\cos\theta),$$

$$\theta_\tau = -2j$$

的 $O(\nu)$ 阶扰动。因此，引入上面方程组的能量

$$E(j,\theta) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{1}{2}j^2 - \omega(\sin\theta + \alpha\omega\theta) \qquad (6.3.12)$$

其中曲线 $E(j,\theta)=E(j_0,\theta_0)$ 为守恒方程组的稳定流形，以 C_0^s：$y_0(\tau)=(j_0(\tau),\theta_0(\tau))$ 表示。如固定 $\tau_0<\tau_*$，则从正则扰动理论可得，对 $\tau_0<\tau<\tau_*$，Q 点的稳定流形为

$$y = y_0(\tau) + O(\nu)$$

因此，用 C_ϵ^s 表示相应稳定流形的部分，$\tau\in[\tau_0,\infty]$，C_ϵ^s 可用参数 $s\in[0,s_0]$ 表示

$$y = y_*(s;\nu),$$

$$s = \exp[\lambda\tau]$$

其中 y_* 为 s 和 ν 的光滑函数，曲线 y_* 为 $O(\nu)$ 阶逼近于 y_0，其中 $\tau_0<\tau$，且满足方程

$$(\lambda s)y_{*,s} = Y_*$$

其中 $Y_*=Y(y_*;\nu)$，见图 6.18。

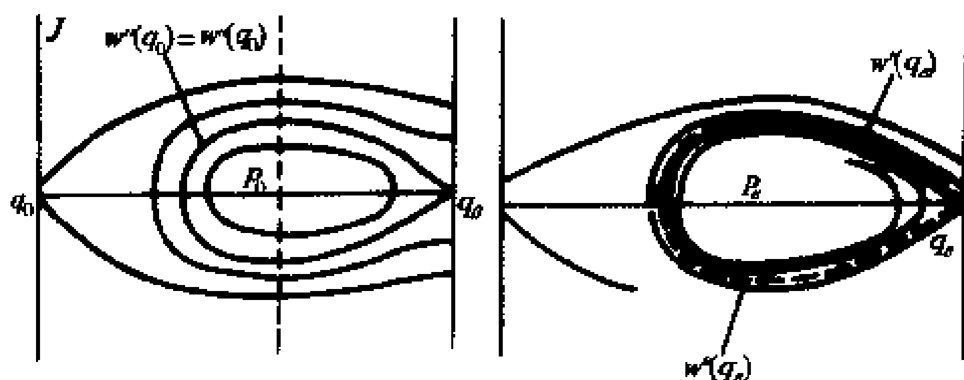


图 6.18 ODE 在 (j,θ) 坐标中的位相图

因 $|y_{0,s}|$ 是有界的，且不为 0，有

$$m(s;\nu) \stackrel{\text{def}}{=\!=} |y_{*,s}(s;\nu)| \geqslant m_0, 0 \leqslant s \leqslant s_0$$

其中 m_0 是一个正常数，且不依赖于 ϵ，曲线的单位切向量为

$$t = \frac{y_{*,s}}{m} = \frac{Y_*}{(\lambda s)m} \qquad (6.3.13)$$

为更方便描述在 C_ϵ^s 附近的流，我们引进新的坐标系(r,s)，其中 r 表示沿 C_ϵ^s 法向距离的测度，这些坐标为

$$y = y_*(s;\nu) + rn(s;\nu) \tag{6.3.14}$$

其中 $n(s,\nu)$表示曲线 $y_*(s;\nu)$的单位法向量。单位法向量和单位切向量有如下关系

$$n_s = k(s,\nu)t$$

其中 k 为一光滑函数，方程组(6.3.9)在坐标(r,s)下有

$$y_\tau = (m + kr)ts_\tau + r_\tau n$$

于是导出方程

$$r_\tau = Y \cdot n, s_\tau = \frac{Y \cdot t}{m + kr}$$

上面方程对 r 展开得

$$Y \cdot n = [(Y_*' \cdot n) \cdot n]r + O(r^2),$$

$$\frac{Y \cdot t}{m + kr} = \frac{Y_* \cdot t}{m} + [\frac{(Y_*' \cdot n) \cdot t}{m} - \frac{k|Y_*|}{m^2}]r + O(r^2)$$

从式(6.3.13)可得

$$\frac{Y_* \cdot t}{m} = \lambda s$$

于是可得(r,s)方程

$$\begin{aligned} r_\tau &= a(s,\nu)r + O(r^2), \\ s_\tau &= \lambda s + b(s,\nu)r + O(r^2) \end{aligned} \tag{6.3.15}$$

其中 a 和 b 为(s,ν)的光滑函数，$0<s<s_0$。在这些坐标下，C_ϵ^s 对应于 $r=0$，在 C_ϵ^s 上的流为

$$s_\tau = \lambda s$$

因 e_1 在 Q 点上和 C_ϵ^s 相切，从式(6.3.10)有

$$a(0,\nu) = (Y'(y_q,\nu)n) \cdot n = \mu$$

虽然(r,s)方程比原来方程(6.3.6)更简单，但仍不是在 C_ϵ^s 附近描述流的方程，理由是在 s 的方程中出现了线性项 $b(s,\nu)r$。为此，令

$$s = \beta + (h_0 + h_1\beta)r \tag{6.3.16}$$

其中 h_0、h_1 可选取为

$$h_0 = \frac{b_0}{\mu - \lambda}, h_1 = \frac{b_1 - h_0 a_1}{\mu}$$

其中 $a = \mu + a_1 s + O(s^2)$，$b = b_0 + b_1 s + O(s^2)$。作为(r,β)的方程组为

$$\begin{aligned} r_\tau &= a(\beta,\nu)r + O(r^2), \\ \beta_\tau &= \lambda\beta + c(\beta,\nu)r + O(r^2) \end{aligned} \tag{6.3.17}$$

其中$|c(\beta,\nu)| \leqslant c_0|\beta|^2$ 在 C_ϵ^s 上，$0 \leqslant \beta \leqslant s_0$。

方程(6.3.17)的优点是，在 C_ϵ^s 上，即 $r=0$，$\beta_* = \beta_0 e^{\lambda\tau}$的线性化流为

$$\begin{aligned} \delta r_\tau &= a_* dr, \\ \delta\beta_\tau &= \lambda\delta\beta + c_*\delta r \end{aligned}$$

它和在 Q 点线性化方程所得到的扩展与收缩率是一致的。

6.3.2 S_ω 邻域的方程

为了研究在不动点的圆 S_ω 邻域非线性问题的动力学行为，我们引入新的坐标(J,θ,f)，其中 J 为在平面 Π_c 上对 S_ω 的距离测度，θ 为在 S_ω 上的夹角，f 为 Π_c 的正交补。首先设 q 可写为

$$q \stackrel{\text{def}}{=\!=} [\rho(t) + f(x,t)]\exp \mathrm{i}\theta(t) \tag{6.3.18}$$

其中：ρ 和 θ 为在平面 Π_c 上的极坐标；$f \in \Pi_c^\perp$，f 依空间平均为零，对 $\epsilon=0$，流的 L^2 模是运动常数，因此用 I 代替 ρ。

$$I \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q\bar{q}\mathrm{d}x = \rho^2 + \langle f,\bar{f}\rangle \tag{6.3.19}$$

因 S_ω 对应于 $I=\omega$。为方便引入变量

$$J = I - \omega^2 \tag{6.3.20}$$

在这些变元下，方程(6.3.1)具有形式

$$\begin{cases} J_t = -2\epsilon[\alpha(\omega^2 + J) + \rho\cos\theta] + \epsilon Q_1(f), \\ \theta_t = -2J - \dfrac{\epsilon}{\rho}\sin\theta + Q_2(f) + \dfrac{1}{\rho}C_2(f), \\ \mathrm{i}f_t = \mathscr{L}_\epsilon f + W_\epsilon f + \rho Q_3(f) + C_3(f) + \dfrac{1}{\rho}C_2(f)f \end{cases} \tag{6.3.21}$$

其中

$$\rho = \sqrt{J + \omega^2 - < f, \bar{f} >},$$

$$\mathscr{L}_\varepsilon f = f_{xx} + \mathrm{i}\varepsilon \hat{D} f + 2\omega^2 (f + \bar{f}),$$

$$W_\varepsilon f = 2J(f + \bar{f}) + \frac{\varepsilon \sin\theta}{\rho} f$$

和

$$Q_1(f) = 2\langle \bar{f}(\hat{D} - \alpha) f \rangle,$$

$$Q_2(f) = -\langle (f + \bar{f})^2 \rangle,$$

$$Q_3(f) = 4(f\bar{f} - \langle f\bar{f} \rangle) + 2(f^2 - \langle f^2 \rangle)$$

$$C_2(f) = -\langle f\bar{f}(f + \bar{f}) \rangle,$$

$$C_3(f) = 2(f\bar{f}f - \langle f\bar{f}f \rangle) - \langle f^2 + \bar{f}^2 + 6f\bar{f} \rangle f + 2\langle f\bar{f} \rangle \bar{f}$$

在方程(6.3.21)中,可认为 J 和 f 为小量,原则可在 O 的固定领域考虑,方程(6.3.21)可考虑作为方程(6.3.6)的扰动

$$\begin{cases} J_t = -2\varepsilon[\alpha(J + \omega^2) + \sqrt{J + \omega^2}\cos\theta] + \varepsilon_1(J, \theta, f; \varepsilon), \\ \theta_t = -2J + \varepsilon(J + \omega^2)^{-\frac{1}{2}}\sin\theta + \varepsilon_2(J, \theta, f; \varepsilon), \\ \mathrm{i} f_t = \mathscr{L}_\varepsilon f + W_\varepsilon f + \omega Q_3(f) + \varepsilon_3(J, \theta, f; \varepsilon) \end{cases} \tag{6.3.22}$$

其中

$$W_\varepsilon f = 2J(f + \bar{f}) + \frac{\varepsilon \sin\theta}{\sqrt{J + \omega^2}} f$$

ε_k 为 θ 的 2π 周期函数,具有阶数

$$\begin{cases} \varepsilon_1(J, \theta, f; \varepsilon) = O(\varepsilon f^2), \\ \varepsilon_2(J, \theta, f; \varepsilon) = O(f^2), \\ \varepsilon_3(J, \theta, f; \varepsilon) = O(J f^2 + f^3) \end{cases} \tag{6.3.23}$$

其中 J, f 为小量。

点 Q 为式(6.3.21)的临界点，为了构造在 Q 点的同宿轨道，必须估计 Q 点局部稳定流形的大小。变元(J,θ)的大小是由稳定流形和常数平面 Π_c 的交 C_ε 所决定，为估计 f 的大小，必须利用方程(6.3.21)，但在该方程组中出现了具有麻烦性质的平方项 $Q_3(f)$，为此必须利用正规形式变换。

为了消去平方项 $Q_3(f)$，我们分析线性方程二次共振

$$\mathrm{i}f_t = f_{xx} + 2\omega^2(f + \bar{f}) \tag{6.3.24}$$

它对应于 $\varepsilon=0$ 方程组(6.3.21)中 f 的线性部分。

以 $f=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+\lambda t)}$代入式(6.3.24)，可得线性方程的色散关系

$$\lambda = \pm\,\mathrm{i}k\ \sqrt{k^2 - 4\omega^2}, k = 1,2,\cdots$$

二次共振意味着存在着非零整数 k_1，k_2 和 k_3 使得

$$k_1 + k_2 = k_3,$$
$$\lambda_1 \pm \lambda_2 = \pm\,\lambda_3$$

由共振条件可得

$$[(k_1 + k_2)^2 + k_1^2 + k_2^2 - 6\omega^2](k_1 + k_2)^2 = 0$$

这仅仅可能是 $k_1+k_2=k_3=0$。因 $\omega\in(\frac{1}{2},1)$。我们考虑方程在 $\Pi_c^\perp$ 空间，$k_3\neq0$，因此不出现二次共振项，设 f 的傅氏变换为

$$f(x) = \sum_{k\neq0}\hat{f}\ (k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

平方项 $Q_3(f)$有两项

$$f^2(x) - \langle f^2\rangle = \sum_{l+k\neq0}\hat{f}\ (k)\,\hat{f}\ (l)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+l)x},$$

$$|f(x)|^2 - \langle|f|^2\rangle = \sum_{l+k\neq0}\hat{f}\ (k)\,\hat{f}\ (l)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+l)x}$$

现作如下的平方型的接近于恒同变换的对 x 具有平移不变性的变换

$$\begin{cases} g = f + K(f,f), \\ K(f,h) \overset{\text{def}}{=\!=} K_{11}(f,h) + K_{1\bar{1}}(f,\bar{h}) \\ \qquad + K_{\bar{1}1}(f,h) + K_{\bar{1}\bar{1}}(\bar{f},\bar{h}) \end{cases} \tag{6.3.25}$$

其中 K 为有界线性算子，$K:\Pi_r^{\perp}\times\Pi_r^{\perp}\to\Pi_r^{\perp}$，

$$K_{11}(f,h)=\iint K_{11}(x-y_1,x-y_2)f(y_1)h(y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2,$$

$$K_{1\bar{1}}(f,\bar{h})=\iint K_{1\bar{1}}(x-y_1,x-y_2)f(y_1)\bar{h}(y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2$$

$K_{\bar{1}1}$ 和 $K_{\bar{1}\bar{1}}$ 有类似的表示，这些线性映照的傅氏展开为

$$K_{11}(f,h)=\sum_{k+l\neq 0}\hat{K}(k,l)\hat{f}(k)\hat{h}(l)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+l)x},$$

$$K_{1\bar{1}}(f,\bar{h})=\sum_{k+l\neq 0}\hat{K}_{1\bar{1}}(k,l)\hat{f}(k)\bar{\hat{h}}(-l)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+l)x}$$

命题 6.3.1　存在一个接近于恒同的平方型映照式(6.3.25)，它将方程

$$\mathrm{i}\partial_t f=f_{xx}+2\omega^2(f+\bar{f})+\omega Q_3(f)$$

变换为具立方非线性的方程

$$\mathrm{i}\partial_t g=g_{xx}+2\omega^2(g+\bar{g})+\mathscr{O}(g^3)$$

证明　计算

$$Sg\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\mathrm{i}\partial_t g-\partial_x^2 g-2\omega^2(g+\bar{g})$$

其中 g 为式(6.3.25)所给定，可得

$$Sg=Sf+H_{11}(f,f)+H_{1\bar{1}}(f,\bar{f})+H_{\bar{1}1}(\bar{f},f)+$$
$$H_{\bar{1}\bar{1}}(\bar{f},\bar{f})+C(f)$$

其中

$$\hat{H}_{11}=2(kl+\omega^2)\hat{K}_{11}-2\omega^2\hat{K}_{1\bar{1}}-2\omega^2\hat{K}_{\bar{1}1}-2\omega^2\overline{\hat{K}}_{\bar{1}\bar{1}}$$

$$\hat{H}_{1\bar{1}}=2\omega^2\hat{K}_{11}+2(l^2+kl-\omega^2)\hat{K}_{1\bar{1}}-2\omega^2\overline{\hat{K}}_{\bar{1}1}-2\omega^2\hat{K}_{\bar{1}\bar{1}},$$

$$\hat{H}_{\bar{1}1}=2\omega^2\hat{K}_{11}-2\omega^2\overline{\hat{K}}_{1\bar{1}}+2(k^2+kl-\omega^2)\hat{K}_{\bar{1}1}-2\omega^2\hat{K}_{\bar{1}\bar{1}},$$

$$\hat{H}_{\bar{1}\bar{1}}=-2\omega^2\overline{\hat{K}}_{11}+2\omega^2\hat{K}_{1\bar{1}}+2\omega^2\overline{K}_{\bar{1}1}+$$
$$2(k^2+l^2+kl-3\omega^2)\hat{K}_{\bar{1}\bar{1}}$$

其中 $C(f)$ 由 $K(f,Sf)$ 形式的项所组成。将 $Sf=\omega Q_3(f)$ 代入得

$$Sg=\omega Q_3(f)+H_{11}(f,f)+H_{1\bar{1}}(f,\bar{f})+$$

$$H_{\bar{1}1}(f,f)+H_{\bar{1}\bar{1}}(\bar{f},\bar{f},)+C(f)$$

其中 $C(f)$ 为三次项。因此，为了消去 g 方程中的 Q_3 项，必须

$$\hat{H}_{11}=-2\omega,\ \hat{H}_{1\bar{1}}=-2\omega,\ \hat{H}\ H_{\bar{1}1}=-2\omega,\ \hat{H}_{\bar{1}\bar{1}}=0,$$

对一切 $k,l,k+l\neq0$ 成立，因 $H_{ab}=\hat{H}_{ab},K_{ab}=\hat{K}_{ab},a,b\in\{1,\bar{1}\}$。为找到向量 K，解线性方程

$$UK=H$$

其中向量 $H=(-2\omega,-2\omega,-2\omega,0)^T$，因不存在二次共振，$\det U\neq0$，因此这个方程具有唯一解

$$\hat{K}_{11}(k,l)=-\frac{\omega}{kl},\quad \hat{K}_{1\bar{1}}=-\frac{\omega}{l(k+l)},$$

$$\hat{K}_{\bar{1}1}(k,l)=\frac{\omega}{k(k+l)},\hat{K}_{\bar{1}\bar{1}}(k,l)=0$$

因在空间 $\Pi_c^{\perp}$ 上考虑，$k\neq0,l\neq0,l+k\neq0$。更进一步，因

$$\sum|\hat{K}_{ab}(l,k)|^2<\infty$$

于是有 $K\in L^2(S^1\times S^1)$，由此推出 K 在 $\Pi_c^{\perp}$ 上为有界线性映照

$$\|K(f,f)\|_{H^1}\leqslant C\,|f\|_{H^1}^2,\ \forall f\in\Pi_c^{\perp}$$

最后，因方程

$$g=f+(f,f)$$

可逆，对 f 在零的邻域可得

$$f=g+\mathscr{K}(g)$$

其中 $\mathscr{K}$ 为 $O(g^2)$ 阶，因此 $C(f)$ 为 g 的立方项。

现在 S_ω 的邻域考虑具变元 (J,θ,f) 的方程(6.3.22)为

$$J_t=-2\epsilon[\alpha(J+\omega^2)+\sqrt{J+\omega^2}\cos\theta]+\mathscr{E}_1(J,\theta,f;\epsilon),$$

$$\theta_t=-2J+\epsilon(J+\omega^2)^{-\frac{1}{2}}\sin\theta+\mathscr{E}_2(J,\theta,f;\epsilon),$$

$$\mathrm{i}ft=\mathscr{L}_\epsilon f+W_\epsilon f+\omega Q_3(f)+\mathscr{E}_3(J,\theta,f;\epsilon)$$

作变换

$$g=f+K(f,f)$$

得到 g 的方程，虽然消去了 Q_3，但出现新的小参数平方项

$$\varepsilon\hat{D}K(f,f)$$

利用(J,θ,g)坐标、在S_ω附近可得方程

$$\begin{cases} J_t = -2\varepsilon[\alpha(J+\omega^2) + \sqrt{J+\omega^2}\cos\theta] + N_1(J,\theta,g;\varepsilon), \\ \theta_t = -2J + \varepsilon(J+\omega^2)^{-\frac{1}{2}}\sin\theta + N_2(J,\theta,g;\varepsilon), \\ \mathrm{i}g_t = \mathscr{L}_\varepsilon g + W_\varepsilon g + N_3(J,\theta,g;\varepsilon) \end{cases} \tag{6.3.26}$$

其中，J 和 g 在原点 O 的邻域有

$$N_1(J,\theta,g;\varepsilon) = O(\varepsilon g^2),$$

$$N_2(J,\theta,g;\varepsilon) = O(g^2),$$

$$N_3(J,\theta,g;\varepsilon) = O(Jg^2 + \varepsilon g^2 + g^3)$$

为了在 S_ω 邻域考虑实的流形，引入实坐标系。

$$u = (\mathrm{Re}\,(g),\mathrm{Im}\,(g))^T$$

由此可得方程组

$$\begin{cases} J_t = -2\varepsilon[\alpha(J+\omega^2) + \sqrt{J+\omega^2}\cos\theta] + N_1(J,\theta,u;\varepsilon), \\ \theta_t = -2J + \varepsilon(J+\omega^2)^{-\frac{1}{2}}\sin\theta + N_2(J,\theta,u;\varepsilon), \\ u_t = L_\varepsilon u + V_\varepsilon u + N_3(J,\theta,u;\varepsilon) \end{cases} \tag{6.3.27}$$

其中 N_3 为具两个分量的向量

$$L_\varepsilon = \mathscr{J}\partial_x^2 - 4\omega^2 S + \varepsilon\hat{D},$$

$$V_\varepsilon = -4JS + \frac{\varepsilon\sin\theta}{\sqrt{J+\omega^2}}\mathscr{J}$$

其中

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.3.3 局部不变流形的存在性

以下证明局部不变流形的存在及在 Q 点稳定流形的大小估计，在 S_ω 邻域，方程(6.3.27)可作为如下线性方程组的扰动

$$\begin{cases} J_t = 0, \\ \theta_t = -2J, \\ u_t = L_\varepsilon u \end{cases} \tag{6.3.28}$$

为了研究非线性问题(6.3.27)解的局部行态，我们必须分析算子 L_ε 的谱性质。考虑特征值问题

$$L_\varepsilon e = \lambda e$$

利用傅氏分析，可将特征值 λ 的平方表示：

$$(\lambda - \varepsilon d(j))^2 + j^2(j^2 - 4\omega^2) = 0, j = 1,2,3,\cdots$$

其中 $d(j)$ 表示 $-\hat{D}$ 的符号，因 $\omega \in (\frac{1}{2},1)$，则对 $j=1$ 有

$$\begin{cases} e_{s,u} = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}\,\omega}(1, \mp \sigma)^T \cos x, \\ e^\varepsilon_{s,u} = \pm \sigma - \varepsilon d(1), \end{cases} \tag{6.3.29}$$

其中

$$\sigma = \sqrt{4\omega^2 - 1} \tag{6.3.30}$$

对 $j \geqslant 2$，特征值来自复共轭对，具有负的实部

$$\lambda_j = \mathrm{i}\Omega_j - \varepsilon d(j)$$

其中

$$\Omega_j = j\sqrt{j^2 - 4\omega^2} > 0 \tag{6.3.31}$$

u 具有零平均值，可用特征基表示

$$u(x) = v_u e_u(x) + v_s e_s(x) + v_0(x) \tag{6.3.32}$$

其中 v_u 和 v_s 为实的数值，$v_0(x) \in [\mathrm{span}\{\Pi_c, e_s, e_s\}]^\perp$。作为这些变元，线性方程(6.3.28)分开写为

$$\begin{cases} J_t = 0, \\ \theta_t = -2J, \\ v_{u,t} = \sigma^\varepsilon_u v_u, \\ v_{s,t} = -\sigma^\varepsilon_s v_s, \\ v_{0,t} = L_\varepsilon v_0 \end{cases} \tag{6.3.33}$$

于是可看到，对 $\epsilon=0$，线性方程具有一个不稳定方向(e_u)，一个稳定方向(e_s)，和无穷多中心方向(J,θ,v_0)，利用这些中心变元 $v_c=(J,\theta,v_0)^T$，方程(6.3.33)可写为

$$\begin{cases} v_{u,t} = \sigma_u^\epsilon v_u, \\ v_{s,t} = -\sigma_s^\epsilon v_s, \\ v_{c,t} = Av_c \end{cases} \tag{6.3.34}$$

其中 A 由方程(6.3.33)所定义。

在 S_ω 的 δ 邻域，非线性方程(6.3.27)可看成线性方程(6.3.28)的扰动。当 $\epsilon=0$ 时，该线性方程的流 S_ω 具有一维稳定和不稳定的流形，和具余维数 2 的中心流形。我们集中注意力于中心流形 $E^c(S_\omega)$，以及中心稳定流形 $E^{cs}(S_\omega)$ 和中心不稳定流形 $E^{cu}(S_\omega)$：

$$E^{cs}(S_\omega) = \text{span}\{e_u\}^\perp,$$

$$E^{cu}(S_\omega) = \text{span}\{e_s\}^\perp,$$

$$E^c(S_\omega) = \text{span}\{e_u, e_s\}.$$

线性方程组(6.3.33)的一个重要特征是在不变流形上的增长率具有较宽广的间隙，为看到这一点，注意到当 $\epsilon=0$ 时，这个算子的谱具有实部 $\pm\sigma$ 和 0。因此，对任何整数 n 和 $\epsilon<\frac{\sigma}{4n}$ 有

$$\| \exp[At] \| \leqslant nC\exp[\frac{\sigma|t|}{n}],$$

则不变流形 E^{cs}，E^{cu} 和 E^c 可分别视为具增长率不超过 $\exp[\frac{\sigma t}{n}]$ $(t>0)$，$\exp[-\frac{\sigma t}{n}](t<0)$ 和 $\exp[\frac{\sigma|t|}{n}]$，$\forall t$ 的解。

取 $\delta=\frac{a}{n_0^2}$，a 是一个常数，与 ϵ 无关。引入局部化函数 ψ_δ：

$$\psi_\delta: \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ \psi_\delta(s) = \psi(\frac{s}{\delta})$$

其中 $\psi\in C^\infty$，满足

$$\psi(s) = \begin{cases} 1, & |s|\leqslant 1, \\ 0, & |s|\geqslant 2 \end{cases}$$

局部化函数作用在方程(6.3.27)中

$$\begin{cases} J_t = -2\varepsilon[\alpha(J_\delta + \omega^2) + \sqrt{J_\delta + \omega^2}\cos\theta] + N_1(J_\delta, \theta, u_\delta; \varepsilon), \\ \theta_t = -2J + \varepsilon[(J_\delta + \omega^2)^{-\frac{1}{2}}\sin\theta] + N_2(J_\delta, \theta, u_\delta; \varepsilon), \\ u_t = L_t u + V_\varepsilon u_\delta + N_3(J_\delta, \theta, u_\delta; \varepsilon) \end{cases} \tag{6.3.35}$$

其中对任何变量 s,用 $s_\delta = s\psi(\frac{s}{\delta})$代替。我们并未对 θ 截断,$\psi_\delta(I, f)$当相点位于 S_ω 的邻域 U_δ 之外,对右端作了截断。在方程(6.3.35)中的一切非线性项或者乘上 ε 或者至少含有(J,u)的平方项,落在原点 O 的 δ 邻域中,因此方程(6.3.35)具有整体 Lipschitz 常数,它的阶为 $O(\varepsilon+\delta)$:

令 $v := (v_u, v_s, v_c)^T$,算子 A 由式(6.3.34)所定义,可写式(6.3.35)为

$$\begin{cases} v_{u,t} = \sigma_u^\varepsilon v_u + R_u^\delta(v;\varepsilon), \\ v_{s,t} = -\sigma_s^\varepsilon v_s + R_s^\delta(v;\varepsilon), \\ v_{c,t} = A v_c + R_c^\delta(v;\varepsilon) \end{cases} \tag{6.3.36}$$

其中 $R^\delta(v;\varepsilon)$及其一阶导数为 $O(\delta+\varepsilon)$阶。

我们将证明局部化方程具有 C^l 不变流形,对于原来方程,这些流形在 S_ω 的 δ 邻域中是局部不变的。

定义 6.3.1 给定开集 O,流形 M 称为在流 F^t 下在 O 中是局部不变的,如果对每一个开区间 I,使得 $F^t(q)\subset O, F^{t_*}(q)\subset M$, $t_*\in I \Rightarrow F^t(q)\in M, \forall\ t\in I$。

定理 6.3.2 存在 S_ω 的一个 δ 邻域 U_δ,$\varepsilon_0(\delta)>0$ 和整数 $l>3$,使得$\forall\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$,方程(6.3.27)具有余维数为 1 的在 U_δ 中的局部不变流形,

$$W_\varepsilon^{cs} = \{v \in H^1, v_u = h_u(v_s, v_c, \varepsilon)\} \tag{6.3.37}$$

其中函数 $h_u\in C^l$,对 θ 为 2π 的周期的。更进一步,当 $\varepsilon=0$ 时,W_0^{cs} 沿 S_ω 的切线和 E^c 相交。

类似地，具有局部不变流形

$$W_\varepsilon^{cu} = \{v \in H^1, v_s = h_s(v_u, v_c; \varepsilon)\} \qquad (6.3.38)$$

其中函数 $h_s \in C^l$，对 θ 为 2π 周期的，对 $\varepsilon=0$，W_0^{cu} 沿着 S_ω 的切线方向和 E^{cu} 相交。

对余维数为 2 的慢流形 M_ε 的存在性有

推论 6.3.1 设 M_ε 表示交集

$$M_\varepsilon = W_\varepsilon^{cs} \cap W_\varepsilon^{cu}$$

则 M_ε 为余维数为 2 的在 U_δ 中的局部不变流形，

$$M_\varepsilon = \{v \in H^1, v_u = h_u^c(v_c; \varepsilon), v_s = h_s^c(v_c; \varepsilon)\} \qquad (6.3.39)$$

其中函数 $h_{u,s}^c \in C^l$，θ 为 2π 周期的，对 $\varepsilon=0$，M_ε 沿 S_ω 切向和 E^c 相交。

附注 在 M_ε 上的流由以下方程给定：

$$\begin{cases} J_t = -2\varepsilon[\alpha(J_\delta + \omega^2) + \sqrt{J_\delta + \omega^2}\cos\theta] + \tilde{N}_1(J_\delta, \theta, v_{0\delta}; \varepsilon), \\ \theta_t = -2J + \varepsilon(J_\delta + \omega^2)^{-\frac{1}{2}}\sin\theta + \tilde{N}_2(J_\delta, \theta, v_{0\delta}; \varepsilon), \\ v_{0t} = L_\varepsilon v_0 + V_\varepsilon v_{0\delta} + \tilde{N}_3(J_\delta, \theta, v_{0\delta}; \varepsilon)] \end{cases}$$

$$(6.3.40)$$

定理 6.3.2 的证明 对积分方程应用不动点原理证明。首先，方程(6.3.36)可写成积分方程形式：

$$\begin{cases} v_u(t) = \exp[\sigma_u^\varepsilon(t - t_u)]v_u(t_u) + \\ \qquad \int_{t_u}^t \exp[\sigma_u^\varepsilon(t-s)]R_u^\delta(v(s); \varepsilon)\mathrm{d}s, \\ v_s(t) = \exp[-\sigma_s^\varepsilon(t - t_s)]v_s(t_s) + \\ \qquad \int_{t_s}^t \exp[-\sigma_s^\varepsilon(t-s)]R_s^\delta(v(s); \varepsilon)\mathrm{d}s, \\ v_c(t) = \exp[At]v_c(0) + \int_0^t \exp[A(t-s)]R_c^\delta(v(s); \varepsilon)\mathrm{d}s \end{cases}$$

由于增长率不同，引入具特征的不变流形 W_ε^{cs} 和 W_ε^{cu} 为

$$W_\varepsilon^{cs} = \{v \in H^1, \sup_{t\geqslant 0}(\exp[-\frac{\sigma}{n_0}t] \| F^t(\bar{v};\varepsilon) \|_{H^1}) < \infty\}$$

(6.3.41)

$$W_\varepsilon^{cu} = \{v \in H^1, \sup_{t\leqslant 0}(\exp[\frac{\sigma}{n_0}t] \| F^t(\bar{v};\varepsilon) \|_{H^1}) < \infty\}$$

(6.3.42)

其中 $F^t((\bar{v});\varepsilon)$为方程(6.3.36)的流。集中注意于 W_ε^{cs},对$\bar{v}\in B(0,\rho)$,引入模

$$\| v \|_\lambda = \sup_{0\leqslant t,\sigma\leqslant \|v\|_{H^1}} \exp\{-\frac{\sigma t}{\lambda} \| v(t)_{H^1} \| \}$$

从 W_ε^{cs} 的定义,对 $v\in W_\varepsilon^{cs}$,有

$$\exp[-\sigma_u t_u]|v_u(t_u)| \to 0,\ t_u \to \infty$$

因此,基于在 W_ε^{cs} 的解,积分方程可写为

$$\begin{cases} v_u(t) = \int_{+\infty}^t \exp[\sigma_u^\varepsilon(t-s)]R_u^\delta(v(s);\varepsilon)\mathrm{d}s, \\ v_s(t) = \exp[-\sigma_s^\varepsilon t]v_s + \int_0^t \exp[-\sigma_s^\varepsilon(t-s)]R_s^\delta(v(s);\varepsilon)\mathrm{d}s, \\ v_c(t) = \exp[At]v_c + \int_0^t \exp[A(t-s)]R_c^\delta(v(s);\varepsilon)\mathrm{d}s \end{cases}$$

(6.3.43)

为证明 W_ε^{cs} 的存在性,利用 Newton 迭代:令 $v^0=0$,

$$\begin{cases} v_u^{k+1}(t) = \int_{+\infty}^t \exp[\sigma_u^\varepsilon(t-s)]R_u^\delta(v^k(s);\varepsilon)\mathrm{d}s, \\ v_s^{k+1}(t) = \exp[-\sigma_s^\varepsilon t]v_s + \int_0^t \exp[-\sigma_s^\varepsilon(t-s)]R_s^\delta(v^k(s);\varepsilon)\mathrm{d}s, \\ v_c^{k+1}(t) = \exp[At]v_c + \int_0^t \exp[A(t-s)]R_c^\delta(v^k(s);\varepsilon)\mathrm{d}s \end{cases}$$

(6.3.44)

这就形成了完全确定的函数序列。如 $\| v^k \|_{n_0} \leqslant C$,则

$$\| v^{k+1}(t) \|_{H^1} \leqslant n_0 C \exp[\frac{\sigma}{n_0}t](\| v_s \|_{H^1} + \| v_c \|_{H^1}) +$$

$$\int_{t}^{\infty}\exp\left[\frac{\sigma}{2}(t-s)\right]\|R_u^{\delta}(v^k(s);\varepsilon)\|_{H^1}\mathrm{d}s+$$

$$\int_{0}^{t}\exp\left[-\frac{\sigma}{2}(t-s)\right]\|R_s^{\delta}(v^k(s);\varepsilon)\|_{H^1}\mathrm{d}s+$$

$$\int_{0}^{t}n_0C\exp\left[\frac{\sigma}{2n_0}(t-s)\right]\|R_c^{\delta}(v^k(s);\varepsilon)\|_{H^1}\mathrm{d}s$$

由式(6.3.35)可知 $R^{\delta}(\omega,\epsilon)$ 为光滑函数，它的项或者为线性的具有系数 ϵ 或者为非线性的，它在 S_{ω} 的 δ 邻域中。因此，如果令 R' 为 R^{δ} 的导数，则有估计

$$\|R^{\delta}(\omega,\epsilon)\|_{H^1}\leqslant\|R'\|\ |W\|_{H^1}+\epsilon \qquad (6.3.45)$$

其中 $\|R'\|$ 为量 R' 的上界，它等于 $C(\delta+\epsilon)$。由此推出

$$\|v^{k+1}(t)\|_{H^1}\leqslant n_0C\exp\left[\frac{\sigma}{n_0}(t)\right](\|v_s\|_{H^1}+\|v_c\|_{H^1}+\varepsilon)+$$

$$\int_{t}^{\infty}\exp\left[\frac{\sigma}{2}(t-s)\right]C(\varepsilon+\delta)\|v^k(s)\|_{H^1}\mathrm{d}s+$$

$$\int_{0}^{t}\exp\left[\frac{\sigma}{2n_0}(t-s)\right]n_0C(\varepsilon+\delta)\|v^k(s)\|_{H^1}\mathrm{d}s$$

利用 v^k 的界可得

$$\|v^{k+1}(t)\|_{H^1}\leqslant$$

$$C[\|v_s\|_{H^1}+\|v_c\|_{H^1}+\varepsilon+n_0^2(\varepsilon+\delta)\|v^k\|_{n_0}]\exp\left[\frac{\sigma}{n_0t}\right]$$

其中常数 C 与 n_0，ε 和 δ 无关。现固定 $\delta=\frac{a}{n_0^2}$，$a=\frac{1}{4}c$。可得对 $\varepsilon<\frac{a}{n_0^2}$，有

$$\|v^{k+1}(t)\|_{n_0}\leqslant C(\rho)+\frac{1}{2}\|v^k\|_{n_0} \qquad (6.3.46)$$

因此序列 v^k 是确定的，而且 $\|v^k\|_{n_0}\leqslant 2C(\rho)$。因非线性项是光滑的，对其差有类似的估计

$$\|v^{k+1}-v^k\|_{n_0}\leqslant\frac{1}{2}\|v^k-v^{k-1}\|_{n_0} \qquad (6.3.47)$$

由此推出 $v^k\to v$，v 为 t 的连续函数。而且

$$\| v \|_{n_0} \leqslant 2C(\epsilon + \| v_s \|_{H^1} + \| v_c \|_{H^1})$$

为了证明 v 对 v_s,v_c 和 ϵ 的光滑性,我们注意到式(6.3.43)中所有项是光滑的,由此推出序列$\{v^k\}$是可微的。导数 Dv^k 满足

$$\| Dv^{k+1}(t) \|_{H^1} \leqslant$$

$$C\exp\left[\frac{\sigma}{n_0}t\right] + C\int_t^{\infty}\exp[\frac{\sigma}{2}(t-s)] \| R' Dv^k \|_{H^1} ds +$$

$$C\int_0^t \exp[\frac{\sigma}{2n_0}(t-s)] \| R' Dv^k \|_{H^1} ds$$

利用R'的有界性,可得

$$\| Dv^{k+1} \|_{n_0} \leqslant C + \frac{1}{2} \| Dv^k \|_{n_0}$$

由此推出 $\| Du^k \|_{n_0} \leqslant 2C$。为估计序列中二项之差,利用平均值定理可得

$$\| [R'(v^k) - R'(v^{k-1})]W \|_{H^1} \leqslant C \| v^k - v^{k-1} \|_{H^1} \| W \|_{H^1}$$

其中常数 C 依赖于 R''的模。令 $\delta v^k = v^k - v^{k-1}$ 有

$$\| D\delta v^{k+1}(t) \|_{H^1} \leqslant C\int_t^{\infty} \exp[\frac{\sigma}{2}(t-s)][\| R'(D\delta v^k) \|_{H^1} +$$

$$(\| Dv^k \|_{H^1} + \| Dv^{k-1} \|_{H^1}) \| \delta v^k \|_{H^1}] ds +$$

$$C\int_0^t \exp[\frac{\sigma}{2n_0}(t-s)][\| R'(D\delta v^k) \|_{H^1} +$$

$$(\| Dv^k \|_{H^1} + \| Dv^{k-1} \|_{H^1}) \| \delta v^k \|_{H^1}] ds \qquad (6.3.48)$$

方程中的平方项导致增长率的增长,

$$\| v^k - v^{k-1} \|_{H^1} \| Dv^k \|_{H^1} \leqslant \exp[\frac{2\sigma}{n_0}t]$$

$$\| v^k - v^{k-1} \|_{n_0} \| Dv^k \|_{n_0}$$

增长率的增加限制一阶导数差的估计

$$\| Dv^{k+1} - Dv^k \|_{\frac{n_0}{2}} \leqslant C \| v^k - v^{k-1} \|_{n_0} + \frac{1}{2} \| Dv^k - Dv^{k-1} \|_{n_0}$$

因此序列$\{v^k\}$依 $\| \cdot \|_{\frac{n_0}{2}}$模 C^1 收敛。重复这种程序可得$\{D^j v^k\}$依 $\| \cdot \|_{\frac{n}{j}}$模收敛,$\frac{n}{j} > 2$。取极限可得 $v \in C^l$,$l \leqslant [\frac{n_0}{2}] - 1$。由这些估

计,定义

$$h_u(v_s,v_c;\varepsilon)=v_u(0)=\int_{-\infty}^{0}\exp\left[-\sigma_u^{\varepsilon}s\right]R_u^{\theta}(v(s);\varepsilon)\mathrm{d}s \tag{6.3.49}$$

它是 C^l 泛函,且 $\| Dh_u \| \leqslant \frac{1}{2}$,

$$W_\varepsilon^{cs}=\{v\in H^1, v_u=h_u(v_s,v_c;\varepsilon)\}$$

为 C^l 流形。W_ε^{cs} 的不变性来自 h_u 的定义和在时间平移下方程的不变性。为使 W_ε^{cs} 为方程(6.3.1)的局部不变流形,函数 h_u 对 θ 是 2π 周期的。这是显然的,因为积分方程对 θ 是 2π 周期的,且有唯一解,$\forall\ \theta\in\mathbf{R}$。最后 W_ε^{cs} 和 S_u 相切,是从 $\varepsilon=0$,R^{θ} 至少是 u,J 的平方项得到的,$\theta\in[0,2\pi]$。

相同的原理可建立 C^l 函数 h_s 的存在性,且 $\| Dh_s \| \leqslant \frac{1}{2}$,且为方程(6.3.1)的 C^l 局部不变流形,

$$W_\varepsilon^{cu}=\{v\in H^1 | v_s=h_s(v_u,v_c;\varepsilon)\}$$

推论 6.3.1 的证明 W_ε^{cu} 和 W_ε^{cs} 的交集能被描述为如下方程组的解

$$v_u=h_u(v_s,v_c;\varepsilon),$$
$$v_s=h_s(v_u,v_c;\varepsilon)$$

注意 $\| Dh_u \|$,$\| Dh_s \| \leqslant \frac{1}{2}$,由隐函数存在定理可知上面方程组具有唯一解

$$v_u=h_u^c(v_c;\varepsilon),$$
$$v_s=h_s^c(v_c;\varepsilon)$$

其中 $h_{u,s}^c\in C^l$,且

$$M_\varepsilon=\{v\in H^1, v_u=h_u^c(v_c;\varepsilon), v_s=h_s^c(v_c;\varepsilon)\}$$

由于线性问题具有小的增长率,同宿轨道的整体结构 $t\in(-\infty,\infty)$ 是一个奇异摄动的问题。因此考虑如下的模型的结构:

$$\dot{\eta}=[-1+\varepsilon\Omega(\eta,v)]\eta,$$

$$\dot{v} = \varepsilon[v + S(\eta, v)] \tag{6.3.50}$$

其中:Ω 为 $O(|\eta| + |v|)$阶;S 为 $O(\eta^2 + v^2)$阶。注意到方程(6.3.50)中,$\eta = 0$ 为慢运动的不变流形 M。这个慢流形是很不同于 $\varepsilon > 0$ 的情况的。这种差别在于原来问题的奇性。如果方程组完全不耦合,则初值问题的长时间行态完全由 v 方程的解所决定。对于耦合方程组,则是不清楚的。

设存在光滑的变元变换

$$(\eta, v) \to (\eta, \eta_c),\ v = f(\eta, \eta_c; \varepsilon),\ f(0, \eta_c; \varepsilon) = \eta_c$$

此时式(6.3.50)具有如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= [-1 + \varepsilon\,\Omega(\eta, v)]\eta, \\ \dot{\eta}_c &= \varepsilon[\eta_c + \varepsilon\,\overline{S}(\eta_c)] \end{aligned} \tag{6.3.51}$$

由此可看出,当 $t \to \infty$ 时,

$$(\eta(t; \eta_0), \eta_c(t; \eta_0)) \to (0, \eta_c(t; \bar{\eta}_0))$$

它是依指数快 e^{-t} 逼近的,其中 $\eta_0 = (\eta(0), \eta_c(0))$,$\bar{\eta}_0 = (0, \eta_c(0))$。通过任意点$(\eta(0), \eta_c(0))$的长时间运动,能通过在慢流形上的点$(0, \eta_c(0))$的运动所追踪。

利用文献[207]中的理论,引入在慢流形 M 上的曲线族:

$$\mathscr{F}_v : [-1, 1] \to W_\varepsilon^{cs}(M),\ \forall v \in M$$

其中 $\mathscr{F}_v(0) = v$。这些曲线$\in C^2(\eta, v, \varepsilon)$,点$(\eta, \bar{v})$位于曲线 $\mathscr{F}_v^\eta$ 上,当且仅当

$$\| F^t(\eta, \bar{v}; \varepsilon) - F^t(0, v; \varepsilon) \| \to 0,\text{具有快的逼近率},t \to \infty,$$

曲线 $\mathscr{F}_v$ 被称为通过基点 $v \in M$ 的 Fenichel 稳定纤维。显然,在我们部分非耦合的坐标系中,纤维 $\mathscr{F}_v$ 给定为

$$\mathscr{F}_v = \{(\eta, \bar{v}); v = f(\eta, v; \varepsilon)\}$$

其中 $f(\eta, v; \varepsilon)$为坐标变换。

定理 6.3.3　对一切 $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$,$C^l$ 流形 W_ε^{cu} 具有 C^{l-2}坐标系

$$v_u = \eta_u,\ \eta_u \in [-\eta_0, \eta_0]$$

$$v_c = f^u(\eta_u, \eta_c; \varepsilon),\ \eta_u \in E^c$$

使得子流形 M_ϵ 对应于 $\eta_u=0$，在 W_ϵ^{cu} 上的流具有不耦合的形式

$$\dot{\eta}_u = [\sigma_u^\epsilon + \Gamma^\delta(\eta_u, \eta_c; \epsilon)]\eta_u,$$

$$\dot{\eta}_c = A\eta_c + \overline{S}_c^\delta(\eta_c; \epsilon)$$

其中 $\eta, \Gamma^\delta, \overline{S}_c^\delta$ 和它们的导数为 $O(\epsilon+\delta)$ 阶。类似的结果对 W_ϵ^{cs} 成立。

由于流形 M_ϵ 为 W_ϵ^{cu} 的余维数为 1 的子流形。因此可把 W_ϵ^{cu} 看成乘积空间 $M_\epsilon\times(-z_0, z_0)$，它具有局部坐标 (v_c, η_u)，其中 v_c 为在 M_ϵ 上的坐标，η_u 为在区间 $(-z_0, z_0)$ 上的坐标。M_ϵ^{cu} 作为 (v_u, v_c) 的图给定

$$v_s = h_s(v_u, v_c; \epsilon)$$

在 W_ϵ^{cu} 上的流可由限制方程(6.3.36)在图上得到：

$$\begin{cases} \dot{v}_u = \sigma_u^\epsilon v_u + S_u^\delta(v_u, v_c; \epsilon), \\ \dot{v}_c = Av_c + S_c^\delta(v_u, v_c; \epsilon) \end{cases} \tag{6.3.52}$$

其中 $S_{uc}^\delta(v_u, v_c; \epsilon) \overset{\text{def}}{=\!=} R_{u,c}^\delta(v_u, h_s(v_u, v_c; \epsilon), v_c; \epsilon)$ 为 $R_{u,c}^\delta$ 限制在图上。

类似地，利用 (v_u, v_c) 作为在 W_ϵ^{cu} 上的局部坐标，子流形 M_ϵ 通过 v_c 的图给定，

$$v_u = h_u^\epsilon(v_c; \epsilon)$$

流在 M_ϵ 上的给定为

$$\dot{v}_c = Av_c + \overline{S}_c^\delta(v_c; \epsilon) \tag{6.3.53}$$

其中 $\overline{S}_c^\delta(v_c; \epsilon) = S_c^\delta(h_u^\epsilon(v_c; \epsilon), v_c; \epsilon)$ 为 S_c^δ 限制在图上。

因 M_ϵ 为 W_ϵ^{cu} 的一个不变子流形，引入坐标 (v_c, η_u)，其中 v_c 为在 M_ϵ 上的坐标，且

$$\eta_u = v_u - h_u^\epsilon(v_c; \epsilon) \tag{6.3.54}$$

作为这些坐标，子流形 M_ϵ 由 $\eta_u=0$ 给定。

为了得到在 W_ϵ^{cu} 上具坐标 (v_c, η_u) 的流，我们对方程(6.3.54)关于 η_u 微分，其中 (v_u, v_c) 为方程组(6.3.52)的解。这就遇到了困

难，因为解仅在 H^1 中（不是在 C^1 中）对 t 连续。然而，如初值$\in H^3$，则解在 H^1 中属于 C^1。由于式(6.3.52)的解对初值在 H^1 中具有连续依赖性，因此能得到在 W_ε^{cu} 上流的方程，其初值$\in H^3$，再利用对初值的连续依赖性，推得方程在分布意义下对初值$\in H^1$ 中成立。

式(6.3.52)对 t 微分可得

$$\dot{\eta}_u = \dot{v}_u - Dh_u^c(v_c;\varepsilon)\dot{v}_c$$

其中 Dh_u^c 表示 h_u^c 对 v_c 的导数。由方程(6.3.52)，上面方程可写为

$$\dot{\eta}_u = \sigma_u^\varepsilon v_u + S_u^\delta - Dh_u^c(Av_c + S_c^\delta) \qquad (6.3.55)$$

设流在 M_ε 上给定为$(h_u^c(v_c(t)),v_c(t))$。代入式(6.3.52)可得

$$Dh_u^c\dot{v}_c = \sigma_u^\varepsilon h_u^c + S_u^\delta(h_u^c,v_c;\varepsilon),$$

$$\dot{v}_c \quad = Av_c + S_c^\delta(h_u^c,v_c;\varepsilon)$$

由此推出 h_u^c 满足

$$Dh_u^c(Av_c + S_c^\delta) = \sigma_u^\varepsilon h_u^c + S_u^\delta \qquad (6.3.56)$$

其中

$$S_u^\delta(v_c;\varepsilon) = S_u^\delta(h_u^c,v_c;\varepsilon)$$

利用对于 h_u^c 的等式(6.3.56)，可简化方程(6.3.55)，因此描述在 W_ε^{cu} 上流的方程为

$$\begin{cases} \dot{\eta}_u = \sigma_u^\varepsilon\eta_u + \Omega_u(\eta_u,v_c;\varepsilon), \\ \dot{v}_c = Av_c + \Omega_c(\eta_u,v_c;\varepsilon) \end{cases} \qquad (6.3.57)$$

其中

$$\begin{cases} \Omega_u = S_u^\delta(\eta_u + h_u^c,v_c;\varepsilon) - \overline{S}_u^\delta - \\ \qquad\qquad Dh_u^c[S_c^\delta(\eta_u + h_u^c,v_c;\varepsilon) - \overline{S}_c^\delta], \\ \Omega_c = S_c^\delta(\eta_u + h_u^c,v_c;\varepsilon) \end{cases} \qquad (6.3.58)$$

为 C^{r-1}。注意到 $\Omega_u(0,v_c;\varepsilon)=0$，$\Omega_c(0,v_c;\varepsilon)=\overline{S}_c^\delta(v_c;\varepsilon)$，所有在 $\Omega_{u,c}$ 中的项及其一阶导数项由于局部化而为 $O(\varepsilon+\delta)$ 阶，因此方程(6.3.57)可写为

$$\begin{cases} \dot{\eta}_u = [\sigma_u^\varepsilon + \overline{\Omega}_u(\eta_u,v_c;\varepsilon)]\eta_u, \\ \dot{v}_c = Av_c + \Omega_c(\eta_u,v_c;\varepsilon) \end{cases} \qquad (6.3.59)$$

其中Ω_u,Ω_s及Ω_c的一阶导数项均为$O(\varepsilon+\delta)$阶。

上面的方程可用来证明在M_ε上W_ε^{cu}纤维的存在,它等价于寻找另外一组坐标系(η_c,η_u),使之具有不耦合方程组的形式:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_u = [\sigma_u^\varepsilon + \Gamma_u(\eta_u,\eta_c;\varepsilon)]\eta_u, \\ \dot{\eta}_c = A\eta_c + S_c^\delta(\eta_u;\epsilon) \end{cases} \tag{6.3.60}$$

其中$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=\!=} \Omega_u$取值在新的坐标系中。

如果变元变换存在,则$\eta_u(t)\to 0$,至少快于$e^{\frac{\alpha t}{2}}$,$t\to-\infty$。则v_c的方程逼近于η_c的方程,也是指数快的,因此,令$\gamma_c=v_c-\eta_c$,有

$$\dot{\gamma}_c = A\gamma_c + \Omega_c(\eta_u,\gamma_c+\eta_c;\varepsilon) - \Omega_c(0,\eta_c;\varepsilon)$$

从$-\infty$到t的积分得

$$v_c(\gamma) - \eta_c(t) =$$

$$\int_{-\infty}^{t} \exp[-A(t-s)](\Omega_c(\eta_u,\gamma_c+\eta_u;\varepsilon) - \Omega_c(0,\eta_c;\varepsilon))\mathrm{d}s$$

坐标变换给定$v_c(0)$:

$$f^u(\eta_u(0),\eta_c(0);\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \eta_c(0) + \int_{\infty}^{0} \exp[-As](\Omega_c - S_c^\delta)\mathrm{d}s \tag{6.3.61}$$

其中右端隐含有f^u,因在积分下的项为$O(\varepsilon+\delta)$,因此可找到上述方程的不动点,具有性质

$$f^u(\eta_u,\eta_c;\varepsilon) = \eta_c + \tilde{f}^u(\eta_u,\eta_c;\varepsilon) \tag{6.3.62}$$

其中$\tilde{f}^u$为C^{l-2}函数,它的一阶导数为$O(\delta)$阶,$\tilde{f}(0,\eta_c;\varepsilon)=0$。这就是以下证明定理的基本想法。

定理 6.3.3 的证明 固定一条轨线η_c在M_ε上,考虑方程组

$$\begin{cases} \dot{\eta}_u = [\sigma_u^\varepsilon + \Omega_u(\eta_u,\gamma_c+\eta_c;\varepsilon)]\eta_u, \\ \dot{\gamma}_c = A\gamma_c + \Omega_c(\eta_u,\gamma_c+\eta_c;\varepsilon) - \Omega_c(0,\eta_c;\varepsilon) \end{cases}$$

其中$\gamma_c=v_c-\eta_c$。令$a(\eta_c;\varepsilon)=\overline{\Omega}_u(0,\eta_c;\varepsilon)$,则上面方程能写为

$$\begin{cases} \dot{\eta}_u = [\sigma_u^\varepsilon + a(\eta_c;\varepsilon) + \Psi(\eta_u,\gamma_c,\eta_c;\varepsilon)]\eta_u, \\ \dot{\gamma}_c = A\gamma_c + \Phi(\eta_u,\gamma_c,\eta_c;\varepsilon) \end{cases} \tag{6.3.63}$$

其中 $\Psi(0,0,\eta_c;\varepsilon)=0,\Phi(0,0,\eta_c;\varepsilon)=0,a,\Psi,\Phi$ 为 $O(\varepsilon+\delta)$阶，如同定理 6.3.3 所证，定义在 H^1 上的连续函数模

$$\beta=(\gamma_c,\eta_u),$$

$$\|\beta\|_\lambda=\sup_{t\leqslant 0}\{\exp\left[-\frac{\sigma t}{\lambda}\right]\|\beta(t)\|_{H^1}\}$$

进行如下牛顿迭代

$$\begin{cases}\eta_u^{k+1}(t)=G(t,0)\eta_u(0)+\int_0^t G(t,s)\Psi(\eta_u^k,\gamma_c^k,\eta_c;\varepsilon)\eta_u^k\mathrm{d}s,\\ \gamma_c^{k+1}=\int_{-\infty}^t\exp\left[A(t-s)\right]\Phi(\eta_u^k,\gamma_c^k,\eta_c;\varepsilon)\mathrm{d}s\end{cases}$$

其中 $G(t,s)=\exp\left[\int_s^t(\sigma_u^\varepsilon+a)\right]$。

序列 $\beta^k=(\gamma_c^k,\eta_u^k)$的收敛性和光滑性证明如下：

对 $|\eta_u(0)|\leqslant\delta$，定义了序列$\{\eta_u^k\}$，设对某个 k 有 $\|\beta^k\|_{m_0}\leqslant c\delta$，其中 $m_0=\frac{n_0}{l}$，则由 β^{k-1}的方程推出

$$|\eta_u^{k+1}(t)|\leqslant C(\delta+\varepsilon)\int_t^0\exp\left[\frac{\sigma}{2}(t-s)+\frac{\sigma}{m_0}s\right]\|\beta^k\|_{m_0}\mathrm{d}s+$$

$$C\delta\exp\left[\frac{\sigma t}{2}\right]$$

$$\|\gamma_c^{k+1}(t)\|_{H^1}\leqslant C(\delta+\varepsilon)\int_{-\infty}^t m_0\times$$

$$\exp\left[\frac{\sigma}{n_0}(t-s)+\frac{\sigma}{m_0}s\right]\|\beta^k\|_{m_0}\mathrm{d}s$$

对 $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 有

$$\|\beta^{k+1}\|_{m_0}\leqslant C\delta+C\delta m_0n_0\|\beta^k\|_{m_0}$$

因 δ 选取为 $\delta=\frac{1}{Cn_0^2}$，其中 C 为大的常数，有

$$\|\beta^{k+1}\|_{m_0}\leqslant C\delta+\frac{1}{2}\|\beta^k\|_{m_0}$$

因此推出$\{\beta^k\}$为有界序列，由于函数 Φ 和 $\Psi\in C^{l-1}$，这些表达式中的所有项或者局部化区域长度为 δ 或者线性项具有系数 ε。于是有

$$\| \beta^{k+1} - \beta^k \|_{m_0} \leqslant \frac{1}{2} \| \beta^k - \beta^{k-1} \|_{m_0}$$

这就证明了$\{\beta^k\}$的收敛性$\beta^k \to \beta$，β在H^1中为t的连续函数，且$\| \beta \|_{m_0} \leqslant C\delta$。也可证明$\beta$对$\eta_c(0)$，$\eta_u(0)$和$\epsilon$是光滑的。困难在于$\| \eta_c(t) \|_{H^1}$当$t<0$时增长，增长率为$\exp\left[-\frac{\sigma t}{n_0}\right]$，而$a$，$\Phi$和$\Psi$均依赖于$\eta_c(t)$。如$\beta^{k+1}$对$\eta_c(0)$微分可得

$$\eta'^{k+1}_u(t) = \eta_u(0)G(t,0)\int_0^t a'\mathrm{d}s + \int_0^t G(t,s)\left(\int_0^t a'\right)\Psi\eta_u^k\mathrm{d}s +$$

$$\int_0^t G(t,s)\left[(\Psi'\eta'_c + \Psi'\eta'^k_u + \Psi'\gamma'^k_u)\eta_u^k + \Psi\eta'^k_u\right]\mathrm{d}s$$

$$\gamma'^{k+1}_c(t) = \int_{-\infty}^t \exp\left[A(t-s)\right]\left[\Phi'\eta'_c + \Phi'\eta'^k_u + \Phi'\gamma'^k_c\right]\mathrm{d}s$$

上述方程不能用a'和η'_c的$\| \cdot \|_{m_0}$估计，它具有增长率$\exp\left[-\frac{\sigma t}{n_0}\right]$，$t<0$。但能用$\| \cdot \|_{2m_0}$进行估计，它具有慢的衰减率

$$\| \beta'^{k+1}(t) \|_{H^1} \leqslant C\delta \exp\left[\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{n_0}\right)t\right] + C\delta\int_t^0 \exp\left[\frac{\sigma(t-s)}{2}\right] \times$$

$$\left[\exp\left[\left(\frac{\sigma}{m_0} - \frac{\sigma}{n_0}\right)s\right] + \| \beta^{k+1}(s) \|\right]\mathrm{d}s +$$

$$C\delta\int_{-\infty}^t \exp\left[\frac{\sigma}{n_0}(t-s)\right] \times$$

$$\left[\exp\left[\left(\frac{\sigma}{m_0} - \frac{\sigma}{n_0}\right)s\right] + \| \beta'^k(s) \|\right]\mathrm{d}s$$

更进一步，因$2m_0>n_0$，上面积分收敛，且有

$$\| \beta'^{k+1}(t) \|_{H^1} \leqslant C\delta \exp\left[\frac{\sigma t}{2m_0}\right](1 + \| \beta'^k \|_{2m_0})$$

这就推出$\| \beta'^k \|_{2m_0}$的收敛性。类似地能估计β^k的$(j-1)$阶导数的$\| \cdot \|_{jm_0}$模，所有积分当$jm_0<n_0$时收敛，因在方程(6.3.63)中所有项$\in C^{l-1}$，就可得到$\beta \in C^{l-2}$。

现定义流形W_ϵ^{cu}的纤维为

$$f^u(\eta_c(0),\eta_u(0);\epsilon) = \eta_c(0) + \gamma_c(0)$$

$$v_c(0) = \eta_c(0) +$$

$$\int_{-\infty}^{0} \exp[-As][\Omega_c(\eta_u, \gamma_c + \eta_c; \varepsilon) - \Omega_c(0, \eta_c; \varepsilon)]ds$$

从 f 的定义以及 $t \to t+\tau$ 推出函数 f^u 在流下的不变性。因此

$$v_c(t) = f^u(\eta_c(t), \eta_u(t); \varepsilon)$$

于是当 $\eta_u(0)$充分小时 $v_c(t)$完全确定。这种不变性推出，如果用(η_c, η_u)作为坐标系替代(v_c, η_u)，可得到方程组(6.3.60)，描述在 W_ε^{cu} 上的流：

$$\begin{cases} \eta'_u = [\sigma_u^\varepsilon + \Gamma(\eta_u, \eta_c; \varepsilon)]\eta_u, \\ \eta'_c = A\eta_c + S_c^\varepsilon(\eta_c; \varepsilon) \end{cases}$$

附注： 纤维可如下给定：

$$\begin{cases} v_u = \eta_u, \\ v_c = f^u(\eta_u, \eta_c; \varepsilon) \end{cases}$$

现考虑在 M_ε 中 Q 点的稳定流形。

对 $\alpha < \frac{1}{\omega}$，点 Q 是定常的，可用(J, θ, u)表示：

$$J_q = -\frac{\varepsilon}{2\omega}\sqrt{1-\alpha^2\omega^2} + O(\varepsilon^2),$$

$$\theta_q = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2\omega^2}}{\alpha\omega}\right) - \pi - O(\varepsilon),$$

$$u = 0$$

在 Q 点线性化方程(6.3.35)，可得 Q 为鞍点，具有二维不稳定流形和余维数为 2 的稳定流形。不稳定流形沿着曲线 C_ε^u 和常数平面相交，W_ε^{cu} 沿着曲线和 v_u 方向相切。在 Q 点的稳定流形沿着曲线 C_ε^s 和 Π_c 相交。因此交集 M_ε 是余维数为 1 的子流形。我们关心 $W = W^s(Q) \cap M_\varepsilon$ 的大小。

设在平面 Π_c 上 Q 点的稳定流形可表示为

$$C_\varepsilon^s = \{y = (j, \theta) : y = y_*(s; \nu)\}$$

其中 $\nu=\sqrt{\epsilon}$，y_* 给定在方程(6.3.11)中。

$$y_{*,\tau}=Y_1(j_*,\theta_*;\nu),$$

$$\theta_{*,\tau}=Y_2(j_*,\theta_*;\nu)$$

其中 $s=\exp[\lambda\tau]$。在 M_ϵ 上的流由方程(6.3.40)中的(J,θ,v_0)表示，其中 $J=\nu j$：

$$\begin{cases} j_t=\nu Y_1(j,\theta,\nu)+\overline{N}_1(j,\theta,v_0;\nu), \\ \theta_t=\nu Y_2(j,\theta,\nu)+\overline{N}_2(j,\theta,v_0;\nu), \\ v_{0t}=L_\epsilon v_0+V_\epsilon v_0+\overline{N}_3(j,\theta,v_0;\nu) \end{cases} \tag{6.3.64}$$

为了估计 $W=W^s(Q)\cap M_\epsilon$，利用式(6.3.14)和式(6.3.16)确定的在平面 Π_t 上的坐标(β,r)。作为这些变量，在 M_ϵ 上的流在 C_ϵ^s 的邻域可用如下方程给定：

$$\begin{cases} \dot{r}=\nu a(\beta,j_\epsilon)r+O(\nu r^2+v_0^2), \\ \dot{\beta}=\nu\lambda\beta+\nu c(\beta,\nu)r+O(\nu r^2+v_0^2), \\ \dot{v}_0=L_\epsilon v_0+V_*v_0+O(\nu r v_0+\nu v_0^2+v_0^3) \end{cases} \tag{6.3.65}$$

其中

$$V_*=-4\nu j_*(s,\nu)S+\frac{\nu^2\sin(\theta*(s;\nu))}{\sqrt{\omega^2+\nu j_*(s;\nu)}}\mathcal{J}$$

这里 a，c 为(β,ν)的光滑函数。现来构造含有 C_ϵ^s 的在 Q 点的稳定流形，在 C_ϵ^s 上

$$\beta_*(t;\nu)=\beta_0\exp[\nu\lambda t]$$

其中 $0\leqslant\beta_0\leqslant s_0$，$t>0$。引入变元

$$\gamma=\beta-\beta_*(t,\nu)$$

对流作线性化，由式(6.3.65)可得

$$\begin{cases} \dot{r}=\nu a_*(t,\nu,\beta_0)r+N_{*1}(t,r,\gamma,v_0;\nu), \\ \dot{\gamma}=\nu\lambda\gamma+\nu c_*(t,\nu)r+N_{*2}(t,r,\gamma,v_0;\nu), \\ \dot{v}_0=L_\epsilon\gamma+V_*(t,\nu,\beta_0)v_0+N_{*3}(t,r,\gamma,v_0;\nu) \end{cases}$$

(6.3.66)

其中

$$N_{*1} = O(\nu r^2 + \nu \gamma^2 + v_0^2),$$

$$N_{*2} = O(\nu r^2 + \nu \gamma^2 + v_0^2),$$

$$N_{*3} = O(\nu r^2 + \nu \gamma^2 + \nu \tau_0^2 + v_0^3)$$

方程(6.3.66)的线性部分由耦合 ODE 和 PDE 组成，其系数依赖于 t。

ODE 估计 ODE 的基本解由 2×2 矩阵组成

$$\begin{bmatrix} A_*(t,s;\beta_0,\nu) & 0 \\ \Gamma(t,s;\beta_0,\nu) & \exp[\nu\lambda(t-s)] \end{bmatrix}$$

其中

$$A_*(t,s;\beta_0,\nu) = \exp\left[\int_s^t \nu a_* ds'\right],$$

$$\Gamma(t,s;\beta_0,\nu) = \nu\int_s^t \exp[\nu\lambda(t-\alpha)]c_*(\alpha)A_*(\alpha,s)\mathrm{d}\alpha$$

为估计 A_*，注意到 a_* 可写为

$$a_* = \mu + \bar{a},$$

$$|\bar{a}| \leqslant C\beta_0 \exp[\nu\lambda t] \leqslant Cs_0 \exp[\nu\lambda t]$$

其中 μ 给定在式(6.3.10)中，由此可得 A_* 的如下估计($t,s \geqslant 0$)：

$$C_1 \exp[\nu\mu(t-s)] \leqslant A_* \leqslant C_2 \exp[\nu\mu(t-s)]$$

其中 C_1 和 C_2 为常数，与 ε 无关，为得到 Γ 的有界性，

$$|c_*| \leqslant Cs_0^{\frac{1}{2}} \exp[2\mu\lambda t]$$

由此推出

$$|\Gamma| \leqslant C\nu\left|\int_s^t \exp \nu[\lambda(t-x) + 2\lambda x + \mu(x-s)]\mathrm{d}x\right|, \quad s,t \geqslant 0$$

因

$$\lambda + \mu = -2\alpha\nu + O(\nu^2) < 0$$

可得上面积分的有界性：

$$|\Gamma| \leqslant C\nu|t-s|\exp[\nu\lambda(t-s)], \ \forall s,\ t \geqslant 0$$

其中 C 与 ε 无关。

PDE 估计 困难来自线性算子对时间的依赖性，为估计 PDE 基本解的增长率，为方便计，用线性算子的傅氏系数来表示$\mathscr{A}(k)$：

$$A = \begin{bmatrix} -\varepsilon d(k) & -k^2+\varepsilon\alpha_1 \\ k^2-4\omega^2-\varepsilon\alpha_1-\nu\alpha_2 & -\varepsilon d(k) \end{bmatrix}$$

其中 α_1,α_2 为 $e^{\nu t}$，ν 和 $d(k)\geqslant\alpha(\dot{D}$ 的符号）的光滑函数，$k=2,3,\cdots$。算子 $\mathscr{A}(k)$具有特征值

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon d(k) \pm \mathrm{i}D(k),$$

$$D(k) = \sqrt{(k^2-\varepsilon\alpha_1)(k^2-4\omega^2-\varepsilon\alpha_1-\nu\alpha_2)}$$

能用矩阵$U(k)$将 A 对角化，即 $U^{-1}AU=\Lambda$，$\Lambda=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\lambda_2)$，其中 $U(k)$：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\mathrm{i}D(k)}{-k^2+\varepsilon\alpha_1} & \dfrac{\mathrm{i}D(k)}{k^2-\varepsilon\alpha_1} \end{pmatrix}$$

注意到U 为空间$[\mathrm{span}\ \{\Pi_c,e_u,e_s\}]^{\perp}$的有界算子。如果作 v_0 到 w 的变元变换，其中 $\hat{v}_0=U(k)\hat{w}(k)$，可得

$$\dot{\hat{w}}(k) = \Lambda\hat{w}(k) - U^{-1}\dot{U}\,\hat{w}(k)$$

项 $U^{-1}\dot{U}$是有界的：

$$|U^{-1}\dot{U}\,| \leqslant \frac{C}{k^2}\varepsilon \exp\,[\nu\lambda t]$$

其中 C 与 k,ε 无关。$\hat{w}(k)$满足积分方程

$$\hat{w}(k) = F(t,s;k)\hat{w}_0(k) + \int_0^t F(t,s';k)U^{-1}\dot{U}\,\hat{w}\mathrm{d}s'$$

对 $t\geqslant s\geqslant 0$，$\hat{w}(k)$可估计如下：

$$|\hat{w}(k)| \leqslant C\exp\,[-\varepsilon d(k)(t-s)]\,|\hat{w}_0(k)| + C\int_s^t \varepsilon\exp\,[-\varepsilon d(k)(t-s')+\nu\lambda s']\,|\hat{w}(k)|\mathrm{d}s'$$

因 $\lambda<0$，推出，对 $t\geqslant s\geqslant 0$ 有

$$|\hat{w}(k)| \leqslant C\exp\,[-\varepsilon d(k)(t-s)]\,|\hat{w}_0(k)|$$

最后，如以 $U(t,s)$表 PDE 的基本解，则有

$$\| U(t,s)v_{i0} \|_{H^1} \leqslant C \exp[-\varepsilon\alpha(t-s)] \| v_{i0} \|_{H^1}, d(k) \geqslant \alpha$$

定理 6.3.4 在 Q 点存在在 M_ε 中 C^1 的局部稳定流形。能用参数(β, v_{i0})表示：

$$W = \{(r, \beta, v_{i0}) : r = f(\beta, v_{i0})\}$$

其中 $\beta \in [0, s_0]$，$\| v_{i0} \|_{H^1} \in [0, \varepsilon^{\frac{3}{4}}]$。且 $f(\beta, 0) = 0$，$|r| \leqslant C\varepsilon$。

证明 由线性估计以及正规形式的变换，定理的证明是标准的。从式(6.3.66)得积分方程

$$\begin{cases} r = \int_t^\infty A_*(t,s) N_{*1} \mathrm{d}s, \\ \gamma = \int_0^t [\exp(\nu\lambda(t-s)) N_{*2} + \Gamma(t,s) N_{*1}] \mathrm{d}s, \\ v_0 = U(t,0) v_{i0} + \int_0^t U(t,s) N_{*3} \mathrm{d}s \end{cases}$$

利用关于 A_*，Γ_* 和 U 的线性估计，以及 N_* 量的阶数，有

$$|r| \leqslant C \int_t^\infty \exp[\nu\mu(t-s)][\nu r^2 + \nu\gamma^2 + \| v_0 \|_{H^1}^2] \mathrm{d}s$$

$$|\gamma| \leqslant C \int_0^t \exp[\nu\lambda(t-s)][1 + \nu\lambda(t-s)] \times [\nu r^2 + \nu\gamma^2 + \| v_0 \|_{H^1}^2] \mathrm{d}s,$$

$$\| v_0 \|_{H^1} \leqslant C \int_0^t \exp[-\varepsilon\alpha(t-s)] \times [\nu(r^2 + \gamma^2 + \| v_0 \|_{H^1}^2) + \| v_0 \|_{H^1}^3] \mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-\varepsilon\alpha t} \| v_{i0} \|_{H^1}$$

对(r, γ, v_0)作以 $\sqrt{\varepsilon}$ 的尺度变换，使得在解的先验估计中产生 $O(\sqrt{\varepsilon})$，我们仅需 $O(\mathrm{e}^{\mu})$，$\mu < 1$。由此可推出

$$|r| \leqslant C\varepsilon \exp[-\varepsilon\alpha t],$$

$$|\gamma| \leqslant C\varepsilon \exp[-\varepsilon\alpha t],$$

$$\| v_0 \|_{H^1} \leqslant C\varepsilon^{\frac{3}{4}} \exp[-\varepsilon\alpha t], \quad \| v_{i0} \| \leqslant C\varepsilon^{\frac{3}{4}}$$

这些估计使我们可利用 Newton 迭代去证明积分方程有唯一解。

定义 6.3.2

$$f(\beta_0, v_{i0}) = \int_0^{\infty} A_{\kappa}(0,s) N_{\cdot 1} \mathrm{d}s \qquad (6.3.67)$$

其中对 β_0 依赖性隐含于 $A_{\cdot}, N_{\cdot 1}$ 中。函数 f 的可微性来自 $A_{\cdot}$，$N_{\cdot}$ 的可微性。

6.3.4 整体可积理论

未扰动 NLS 方程($\varepsilon=0$)是在函数空间 $H^1_{e,p}$ 上的 Hamilton 系统

$$-\mathrm{i}q_t = \frac{\delta}{\delta \bar{q}} H \qquad (6.3.68)$$

其中 Hamilton 量 H 为

$$H = \int_0^{2\pi} [q_x \bar{q}_x - q \bar{q}^2 + 2\omega^2 q \bar{q}] \mathrm{d}x$$

我们知道，这是一个完全可积系统，它的 Lax 对为

$$\begin{cases} \varphi_x = U^{(\lambda)} \varphi, \\ \varphi_t = V^{(\lambda)} \varphi \end{cases} \qquad (6.3.69)$$

其中

$$U^{(\lambda)} = \mathrm{i}\lambda\sigma_3 + \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & q \\ \bar{q} & 0 \end{pmatrix},$$

$$V^{(\lambda)} = \mathrm{i}[2\lambda^2 - (q \bar{q} - \omega^2)]\sigma_3 + \begin{pmatrix} 0 & 2\mathrm{i}\lambda q + q_x \\ 2\mathrm{i}\lambda \bar{q} - \bar{q}_x & 0 \end{pmatrix}$$

σ_3 表示第三 Pauli 矩阵，$\sigma_3 := \mathrm{diag}\ (1, -1)$。这个超定方程组是相容的，即 $\partial_t \varphi_x = \partial_x \varphi_t$，当且仅当系数 q 满足 NIS 方程。我们能用散射反演方法求解 NLS 方程的解 q。

现考虑“空间流”式(6.3.69)。利用微分算子 $\hat{L} = \hat{L}(q)$ 的谱理论。

$$\hat{L} = -\mathrm{i}\sigma_3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \begin{pmatrix} 0 & q \\ -\bar{q} & 0 \end{pmatrix}$$

它是一个在 $L^2(\mathbf{R})$ 上具有稠定义 H^1 的算子。$\sigma(\hat{L})$表示它的谱，即满足特征值问题

$$\hat{L}\psi = \lambda\psi \tag{6.3.70}$$

的所有复 λ 值集合的闭包，其中特征函数 $\psi(x)$是有界的，$x\in(-\infty,\infty)$。因系数 q 是 x 的周期函数，Floquet 理论能被运用于分析这个谱。

设对基本解矩阵 $M=M(x;\lambda;q)$，即它为线性问题(6.3.70)在 $x=0$ 上具初值恒等矩阵的 2×2 矩阵值解，引入转换矩阵 T

$$T(\lambda,q) = M(2\pi;\lambda;q)$$

则谱 $\sigma(\hat{L})$为 2×2 矩阵 T 在单位圆上具有特征值的一切 λ 值的集合。因 $\det T=1$，它由称之为 Floquet 判别式的数量函数所决定。

$$\Delta:\mathbf{C}\times H^1_{c,p}\to\mathbf{C},\Delta(\lambda;q) = \operatorname{tr}[T(\lambda;q)]$$

用 Δ 表示，谱给定为

$$\sigma(\hat{L}(q)) = \{\lambda\in\mathbf{C}:\Delta(\lambda,q)\text{ 是实的}, -2\leqslant\Delta\leqslant+2\}$$

命题 6.3.2

(i)Floquet 判别式 $\Delta(\lambda;q\,\bar{q})$

$$\Delta:\mathbf{C}\times H^1_{c,p}\times H^1_{c,p}\to\mathbf{C}$$

对于 λ,q 和$\bar{q}$为整函数。

(ii)Δ 的一阶变分有如下表示：

$$\delta\Delta(\lambda;q,\bar{q}) = \int_0^{2\pi}\left[\frac{\delta\Delta}{\delta q(x)}\delta q(x) + \frac{\delta\Delta}{\delta\bar{q}(x)}\delta\bar{q}(x)\right]\mathrm{d}x$$

其中

$$\frac{\delta}{\delta q(x)}\Delta(\lambda;q,\bar{q}) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{tr}\left[M^{-1}(x)\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}M(x+2\pi)\right],$$

$$\frac{\delta}{\delta\bar{q}(x)}\Delta(\lambda;q,\bar{q}) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{tr}\left[M^{-1}(x)\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}M(x+2\pi)\right]$$

这里 $M(x)=M(x;\lambda,q,\bar{q})$表示基本解矩阵，对$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\Delta$ 有类似表示。

为证这个命题(i)，将线性微分方程(6.3.70)写为 M 的积分

方程

$$M(x) = \exp(\mathrm{i}\sigma_3\lambda x) +$$

$$\int_0^x \exp[\mathrm{i}\sigma_3\lambda(x-y)]\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i}q(y) \\ -\mathrm{i}\bar{q}(y) & 0 \end{bmatrix} M(y)\mathrm{d}y$$

迭代程序可展为级数，它们的每一项由 q 和 $\bar{q}$ 的多项式组成。

$$q(y_1)\cdots q(y_n)\bar{q}(y_{n+1})\cdots\bar{q}(y_m)$$

这个级数可证明为一致收敛的。因此 Δ 关于 q,q 为整函数，对 λ 的解析性的证明是类似的。对于第一变分(ii)的证明。可由下式计算：

$$(\hat{L}-\lambda)M = 0, M(0) = I,$$

$$\hat{L}-\lambda)\delta M = \begin{pmatrix} 0 & \delta q \\ -\delta\bar{q} & 0 \end{pmatrix} M,\ \delta M(0) = 0$$

解可通过由参数的变分求解 δM，连同定义

$$\delta\Delta = \mathrm{tr}\ \delta M(1)$$

即得所需的表示。

命题 6.3.3

(i)Floquet 判别式 Poisson 括号可交换：

$$\{\Delta(l;q,\dot{q}),\Delta(\lambda';q,\dot{q})\} = 0, \forall\ \lambda,\lambda'$$

其中 Poisson 括号定义为

$$\{F,G\} = \int_0^{2\pi}\mathrm{i}\left(\frac{\delta F}{\delta q}\frac{\delta G}{\delta\ q} - \frac{\delta F}{\delta\ q}\frac{\delta G}{\delta q}\right)\mathrm{d}x$$

(ii)$\Delta(\lambda;q,\dot{q})$ 为 NLS 方程的运动常数，因它和 Hamilton 量 H 的 Poisson 括号为零：

$$\{\Delta(\lambda;q,q),H(q,\dot{q})\} = 0, \forall\ \lambda$$

因此，$\Delta(\lambda;\bar{q})$ 对每个 λ 形成一个 NLS 方程的无穷多个运动常数族。

证明　见文献[167]。

由于 $\hat{L}$ 为非自共轭算子。其谱可能产生谱带，不必是实的，对于周期或反周期特征值 λ_j，有 $\Delta(\lambda_j) = \pm 2$。

现定义 Δ 的临界点和多重点。临界点为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\Delta(\lambda;q)\Big|_{\lambda^c(q)} = 0$$

多重点：它首先是临界点，且有

$$\Delta(\lambda^m;q) = \pm 2$$

λ^m 的代数重数定义为 $\Delta(\lambda)\mp 2$ 的零点的阶数。通常它为 2，但它可以超过 2，当它等于 2 时，称此多重点为双重点，以 λ^d 表示；λ^m 的几何重数定义为在 λ^m 处 $\hat{L}$ 特征空间的维数，或为 1 或为 2。实轴为谱的子集，$R\subset\sigma(\hat{L})$。考虑这样的临界点 λ^c，$-2<\Delta(\lambda^c)<2$，此时的临界点为谱的分叉点。关于这方面详细的谱理论讨论见文献[232]。

现举一个重要例子。考虑 $q(x,t)$ 与 x 无关

$$q(x,t) = c\exp\{-\mathrm{i}[2(c^2-\omega^2)t-\gamma]\}$$

Lax 对的两个线性无关解

$$\begin{pmatrix}\psi_1^{(\pm)}\\ \psi_2^{(\pm)}\end{pmatrix} = \exp\{\pm\mathrm{i}[\kappa(\lambda)(x+2\lambda t)]\}\times$$

$$\begin{pmatrix}c\exp\{-\mathrm{i}[2(c^2-\omega^2)t-\gamma]/2\}\\ (\pm\kappa(\lambda)-\lambda)\exp\{\mathrm{i}[2(c^2-\omega^2)t-\gamma]/2\}\end{pmatrix} \tag{6.3.71}$$

其中

$$\kappa(\lambda) = \sqrt{\lambda^2+c^2}$$

可从计算 Floquet 判别式得到线性算子 $\hat{L}$ 的谱：

$$\Delta(\lambda;q(\cdot,t;c,\gamma)) = 2\cos 2\pi\kappa(\lambda) = 2\cos\left[2\pi(\lambda^2+c^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

λ_j 由

$$\kappa(\lambda_j) = \frac{j}{2}$$

给出。由此可知，连续谱由实轴连同在虚轴上的一个谱带所组成。所有的临界点除原点外为双重点。对于 $c\approx\omega$，位于上半平面的一个双重点在谱带上。它的共轭也是双重点。所有其他的双重点仍

保留在实轴上。

运用 Bäcklund(Darboux)变换可由线性化的解去得到 NLS 方程的整体解(同宿轨道)。令 Lax 对在 $\lambda=\nu$ 双重点上两个线性无关的解为(ϕ^+,ϕ^-)。线性方程在(q,ν)的一般解为

$$\phi(x,t;\nu;c_+,c_-)=c_+\phi^++c_-\phi^- \qquad (6.3.72)$$

利用 ϕ 定义变换矩阵 G:

$$G=G(\lambda;\nu;\phi)=N\begin{pmatrix}\lambda-\nu & 0\\ 0 & \lambda-\nu\end{pmatrix}N^{-1} \qquad (6.3.73)$$

其中

$$N=\begin{pmatrix}\phi_1 & -\phi_2\\ \phi_2 & \phi_1\end{pmatrix} \qquad (6.3.74)$$

则可定义 Q 和 Ψ 为

$$Q(x,t)=q(x,t)+2(\nu,\nu)\frac{\phi_1\bar{\phi}_2}{\phi_1\bar{\phi}_1+\phi_2\bar{\phi}_2} \qquad (6.3.75)$$

$$\Psi(x,t;\lambda)\equiv G(\lambda;\nu;\phi_1)\Psi(x,t;\lambda) \qquad (6.3.76)$$

其中 Ψ 为 Lax 对在(q,λ)处的解。式(6.3.75)、(6.3.76)为 Bäcklund变换。

定理 6.3.5 设 $q(x,t)$为 NLS 方程的周期解,它是线性不稳定且在 $\sigma(\hat{L}(q))$中的一个复双重点 ν 上为指数不稳定的。设在复双重点 ν 上具有几何重数 2。令(ϕ_+,ϕ_-)表示 Lax 对在(q,ν)上的特征基。由式(6.3.75)、(6.3.76)定义 $Q(x,t)$和 $\Psi(x,t;\lambda)$,则有

(i) $Q(x,t)$也是 NLS 方程具空间周期 2π 的解;

(ii) $\sigma(\hat{L}(Q))=\sigma(\hat{L}(q))$;

(iii) $Q(x,t)$同宿于 $q(x,t)$,即当 $t\to\pm\infty$ 时,$Q(x,t)\to q_{\theta\pm}(x,t)$,具指数 $e^{-\sigma_\nu|t|}$。这里 $q_{\theta\pm}$为 q 的"环的平移",σ_ν 为与复双重点 ν 相关的非消失的增长率。

(iv) $\Psi(x,t;\lambda)$为线性方程组(6.3.69)在(Q,λ)上的解。

由上述例子:

$$q=c\exp\{-i[2(c^2-\omega^2)t-\gamma]\}=ce^{i\theta},$$

$$\Delta(x;q) = 2\cos\left[2\pi\kappa(\lambda)\right],\ \kappa(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 + c^2},$$

$$\kappa(\nu) = \frac{1}{2} \Rightarrow \nu = \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{4c^2 - 1}$$

由式(6.3.28)可知 q 为不稳定的，具有线性化增长率

$$\sigma = \sqrt{4c^2 - 1} = 2|\nu|$$

利用这些公式。特征函数式(6.3.71)以及同宿轨道 Q_H 的一般公式可得

$$q_h^{\pm} = \left\{\frac{\cos 2p - \mathrm{i}\sin 2p \tanh\tau \pm \sin p\ \mathrm{sech}\,\tau\cos x}{1 \mp \sin p\ \mathrm{sech}\,\tau\cos x}\right\}q$$

其中

$$\tau = \sigma(t + t_0),\mathrm{e}^{\mathrm{i}p} = \frac{1 + \mathrm{i}\sigma}{2c}$$

这里±表示∞处图形的两叶。注意到 $-\cos x=\cos(x+\pi)$，它表明一叶“+”表示中心在 $x=0$ 处激发，另一叶“－”表示在中心 $x=\pi$ 处激发。式(6.3.72)提供了一个“胡子圆”(Whishered Circle)的明显表达式。从这一观点，它提供了不稳定流形的一个明显表达式。

$$W^u(s) = W^s(s) = \bigcup_{\gamma,t_0,\pm=\infty} q_h^{\pm}(t;\gamma,t_0,c)$$

对于一个固定的位势 $q_0\in H^1_{e,p}$，它有纯实的或纯虚的临界点 λ^c，

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Delta(\lambda;q_0)|_{\lambda^c} = 0$$

令 $N_b=N_b(q_0)$ 表示在 $H^1_{e,p}$ 中 q_0 的小邻域。考虑临界点作为在这一邻域的泛函，$\lambda^c=\lambda^c(q)$：

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Delta(\lambda;q_0)|_{\lambda^c(q)} = 0;\lambda^c(q_0) = \lambda^c$$

作为纯实(或纯虚)的临界点，引入重要不变量 $\mathbf{F}:N_b\to\mathbf{R}$ 给定为

$$\mathbf{F} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \Delta(\lambda^c(q);q)$$

命题 6.3.4 如果 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2}\Delta(\lambda,q)\neq 0,\forall\ q\in N_b$，则 $\mathbf{F}:N\to\mathbf{R}$ 是光滑的。

证明 计算

$$\frac{\delta F}{\delta q}=\frac{\delta}{\delta q}\Delta(\lambda^c(q);q)=$$

$$\Delta'(\lambda^c(q);q)\frac{\delta\lambda^c}{\delta q}+\frac{\delta\Delta}{\delta q}=$$

$$\frac{\delta\Delta}{\delta q}(\lambda;q)\big|_{\lambda=\lambda^c(q)}$$

$\lambda^c(q)$是光滑的，可得

$$\Delta'(\lambda^c(q);q)=0,$$

$$\Delta''(\lambda^c(q);q)\frac{\delta\lambda^c}{\delta q}+\frac{\delta\Delta'}{\delta q}=0$$

如 $\Delta''(\lambda^c(q);q)\neq 0$，则可得到任何阶的连续微分。

附注： 式(6.3.71)具平面波形式的特征函数称为 Bloch 函数。

设 $\psi^{\pm}(x,\lambda)$为 Bloch 函数，即 Lax 对在$[q,\lambda]$的一个解。这些函数通过一个周期能为输运条件所决定：

$$\psi(x+2\pi,\lambda)=\rho(\lambda)\psi(x,\lambda) \tag{6.3.77}$$

其中 $\rho(\lambda)$表示 Floquet 乘子，它可用 Floquet 判别式表示

$$\rho(\lambda)=\frac{1}{2}[\Delta(\lambda)+\sqrt{\Delta^2(\lambda)-4} \tag{6.3.78}$$

在$(\lambda,\sqrt{\Delta^2(\lambda)-4})$的黎曼面上，函数 ρ 和 ψ 是确定的，$\psi^{\pm}(x,\lambda)$表示 ψ 在 λ 两叶上的值。在分支点上(单周期的或反周期的点)，二叶接触，$\psi^{\pm}$变成线性相关。

在任何情况下，对固定的 λ，这些 Bloch 特征函数能明显由基本解矩阵 $M(x;\lambda)=\{Y^{(1)},(x;\lambda),Y^2(x;\lambda)\}$表示：

$$\begin{aligned}\psi^{\pm}(x;\lambda)=\alpha^{\pm}\{&M_{21}(1;\lambda)Y^{(1)}(x;\lambda)+\\&[M_{22}(1;\lambda)-\rho^{\pm}(\lambda)]Y^{(2)}(x;\lambda)\}\end{aligned} \tag{6.3.79}$$

其中 α_+表示规范常数。

Floquet 判别式的梯度能很好地由 Bloch 函数表示：

推论 6.3.2 对 λ 不是 a 的为一个分支点(即 λ 不是一个周

期或反周期特征值）

$$\frac{\delta}{\delta \boldsymbol{q}}\Delta(\lambda;q,\bar{q}) = \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{\Delta^2(\lambda^c)-4}}{W[\psi^+,\psi^-]}\begin{bmatrix}\psi_2^+(x;\lambda)\cdot\psi_2^-(x;\lambda)\\ -\psi_1^+(x;\lambda)\cdot\psi_1^-(x;\lambda)\end{bmatrix} \tag{6.3.80}$$

其中 $\boldsymbol{q}=(q,\bar{q})^T$，$W[\psi^+,\psi^-]$表示 ψ^+ 和 ψ^- 的 Wronskin 行列式。这些表示能连续到周期或反周期特征值。

利用这个表示可得到如下命题：

命题 6.3.5

$$\mathrm{grad}\ \mathbf{F}(q,q) = \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{\Delta^2(\lambda^c)-4}}{W[\psi^+,\psi^-]}\begin{bmatrix}\psi_2^+(x;\lambda^c)\cdot\psi_2^-(x;\lambda^c)\\ -\psi_1^+(x;\lambda^c)\cdot\psi_1^-(x;\lambda^c)\end{bmatrix} \tag{6.3.81}$$

对于 **F** 的临界点，有如下定理：

定理 6.3.6　位势 q 为泛函 **F** 的一个临界点，当且仅当 $\lambda^c(q)$ 是一具几何重数为 2 的多重点。

从式(6.3.80)可得 grad **F**

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{q}} = \lim_{\lambda\to\nu}\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{\Delta^2-4}}{W[\Psi^+,\Psi^-]}\begin{bmatrix}\Psi_2^+\cdot\Psi_2^-\\ -\Psi_1^+\cdot\Psi_1^-\end{bmatrix} \tag{6.3.82}$$

其中 $\Psi^\pm(x,\lambda)$为在$(\boldsymbol{Q}_H,\nu)$上的 Floquet 基。利用 Bäckland 变换能求出这个极限。

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{q}} = C_\nu\,\frac{C_- C_- W[\Psi^-,\Psi^-]}{|\phi|^4}\begin{pmatrix}\phi_1^2\\ -\phi_2^2\end{pmatrix} \tag{6.3.83}$$

其中常数 C_ν 为

$$C_\nu \equiv \mathrm{i}(\nu-\bar{\nu})\sqrt{\Delta(\nu)\Delta''(\nu)}$$

取 $q_* = c\exp\{-\mathrm{i}[2(c^2-\omega^2)t-\gamma]\} = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则

$$\begin{cases}\dfrac{\delta F}{\delta q} = a\,\dfrac{[(\mp\sin p\cosh\tau \pm \mathrm{i}\cos p\sinh\tau)\cos x+1]}{[1\mp\sin p\,\mathrm{sech}\tau\cos x]^2}c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\\ \dfrac{\delta F}{\delta \bar{q}} = \overline{\dfrac{\delta F}{\delta q}}\end{cases} \tag{6.3.84}$$

其中 $\tau=\sigma(t-t_0)$，$\tan p=\sigma$，$\sigma=\sqrt{4c^2-1}$，$a=2\pi\sin^2 p\operatorname{sech}^2\tau$。从这个表达式可知

$$F'(q_h(t))\neq 0,$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}F'(q_h(t))\to 0$$

6.3.5 异宿轨道的不变性($\epsilon\geqslant 0$)

我们现建立对于扰动 NLS 方程在鞍点 Q 的同宿轨道的存在性

$$q_t=\mathrm{i}H'(q)+\epsilon G(q) \tag{6.3.85}$$

其中 $H'(q)=-q_{xx}-2(q\bar{q}-\omega^2)q$，$G(q)=-\alpha q-\beta\hat{B}q-1$，$\hat{B}$ 为有界耗散算子。我们用几何奇异摄动理论和构造 Melnikov 函数去证明这样轨道的存在性。证明分两步，即建立“第一测度量”和“第二测度量”。在第一测度量中，我们构造一个距离函数 Δ(不是 Floquet 判别式)，它的零点对应这样的轨线，它不在不变平面 Π_c 上，它向后渐近趋于鞍点 Q，向前渐近于 M_ϵ。第二个测度量由构成函数 d 组成，函数 d 的零点对应于这些轨线之一和纤维相交，纤维的基点在 Q 点的稳定流形之中。因此，从纤维的定义，Δ 和 d 同时为零，保证了 Q 点同宿轨道的存在性。

先建立第一测度量。不变平面 $\Pi_c\subset M\cap M_\epsilon$，$Q$ 在 Π_c 上有一个一维不稳定流形

$$q=(\omega^2+\sqrt{\epsilon}\,j_u(s))^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(s)}$$

令 q_b 为上面曲线对应 $s=s_0$ 的点，未扰动流具有在 $t=0$ 通过 q_b 的轨线 $q=r_b\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2(r_b^2-\omega^2)t-\theta_b)}$ 上。轨线 q_h 当 $t\to-\infty$时渐近于上面的轨线

$$q_h(t)=\left(\frac{\cos 2p-\mathrm{i}\sin 2p\tanh\tau+\sin p\operatorname{sech}\tau\cos x}{1-\sin p\operatorname{sech}\tau\cos x}\right)\times$$
$$r_b\exp\{-\mathrm{i}[2(r_b^2-\omega^2)t-\theta_b+2p]\}$$

其中

$$\tan p=\sqrt{4r_b^2-1},\ \tau=(\tan p)(t+t_0),$$

$$r_b e^{i\theta_b} = (\omega^2 + \sqrt{\varepsilon}\, j_u(s_b))^{\frac{1}{2}} e^{i\theta(s_b)}$$

当 $t\to\infty$ 时，q_h 渐近于

$$q_h(t) \to r_b e^{i(2(r_b^2-\omega^2)t-\theta_b+4p)}$$

它具有位相差 $-4p$，

$$e^{-4ip} = \left\{\frac{1-i\sqrt{4r_b^2-1}}{2r_b}\right\}^4$$

选取 t_0 使得轨线和 $q_b(0)$ 的距离为 δ 阶。

$$\| q_h(0) - q_b \|_{H^1} = \frac{\delta}{4}$$

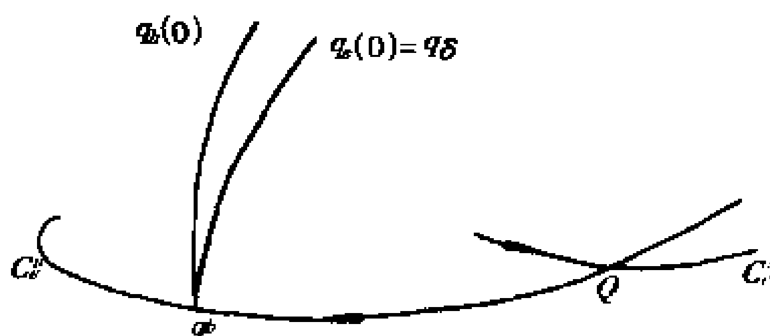


图 6.19　初始点在 W_ε^s 的纤维上

利用未扰动轨道 q_h 的明显表达式，可看到存在 $T_*(\delta)$ 使得 $\mathrm{dist}(q_h(t),S_\omega)\leqslant\frac{\delta}{4}$，$t\geqslant T_*$，$\varepsilon$ 很小。点 q_b 为长度是 δ 的纤维的基点。q_b 的 v 坐标为 $(0,0,v_c=\eta_c)$，$\eta_c=(\sqrt{\varepsilon}\, j_u(s_b),\theta_u(s_b),v_0=0)$。通过 q_b 的纤维能用参数表示：

$$\begin{aligned}
v_c &= f^u(\eta_c,\eta_u;\varepsilon),\\
v_u &= \eta_u + h_u^c(v_c;\varepsilon),\ 0\leqslant\eta_u\leqslant\delta,\\
v_s &= h_s(v_u,v_c;\varepsilon)
\end{aligned}$$

从方程(6.3.85)，$q_h(0)$ 属于未扰动纤维，即 $\varepsilon=0,\eta_u=\tilde{\eta}_u<\frac{\delta}{2}$。令 q_δ 为扰动纤维对应于 $\eta_u=\tilde{\eta}_u$ 的点(见图 6.19)，因函数 f 和 $h\in C^2(\varepsilon)$，有

$$\| q_\delta - q_h(0) \|_{H^1} \leqslant C\varepsilon$$

令 $q_\varepsilon(t)$为扰动方程具初值 $q_\varepsilon(0)=q_\delta$ 的解。从纤维的构造有 $q_\varepsilon(t)$ 当 $t\to-\infty$时渐近于 Q 点。由对初值的连续依赖性，对任何有限 T，$0\leqslant t\leqslant T$ 有

$$\| q_\varepsilon(t) - q_h(t) \|_{H^1} \leqslant C(T)\varepsilon \qquad (6.3.86)$$

定义

$$q_0 = q_h(T_*),\ q_t = q_\varepsilon(T_*)$$

点 $q_0\in W_0^{cs}$，因 $t\to\infty$时，有 $q_h\to\Pi_c$。q_0 和 Π_c 的距离$\leqslant\dfrac{\delta}{2}$

$$q_0 = r_b e^{-i(2(r_b^2-\omega^2)T_*-\theta_b+4\rho)} + \delta q_0$$

其中 $\| \delta q_0 \|_{H^1}\leqslant\dfrac{\delta}{2}$。由式(6.3.86)有

$$\| q_0 - q_t \|_{H^1} \leqslant C(\delta)\varepsilon < \frac{\delta}{4},$$

$$\text{dist}\ (q_t, s_\omega) \leqslant \frac{\delta}{2}, \varepsilon \text{ 很小}$$

q_t 和 W_ε^{cs} 的距离可用沿 W_0^{cs} 在 q_0 处的法向来测量。设流形 W_0^{cs} 可用图表示

$$v_u = h_u(v_s, v_c; 0)$$

其中函数 h_u 具有小的导数。因此，V_u 方向的向量 $V=(1,0,0)$是和 W_0^{cs} 横截的。向量 V 是在式(6.3.29)中给定的特征向量 $e_u(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}\,\omega}(1+i\sigma)\cos x$。$W_0^{cs}$ 具有特征$\{q\in H^1; F(q)+\tau=0\}$。因此 e_u 的横截性转换为

$$\langle F'(q_0), e_u\rangle \neq 0 \qquad (6.3.87)$$

以上为对偶对的速写

$$\langle \frac{\delta F}{\delta q}, \delta q\rangle + \langle \frac{\delta F}{\delta \bar{q}}, \delta \bar{q}\rangle$$

因 $h_u\in C^2$，则对在 q_0 的 ε 邻域的每个 q，通过 q 依方向 e_u 的直线和 W_ε^{cs} 相交于距 q 为 ε 的距离的一点。设 q_i 为通过 q_t 的直线和流形

W^u_ε 的交点。由式(6.3.87)能定义

$$\Delta = \langle F'(q_0), q_l - q_s \rangle$$

作为 q_l 和 q_s 距离的测度，如图 6.20 所示。

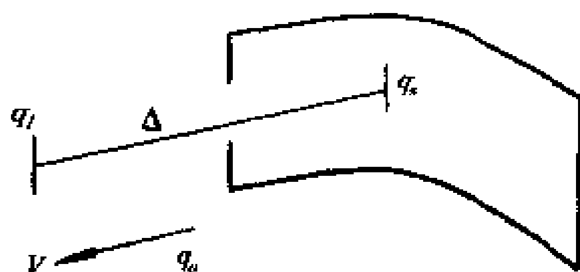


图 6.20　第一测度量图

为实际计算 Δ，定义轨线

$$q_*(t) = q_h(t + T_*),$$

$$q_u(t) = q_l(t + T_*), t \leqslant 0$$

对 $t \geqslant 0$，可定义 $q_l(t)$ 为截断流具初值 q_s 的解。当 $t \geqslant T_*$ 时，q_h 保留在 S_w 的 δ 邻域内，q_* 也是截断方程的解，当 $t = 0$ 时，所有轨线的初值均为 ε 阶。对 $t \leqslant -T_*$，轨线 q_u 和 q_* 保留在 S_w 的 δ 邻域中。因此对方程(6.3.35)和(6.3.86)应用 Gronwall 不等式得

$$\| q_u - q_* \|_{H^1} \leqslant C(\delta) e^{-\delta t} \varepsilon \tag{6.3.88}$$

对 $t \geqslant 0$，轨线 q_* 和 q_s 也是截断方程的解。再由 Gronwall 不等式有

$$\| q_s(t) - q_*(t) \|_{H^1} \leqslant C e^{\delta t} \varepsilon \tag{6.3.89}$$

引入测度量

$$\Delta^-(t) = \langle F'(q_*(t)), q_u(t) - q_*(t) \rangle, t \leqslant 0,$$

$$\Delta^+(t) = \langle F'(q_*(t)), q_s(t) - q_*(t) \rangle, t \geqslant 0,$$

$$\Delta = \Delta^-(0) - \Delta^+(0)$$

命题 6.3.6　距离 Δ 给定为

$$\Delta = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \langle F'(q_*(t)), G(q_*(t)) \rangle dt + O(\varepsilon^2)$$

证明　注意到 q_* 为 (x,t) 的光滑函数，而 $F'(q_*)$ 对 q_* 是光滑

的。由命题6.3.4知$F'(q_*)$在H^1中为t的C^1函数。因q_u和q为在H^{-1}中对t的C^1函数。由此推出Δ^+和Δ^-均为t的C^1函数,利用方程(6.3.85)的符号计算$\Delta^-(t)$的导数:

$$\dot{\Delta}^-(t) = \langle F''(q_*)\dot{q}_*, q_u - q_*\rangle + \langle F'(q_*), \dot{q}_u - \dot{q}_*\rangle =$$
$$\langle F''(q_*)\mathrm{i}H'(q_*), q_u - q_*\rangle +$$
$$\langle F'(q_*), \mathrm{i}H'(q_u) - \mathrm{i}H'(q_*) + \varepsilon G\rangle \tag{6.3.90}$$

非线性项$H'(q)$在q_*处展开并利用当$t\leqslant 0$时轨线q_u和q_*的有界性得

$$H'(q_u) - H'(q_*) = H''(q_*)(q_u - q_*) + R(q_u, q_*)$$
$$\| R \|_{H^1} \leqslant C \| q_u - q_* \|_{H^1}^2 \tag{6.3.91}$$

方程(6.3.90)可写为

$$\dot{\Delta}^- = \langle F''(q_*)\mathrm{i}H'(q_*), q_u - q_*\rangle +$$
$$\langle F'(q_*), \mathrm{i}H''(q_*)(q_u - q_*)\rangle,$$
$$+ \varepsilon\langle F'(q_*), G(q_u)\rangle + \langle F'(q_*), \mathrm{i}R\rangle$$

因$\{F(q), H(q)\}=0$。于是

$$\langle F''(q_*)\mathrm{i}H''(q_*), q_u - q_*\rangle + \langle F'(q_*), \mathrm{i}H'(q_*)(q_u - q_*)\rangle = 0$$

$\dot{\Delta}^-$的方程可简化为

$$\dot{\Delta}^- = \varepsilon\langle F'(q_*), G(q_u)\rangle + \langle F'(q_*), \mathrm{i}R\rangle$$

由式(6.3.84)、(6.3.88)和式(6.3.91)有

$$\| F'(q_*) \|_{H^1} \leqslant C\mathrm{e}^{\sigma t},\ t \leqslant 0,$$
$$\| q_u - q_* \|_{H^1} \leqslant C\mathrm{e}^{-\delta t}\varepsilon,\ t \leqslant 0,$$
$$\| R(t) \|_{H^1} \leqslant C\mathrm{e}^{-2\delta t}\varepsilon^2,\ t \leqslant 0$$

其中$2\delta<\sigma$,$\Delta^-(t)\to 0$,$t\to -\infty$。这就推出

$$\Delta^-(0) = \varepsilon\int_{-\infty}^{0}\langle F'(q_*), G(q_*)\rangle \mathrm{d}t + O(\varepsilon^2) \tag{6.3.92}$$

为得到Δ^+的类似表达式,可重复上面的证明。在q_*处展开截断方程,并利用$\{F(q_*), H(q_*)\}=0$,可得

$$\Delta^{+} = \langle F'(q_*), G\delta(q_\delta)\rangle + \langle F'(q_*), \mathrm{i}\tilde{R}\rangle,$$

其中 $\tilde{R}$ 为在 q_* 处截断流 $H'_\delta(q_\delta)$ 展开的余项。

$$\| \tilde{R} \|_{H^1} \leqslant C(\delta) \| q_\delta - q_* \|_{H^1}^2$$

这里 $G_\delta(q_\delta)$ 为在 q_δ 处截断的扰动。再从式(6.3.84)、(6.3.89)和式(6.3.91)有

$$\| F'(q_*) \|_{H^1} \leqslant Ce^{-\sigma t}, \ t \geqslant 0,$$

$$\| q_\delta - q_* \|_{H^1} \leqslant Ce^{\delta t}\varepsilon \ t \geqslant 0,$$

$$\| \tilde{R}(t) \|_{H^1} \leqslant Ce^{2\delta t}\varepsilon^2, \ t \geqslant 0$$

因此,可得

$$\Delta^{+}(0) = -\varepsilon\int_0^{\infty}\langle F'(q_*), G_\delta(q_\delta)\rangle \mathrm{d}t + O(\varepsilon^2) =$$

$$-\varepsilon\int_0^{\infty}\langle F'(q_*), G(q_*)\rangle \mathrm{d}t + O(\varepsilon^2)$$

距离 Δ 对 ε 展开得

$$\Delta = \Delta^{-}(0) - \Delta^{+}(0) = \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\langle F'(q_*), G(q_*)\rangle \mathrm{d}t + O(\varepsilon^2)$$

因 q_* 的基点依赖于 ε,

$$r_b e^{i\theta_b} = (\omega^2 + \sqrt{\varepsilon}\, j_\alpha(s_b))^{\frac{1}{2}} e^{i\theta(s_b)}$$

利用同宿轨道 $q_\omega(t)$,它具有基点 $\omega e^{i\theta_b}$,且 $q_\omega(t)$ 和 $q_*(t)$ 的距离为 $O(\sqrt{\varepsilon})$,利用 G 的明显表达式,我们可简化 Δ 的表达式。

推论 6.3.3 距离 Δ 可依 ε 展开为

$$\begin{cases} \Delta = \varepsilon M(\alpha, \beta, \theta_b) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}), \\ M(\alpha, \beta, \theta_b) = \int_{-\infty}^{\infty}\langle F'(q_\omega(t)), G(q_\omega(t))\rangle \mathrm{d}t \\ \qquad = -[\alpha M_\alpha + \beta M_\beta + M(\theta_b)] \end{cases} \tag{6.3.93}$$

其中

$$M_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty}\langle F'(q_\omega(t)), q_\omega(t)\rangle \mathrm{d}t,$$

$$M_\beta = \int_{-\infty}^{\infty} \langle F'(q_\omega(t)), \hat{B} q_\omega(t) \rangle \mathrm{d}t,$$

$$M(\theta_b) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle F'(q_\omega(t)), 1 \rangle \mathrm{d}t$$

从上面的推论可知，为找 Δ 的零点，充分地找 $M(\alpha,\beta,\theta_b)$的非退化零点，再利用隐函数定理，M 对 θ_b 的依赖能由式(6.3.84)给定的 F'的明显公式计算得到。

$$\frac{\delta F}{\delta q} = 2\pi \sin^2 p \operatorname{sech}^2 \tau \times$$

$$\frac{[(-\sin p \cos h\, \tau + \mathrm{i} \cos p \sin h\, \tau)\cos x + 1]}{(1 - \sin p \operatorname{sech} \tau \cos x)^2} c e^{\mathrm{i}\theta}$$

可得

$$M(\theta_b) = \cos(\theta_b - 2p_0) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \frac{4\pi\omega \sin^2 p_0 \operatorname{sech} \tau}{\sigma A^2} \times$$

$$(\operatorname{sech} \tau - \sin p_0 \cos x)$$

其中 $p_0 = \arctan \sqrt{\omega^2 - 1}$，$A = 1 - \sin p_0 \operatorname{sech} \tau \cos x$。

设 M_α 或 M_β 非零，则函数

$$-M(\alpha,\beta,\theta_b) = \alpha M_\alpha + \beta M_\beta + M_0 \cos(\theta_b - 2p_0) \tag{6.3.94}$$

具有非退化零点。这就推出能选取参数使得 $\Delta = 0$，即

$$q_t = q_s \in W_\epsilon^{cs}$$

现考虑第二测度量。首先，未扰动轨线 $q_*(t) = q_h(t + T_*)$，当 $t \to \infty$时，它渐近于轨线

$$r_b e^{-\mathrm{i}(2(r_b^2 - \omega^2)(t - T^*) - \theta_b + 4p)}$$

由此推出 $q_0 = q_h(T^*)$属于未扰动纤维，它的基点为

$$q_{0,b} = r_b e^{-\mathrm{i}(2(r_b^2 - \omega^2)T^* - \theta_b + 4p)}$$

点 $q_t \in W_\epsilon^{cs}$ 属于扰动纤维，它的基点 $q_{t,b} \in M_\epsilon$ 不必要在平面 Π_ϵ 上。q_{0b}和 q_{tb}的距离为 $O(\epsilon)$，如图 6.21 所示。

点 q_0 具有 v 坐标

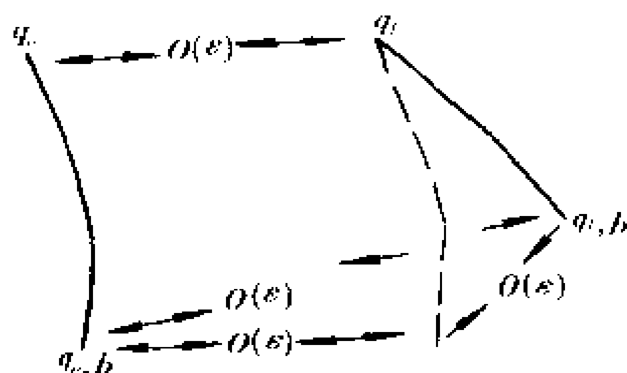


图 6.21 纤维的基点

$$v_{0,c} = f^s(\eta_{0,s}, \eta_{0,c}; 0),$$

$$v_{0,s} = \eta_{0,s} + h_s^c(v_{0,c}; 0),$$

$$v_{0,u} = h_u(v_{0,s}, v_{0,c}; 0)$$

其中 $\eta_{0,s} \in [-\delta, \delta]$，$\eta_{0,c} = (\sqrt{\varepsilon}\, j_u(s_b), 2(r_b^2 - \omega^2)T^* - \theta_b + 4p, 0)$。基点 $q_{0,b}$ 对应上面方程中的 $\eta_s = 0$。函数 f^s 和 h_s^c 为 C^1 函数，且为可逆的，点 q_0 和 q_l 的距离为 $O(\varepsilon)$。因此由反函数定理，点 q_l 具有参数 $(\eta_{l,c}; \eta_{l,s})$，它和 $(\eta_{0,c}, \eta_{0,s})$ 的距离为 $O(\varepsilon)$。基点 $q_{l,b}$ 具有 v 坐标

$$v_{l,c} = f^s(\eta_{l,c}, 0; \varepsilon),$$

$$v_{l,s} = h_s^c(v_{l,c}; \varepsilon),$$

$$v_{l,u} = h_u(v_{l,s}, v_{l,c}; \varepsilon)$$

它和 $q_{0,l}$ 的 v 坐标距离为 $O(\varepsilon)$。于是有

$$\| q_{0,b} - q_{l,b} \|_{H^1} = O(\varepsilon) \tag{6.3.95}$$

为构造从 $q_{l,b} \in M$ 到 Q 的稳定流形 W 的距离，对曲线 $C_\varepsilon^s \subset W \cap \Pi_c$，在 $y = (j, \theta)$ 坐标中，可表为 $y_*(s, \sqrt{\varepsilon})$，$s \in [0, s_0]$。作为 z，$z = (\omega^2 + \sqrt{\varepsilon}\, j)^{\frac{1}{2}} e^{i\theta}$，$C_\varepsilon^s$ 可表为

$$z_*(s; \sqrt{\varepsilon}) = (\omega^2 + \sqrt{\varepsilon}\, j_0(s))^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_0(s)} + O(\varepsilon)$$

其中 $(j_0(s), \theta_0(s))$ 为未扰动 (j, θ) 方程的平面同宿轨道。流形 M_ε 和 W 可由以下给定：

$$M_\varepsilon = \{v \in H^1 : v_u = h_\varepsilon^u(v_0;\varepsilon), v_s = h_\varepsilon^s(v_0;\varepsilon)\},$$

$$W = \{v \in M_\varepsilon : r = g(s, v_0;\varepsilon)\}$$

其中 $s \in [0, s_0]$，$\| v_0 \|_{H^1} \in [0, \varepsilon^{\frac{3}{4}}]$。这里 r 表示在平面 Π_ε 上从点 y 到曲线 C_ε^s 的欧氏距离。对每个点 $q \in M_\varepsilon$，它和 Π_ε 距离为 $O(\varepsilon)$，和 S_ω 距离为 $O(\sqrt{\varepsilon})$，相关的点$\tilde{q} \in W$，如图 6.22 所示。

这里 q 可用坐标$(z_q, v_{q,0})$表示，$z_q = (\omega^2 + \sqrt{\varepsilon}\, j_q)e^{i\theta_q}$，在 $y=(j,\theta)$坐标中，令 $y_*(s_q) \in C_\varepsilon^q$ 表示由 $y_q = (j_q, \theta_q)$到 C_ε^s 的点。由隐函数定理，这样的点存在唯一，只要(j_q, θ_q)在 C_0^s 的一个确定邻域 O 内。在 y_q 到 $y_*(s_q)$的连线上，$y_{\tilde{q}}$为其上的一点，它和 $y_*(s_q)$的距离为 $r_{\tilde{q}} := g(s_q, v_q; \sqrt{\varepsilon})$。在平面 Π_ε 上，这点具有坐标 $z_{\tilde{q}} = (\omega^2 + \sqrt{\varepsilon}\, j_{\tilde{q}})e^{i\theta_{\tilde{q}}}$，$\tilde{q} \in W$，这一点对应于$(z_{\tilde{q}}, v_{q,0})$。

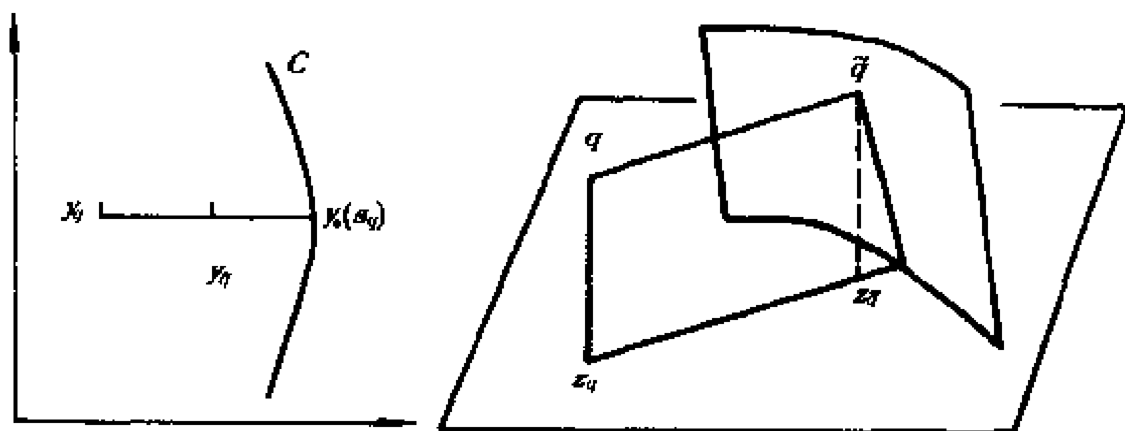


图 6.22 q 到 $\tilde{q}$ 的映照

为了测量 q 到 $\tilde{q}$的距离，引入函数

$$d(q) = E(y_q) - E(y_{\tilde{q}})$$

其中 E 为未扰动 ODE(式(6.3.12))确定的 Hamilton：

$$E(j,\theta) = \frac{1}{2}j^2 - \omega(\sin\theta + \alpha\omega\theta)$$

命题 6.3.7 映照 $q \to \tilde{q}$具有一个不动点当且仅当 $d(q)=0$，且 $d(q)$具有表达式为

$$d(q) = E(j_q, \theta_q) - E_0 + O(\sqrt{\varepsilon})$$

证明 为证 d 的零点对应于 $q \to \tilde{q}$ 的不动点，我们注意到在 C_0^s 的一个邻域，E 的水平集和 C_ε^s 的法线相交仅有一点。因此，y_q 和 $y_*(s_q)$ 的连线为 C_ε^s 的法线。我们能用 E 来表示距离，$E(y_q) = (E(y_{\tilde{q}})$，推出 $y_q = y_{\tilde{q}}$ 或 $z_q = z_{\tilde{q}}$。因 q 和 $\tilde{q}$ 的 v_0 坐标是一样的，推出 $d(q) = E(y_q) - E(y_{\tilde{q}})$ 的零点对应于 $q \to \tilde{q}$ 的不动点。

为得到 $d(q)$ 的展开式，注意到

$$|y_{\tilde{q}} - y_*(s_q)| = |r_{\tilde{q}}| = O(\varepsilon)$$

从式(6.3.67)有 $|r_{\tilde{q}}| = O(\varepsilon)$。而 $y_*(s_q)$ 和未扰动稳定流形 C_0^s 的距离为 $O(\sqrt{\varepsilon})$。因此

$$E(y_{\tilde{q}}) = E(y_*(s_q)) + O(\varepsilon) = E_0 + O(\sqrt{\varepsilon})$$

这就完成了命题 6.3.7 的证明。

我们用函数 d 测量 q_{lb} 到 W 的距离。从式(6.3.95)得出 $q_{l,b}$ 和 $q_{0,b}$ 距离为 $O(\varepsilon)$。推之

$$d(q_{l,b}) = d(q_{0,b}) + O(\varepsilon)$$

因 $q_{0,b}$ 的基点为

$$r_b e^{i(\theta_b - 4p)} = (\omega^2 + \sqrt{\varepsilon}\, j_u(s_b))^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_b - 4p)}$$

我们有如下的推论：

推论 6.3.4 $q_{l,b}$ 到 W 的距离可用以下测量

$$d(q_{l,b}) = \omega[2\sin 2p_0 \cos(\theta_b - 2p_0) + 4a\omega p_0] + O(\sqrt{\varepsilon})$$

证明 从 d 的定义，有

$$d(q_{0,b}) = E(j_u(s_b), \theta_b - 4p) - E_0$$

因 $q_{0,b} \in C_\varepsilon^u$ 它对 C_0^u 的扰动为 $O(\sqrt{\varepsilon})$。于是有

$$E(j_u(s_b), \theta_b) - E_0 = O(\sqrt{\varepsilon})$$

由此推出

$$d(q_{0,b}) = E(j_u(s_b), \theta_b - 4p) - E(j_u(s_b), \theta_b) + O(\sqrt{\varepsilon}) =$$

$$-\omega[\sin(\theta_b - 4p) - \sin\theta_b + 4a\omega p] + O(\sqrt{\varepsilon}) =$$

$$\omega[2\sin 2p \cos(\theta_b - 2p) + 4a\omega p] + O(\sqrt{\varepsilon})$$

最后，注意到

$$p=\arctan(r_b^2-1)^{\frac{1}{2}}=\arctan(\omega^2-1)^{\frac{1}{2}}+O(\sqrt{\varepsilon})=$$

$$p_0+O(\sqrt{\varepsilon})$$

即得推论的结论。

固定 $\alpha\in(0,\frac{1}{\omega})$，考虑 M 和 $\tilde{d}$ 作为 θ_b 和 β 的函数

$$M(\alpha,\beta,\theta_b)=\alpha M_\alpha+\beta M_\beta+M_0\cos(\theta_b-2p_0),$$

$$\tilde{d}(\theta_b,\alpha)=2\sin 2p_0\cos(\theta_b-2p_0)+4\alpha\omega p_0$$

为了证明在 Q 上同宿轨道的存在性，充分证明 M 和 $\tilde{d}$ 在非退化情况下（$\beta>0,\theta_b\in(\theta_{\min},\theta_0)$）消失。对于在平面上非扰动的同宿轨道 θ 的变化范围为

$$\theta_0=\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2\omega^2}}{\alpha\omega}\right)-\pi,$$

$$\sin(\theta_{\min})+\alpha\omega\theta_{\min}=\sin\theta_0+\alpha\omega\theta_0,\ \theta_{\min}<\theta_0$$

为使 $\tilde{d}$ 消失，α 的变化范围取为

$$(0,\alpha_*):=\left(0,\frac{1}{\omega}\right)\cap\left(0,\frac{2\omega p_0}{\sin 2p_0}\right)$$

如 $M_\beta\neq 0$，能在这点上解 $\tilde{d}=0,M=0$，

$$\cos(\theta_b-2p_0)=-\frac{2\alpha\omega p_0}{\sin 2p_0}\tag{6.3.96}$$

$$\beta=-\frac{\alpha\left[M_\alpha+\dfrac{2\omega p_0}{\sin 2p_0}M_0\right]}{M_\beta}\tag{6.3.97}$$

由隐函数定理，对小的 ε 在由式(6.3.96)、(6.3.97)所定义的点的小邻域内能解 $d=\Delta=0$。

定理 6.3.7 固定 $\omega\in(\frac{1}{\sqrt{2}},1)$，$\alpha\in(0,\alpha_*)$ 如 θ_b 和 β 由式(6.3.96)给定，$\theta_b\in(\theta_{\min},\theta_0)$，$\beta>0$。则对小的 ε，方程(6.3.85)具有同宿轨道的对称对。

证明 由隐函数定理，对小的 ε，在式(6.3.96)所确定的点的

小邻域内能解 $d=\Delta=0$。因 $d=0$，点 q_l 位于一纤维上，这纤维的基点 $q_{l,b}\in W$，即 Q 点的稳定流形。因此轨道 $q_s(t)(t\geqslant 0)$保留在 S_ω 的小邻域内。这就推出 $q_s(t)$为原来方程的解。轨道

$$q(t)=\begin{cases}q_u(t),\ t\leqslant 0,\\ q_s(t),\ t\geqslant 0\end{cases}$$

同宿于 Q 点。因未扰动方程组有两条同宿轨道 $q_h^{\pm}$，因此得出对称对的存在性。

6.4 无穷维的中心流形理论

在有限维情况下，中心流形理论它可化约维数，导致更简单的计算以及更好的几何图象。在无穷维情况下，中心流形理论如何建立？有什么不同的性质？在文献[208]等工作中进行了一系列的研究，我们这里只介绍其一般结果，而更注重某些实际例子的应用。

设 X，Y 和 Z 为 Banach 空间，X 连续嵌入到 Y，Y 连续嵌入到 Z。设 $A\in\mathscr{L}(X,Z)$，$g\in C^k(X,Y)$，$k\geqslant 1$。考虑如下形式的微分方程

$$\dot{X}=Ax+g(x) \tag{6.4.1}$$

式(6.4.1)的解意味着一个连续可微映照 $x:I\to Z$，其中 I 为开区间，使得如下性质成立：

(i) $x(t)\in X$，$\forall\ t\in I$，$x:I\to X$ 是连续的；

(ii) $\dot{x}(t)=Ax(t)+g(x(t))$，$\forall\ t\in I$。

设 E 和 F 为 Banach 空间 $V\subset E$ 为开子集，$k\in\mathbf{N}$，$\eta\geqslant 0$，定义

$$C_b^k(V;F)=\{w\in C^k(V;F)\mid$$

$$|w|_{j,V}\overset{\text{def}}{=\!=}\sup_{x\in V}\|D^jw(x)\|<\infty,0<j<k\},$$

$$C_b^{0,1}(E;F)=\{w\in C^{0,1}(E;F)\mid$$

$$|w|_{\text{Lip}}\overset{\text{def}}{=\!=}\sup_{x,y\in E,x\neq y}\frac{\|w(x)-w(y)\|}{\|x-y\|}<\infty\}$$

当 $V=E$ 时，记 $|w|_{\gamma}$ 为 $|w|_{\gamma,E}$。

$$BC^{\eta}(\mathbf{R};E)\overset{\text{def}}{=}\{w\in C^{0}(\mathbf{R},E)\mid$$

$$\|w\|_{\eta}\overset{\text{def}}{=}\sup_{t\in\mathbf{R}}e^{-\eta|t|}\|w(t)\|_{E}<\infty\}$$

对 A 的基本假定：

假设 (H)：存在一个到有限维子空间 $Z_c=X_c\subset C$ 的连续投影 $\Pi_c\in\mathscr{L}(Z;X)$，使得

$$A\Pi_c x=\Pi_c Ax,\ \forall x\in X$$

如果置

$$Z_h\overset{\text{def}}{=}(I-\Pi_c)(Z),X_h\overset{\text{def}}{=}(I-\Pi_c)(X),$$

$$Y_h\overset{\text{def}}{=}(I-\Pi_c)(Y),$$

$$A_c\overset{\text{def}}{=}A|_{X_c}\in\mathscr{L}(X_c),A_h\overset{\text{def}}{=}A|_{X_h}\in\mathscr{L}(X_h,Z_h)$$

以下性质成立：

(i) $\sigma(A_c)\subset\mathrm{i}\mathbf{R}$（$\sigma(A)$ 表示 A 的谱）；

(ii) 存在 $\beta>0$，使得 $\forall\ \eta\in[0,\beta)$，$f\in BC^{\eta}(\mathbf{R};Y_h)$，线性问题

$$\dot{x}_h=A_hX_h+f(t),x_h\in BC^{\eta}(\mathbf{R};X_h)\qquad(6.4.2)$$

具有唯一解 $x_h=K_hf$，其中 $K_h\in\mathscr{L}(BC^{\eta}(\mathbf{R};Y_h);BC^{\eta}(\mathbf{R};X_h))$，$\forall\eta\in[0,\beta)$，有

$$\|K_h\|_{\eta}\leqslant r(\eta),\forall\ \eta\in[0,\beta)\qquad(6.4.3)$$

$r:[0,\beta)\to\mathbf{R}$ 为连续函数。

利用等价的积分方程，在文献[208]中证明了以下定理：

定理 6.4.1 设 (H) 成立，则存在 $\delta_0>0$，使得对一切 $g\in C_b^{0,1}(X,Y)$，满足

$$|g|_{\mathrm{Lip}}<\delta_0\qquad(6.4.4)$$

则存在唯一的 $\psi\in C_b^{0,1}(X_c,X_h)$ 具有如下性质：

(i) $\tilde{x}:\mathbf{R}\to X$ 为式(6.4.1)的解，$\tilde{x}\in BC^{\eta}(\mathbf{R};X)$，$\eta\in(0,\beta)$；

(ii) $\Pi_h\tilde{x}(t)=\psi(\Pi_c\tilde{x}(t))$，$\forall t\in\mathbf{R}$。$\Pi_c\tilde{x}:\mathbf{R}\to X_c$ 为常微分方程

$$\dot{x}_c = A_c x_c + \Pi_c g(x_c + \psi(x_c)) \tag{6.4.5}$$

的解。

定义 6.4.1 称

$$M_c \stackrel{\text{def}}{=} \{x_c + \psi(x_c)|_{x_c \in X_c}\} \subset X \tag{6.4.6}$$

为式(6.4.1)的唯一整体中心流形。

定理 6.4.2 设(H)成立，则存在$\delta_k > 0 (\forall k \geqslant 1)$，使得如果$g \in C^{0,1}{}_b(X,Y) \cap C_b^k(V_\rho, Y)$，$V_\rho = \{x \in X \mid \| \Pi_h x \mid < \rho\}$，$\rho > \| K_h \|_0 |\Pi_h g|_0$和

$$|g|_{\text{Lip}} < \delta_k \tag{6.4.7}$$

则定理 6.4.1 给定的映照$\psi \in C_b^k(X_c; X_h)$。如$g(0) = 0$，$Dg(0) = 0$，则有$\psi(0) = 0$，$D\psi(0) = 0$。

定理 6.4.3 设(H)成立，$g \in C^k(X;Y)$，$k \geqslant 1$。$g(0) = 0$，$Dq(0) = 0$。则存在X中原点的一个邻域和一个映照$\psi \in C_b^k(X_c; X_h)$，$\psi(0) = 0$，$D\psi(0) = 0$，使得如下性质成立：

(i) 如$\tilde{x}_c : I \to X_c$为式(6.4.5)的一个解，使得$\tilde{x}(t) := \tilde{x}_c(t) + \psi(\tilde{x}_c(t)) \in \Omega$，$\forall t \in I$，则$\tilde{x} : I \to X$为式(6.4.1)的一个解。

(ii) 如$\tilde{x} : \mathbf{R} \to X$为式(6.4.1)的一个解，使得$\tilde{x}(t) \in \Omega$，$\forall t \in \mathbf{R}$则

$$\Pi_h \tilde{x}(t) = \psi(\Pi_c \tilde{x}(t)), \forall t \in \mathbf{R}$$

和$\Pi_c \tilde{x} : \mathbf{R} \to X_c$为式(6.4.5)的一个解。

为了利用谱理论，给出满足(H)的更具体明确的条件，给出假设(Σ)：

(i) $\sigma(A) \cap \mathrm{i}\mathbf{R}$由有限个离散特征值组成，每一个具有有限维的广义特征空间；

(ii) 存在常数$\omega_0 > 0$，$c > 0$，$\alpha \in [0, 1)$，使得对于一切$\omega \in \mathbf{R}$，$|\omega| \geqslant \omega_0$，有$\mathrm{i}\omega \in \rho(A)$

$$\| (\mathrm{i}\omega - A)^{-1} \|_{\mathscr{L}(Z)} \leqslant \frac{C}{|\omega|} \tag{6.4.8}$$

$$\|(\mathrm{i}\omega - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(Y;X)} \leqslant \frac{C}{|\omega|^{1-\alpha}} \tag{6.4.9}$$

定理 6.4.4 设(Σ)成立，$\eta \in [0,\beta)$，则方程

$$\dot{x}_h = A_h x_h + f(t) \tag{6.4.10}$$

对任何 $f \in BC^{\eta}(\mathbf{R};Y_h)$，有唯一解 $\tilde{x}_h \in BC^{\eta}(\mathbf{R};X_h)$，其中

$$\tilde{x}_h(t) = (K_h f)(t) \overset{\text{def}}{=\!=} \int_{-\infty}^{t} S_+(t-s)f(s)\mathrm{d}s - $$

$$\int_{t}^{\infty} S_-(t-s)f(s)\mathrm{d}s \tag{6.4.11}$$

这里

$$S_{\pm}(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_{\pm}} \mathrm{e}^{\lambda t}(\lambda - A_h)^{-1}\mathrm{d}\lambda \tag{6.4.12}$$

$\Gamma_{\pm} \overset{\text{def}}{=\!=} \{\mp\delta|\omega| + \mathrm{i}\omega|_{\omega\in\mathbf{R}}\}$，$\delta>0$。更进一步，存在连续函数 $r:[0,\beta) \to \mathbf{R}_+$，使得

$$\|K_h\|_{\mathscr{L}(BC^{\eta}(\mathbf{R};Y_h);BC^{\eta}(\mathbf{R};X_h))} < r(\eta),\ \forall \eta \in [0,\beta)$$

适当选取 Y 空间，可以证明假设(Σ)能推出假设(H)。以下举几个例子，验证假设(Σ)成立，同时中心流形的理论结果均成立。

例 1 考虑抛物型方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + g\left(x, \dfrac{\partial u}{\partial x}\right), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbf{R} \end{cases} \tag{6.4.13}$$

设 $g \in C^{k+1}(\mathbf{R}^2;\mathbf{R})$，$k \geqslant 1$，$g(u,v) = O(|u|^2 + |v|^2)$，$(u,v) \to (0,0)$。再写式(6.4.13)为所需要的算子形式。令 $z = L^2(0,\pi)$，$X = H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)$。定义 $A \in \mathscr{L}(X;Z)$ 为

$$Au = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + u = (D^2+1)u \tag{6.4.14}$$

其中 $D \overset{\text{def}}{=\!=} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$。因 $H^1(0,\pi) \subset C^0([0,\pi])$，对任何 $u \in X$，$g(u,Du)$，$\left(\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)(u,Du) \in C^0([0,\pi])$。由此推出映照

$$u \mapsto g(u,Du) \in C^k : X \to Y = H^1(0,\pi)$$

我们要证明 A 满足假设(Σ)。

事实上,A 的谱是已知的,它由简单特征值 $\lambda_n \stackrel{\text{def}}{=} 1-n^2$ 组成,$n=1,2,\cdots$。对应于特征函数 $u_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sin nx$。正好有一个简单特征值在虚轴上,如 $\lambda_1=0$。其次令 $\lambda\in\rho(A)$,$v\in Z=L^2(0,\pi)$,$u \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda-A)^{-1}v\in X$,则有

$$-D^2u+(\lambda-1)u=v \tag{6.4.15}$$

式(6.4.15)乘以$\bar{u}$,并在$(0,\pi)$上积分得

$$\| Du\|_{L^2}^2+(\lambda-1)\| u\|_{L^2}^2=\int_0^\pi v\bar{u}\mathrm{d}x \tag{6.4.16}$$

取 $\lambda=\mathrm{i}\omega$,$\omega\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$,考虑式(6.4.16)的虚部有

$$|\omega|\,\| u\|_{L^2}^2\leqslant \| v\|_{L^2}\| u\|_{L^2}$$

因此

$$\|(\mathrm{i}\omega-A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(Z)}\leqslant|\omega|^{-1},\ \forall\omega\in\mathbf{R}\backslash\{0\} \tag{6.4.17}$$

考虑方程

$$-D^2u+s^2u=v,\ s\in\mathbf{R} \tag{6.4.18}$$

设$|s|>1$。由傅氏级数可知,方程(6.4.18)对任何$v\in H^m(0,\pi)$($m\geqslant-1$)具有唯一解 $u\in H^{m+2}(0,\pi)\cap H_0^1(0,\pi)$。记 $\| u\|_m = \| u\|_{H^m(0,\pi)}$,$|u|_m \stackrel{\text{def}}{=} \| D^mu\|_{L^2(0,\pi)}$。取 $v\in H^{-1}(0,\pi)$,$u\in H_0^1(0,\pi)$,则式(6.4.18)解出

$$|u|_1^2+s^2\| u\|_0^2\leqslant\| v\|_{-1}\| u\|_1$$

因此

$$\| u\|_1\leqslant\| v\|_{-1},\ s\| u\|_0\leqslant\| v\|_{-1} \tag{6.4.19}$$

再取 $v\in L^2(0,\pi)$,$u\in H^2(0,\pi)\cap H_0^1(0,\pi)$。作式(6.4.18)和 u 的 L^2 内积得

$$|u|_1^2+s^2\| u\|_0^2\leqslant\| v\|_0\| u\|_0$$

由此推出

$$|s|^2\| u\|_0\leqslant\| v\|_0,\ |s|\,\| u\|_1\leqslant\| v\|_0 \tag{6.4.20}$$

作式(6.4.18)和 D^2u 的 L^2 内积得

$$|u|_2^2 + s^2\|u\|_1^2 \leqslant \|v\|_0|u|_2 \qquad (6.4.21)$$

因此 $|u|_2 \leqslant \|v\|_0$ 和式(6.4.20)联立得

$$\|u\|_2 \leqslant C\|v\|_0, C > 0 \qquad (6.4.22)$$

如 $v \in H^1(0,\pi)$，可写式(6.4.21)为

$$|u|_2^2 + s^2|u|_1^2 \leqslant |v|_1|u|_1 + |v(0)\|Du(0)| + |v(\pi)\|Du(\pi)| \qquad (6.4.23)$$

令 $\theta \in C^\infty([0,\pi],\mathbf{R})$，使得 $\theta(0)=1,\theta(\pi)=0$，则有

$$v(0) = -\int_0^\pi (D\theta \cdot v + \theta Dv)\mathrm{d}x$$

因此 $|v(0)| \leqslant C_1|v|_1$。类似地有 $|v(\pi)| \leqslant C_1|v|_1$。则由式(6.4.20)和式(6.4.23)推出

$$|u|_2^2 \leqslant C_1(|Du(0)| + |Du(\pi)|)\|v\|_1 + s^{-1}\|v\|_1^2 \qquad (6.4.24)$$

为了估计 $Du(0)$ 和 $Du(\pi)$，取式(6.4.18)和 θ_4 的内积，考虑实部且分部积分得

$$|Du(0)|^2 = -\int_0^\pi D\theta|Du|^2\mathrm{d}x + s^2\int_0^\pi D\theta|u|^2\mathrm{d}x - \int_0^\pi[D(\theta\bar{v})u + D(\theta v)\bar{u}]\mathrm{d}x$$

由式(6.4.20)有

$$|Du(0)|^2 \leqslant C_2 s^{-2}\|v\|_1^2$$

类似地能得到 $|Du(\pi)|$ 估计，由式(6.4.24)和式(6.4.20)有

$$\|u|_2 \leqslant C_3 s^{-\frac{1}{2}}\|v\|_1 \qquad (6.4.25)$$

现转到式(6.4.15)。取 $\lambda=\mu\in\mathbf{R},\mu>2$。和式(6.4.18)比较并利用式(6.4.25)得

$$\|(\mu - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(Y,X)} \leqslant C_3\mu^{-\frac{1}{4}}, \forall \mu \in \mathbf{R}, \mu > 2 \qquad (6.4.26)$$

最后，利用等式

$$(\mathrm{i}\omega - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \mathrm{i}\omega)(\mathrm{i}\omega - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}$$

由式(6.4.17),并取 $\mu=|\omega|$,得

$$\|(\mathrm{i}\omega - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(Y;X)} \leqslant C|\omega|^{-\frac{1}{4}},\ \forall \omega \in \mathbf{R}, |\omega| \geqslant 2 \tag{6.4.27}$$

这就推出算子 A 满足假设(Σ),$\alpha=\dfrac{3}{4}$。

例 2 椭圆型方程问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu u + g\left(u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \\ u(x,0) = u(x,\pi) = 0,\ \forall x \in \mathbf{R}, (x,y) \in \mathbf{R} \times (0,\pi) \end{cases} \tag{6.4.28}$$

设 $g \in C^{k+1}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})(k \geqslant 1)$,$g(u,v,\omega)=O(|u|^2+|v|^2+|\omega|^2)$,$(u,v,\omega)\to 0$。固定 $\mu_0 \in \mathbf{R}$,令 $\mu=\mu_0+\nu$。写式(6.4.28)为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\nu u_1 - g(u_1, u_2, Du_1) \end{pmatrix} \tag{6.4.29}$$

则有 $A \in \mathscr{L}(X;Z)$。其中 $Z \overset{\text{def}}{=\!=} H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$,$X \overset{\text{def}}{=\!=} H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi) \times H_0^1(0,\pi)$。映照$(u_1,u_2) \mapsto (0, -\nu u_1 - g(u_1,u_2,Du_1)) \in C^k: X \to Y \overset{\text{def}}{=\!=} H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi) \times H_0^1(0,\pi)$。

对固定的 $\lambda \in \mathbf{C}$,$v=(v_1,v_2) \in Z$,考虑方程

$$Au = \lambda u + v \tag{6.4.30}$$

或更详细一点,$u=(u_1,u_2)$有

$$\begin{cases} u_2 = \lambda u_1 + v_1, \\ -D^2 u_1 - \mu_0 u_1 = \lambda u_2 + v_2 \end{cases} \tag{6.4.31}$$

消去 u_2 得

$$-D^2 u_1 - (\lambda^2 + \mu_0) u_1 = \lambda v_1 + v_2 \tag{6.4.32}$$

如果这个方程对任何 $v \in Z$ 有唯一解 $u_1 \in H^1(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)$,则式(6.4.30)具有唯一解 $u \in X$,且 λ 在 A 的预解集中。因此

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \lambda^2 + \lambda_0 = n^2,\ n = 1,2,\cdots\} =$$

$$\{\lambda_{\pm n} \overset{\text{def}}{=\!=} \pm\sqrt{n^2-\mu_0}\,|\,n=1,2,\cdots\} \tag{6.4.33}$$

对应于特征值 $\lambda_{\pm n}$ 的特征函数为

$$\Phi_{\pm n}(y)=\begin{pmatrix}\sin ny\\ \lambda_{\pm n}\sin ny\end{pmatrix},n\geqslant 1$$

如 $n^2\neq\mu_0$，则 $\lambda_{\pm n}$ 为简单特征值；如 $n^2=\mu_0$，则 $\lambda_{\pm n}=0$ 为非简单的，因方程(6.4.31)对 $(v_1,v_2)=(\sin ny,0)$ 具有唯一解 $(u_1,u_2)=(0,\sin ny)$，$\lambda_{+n}=0$ 具有二重代数重数。

设 $\mu_0\in[m^2,(m+1)^2)$，$m\geqslant 1$，则 $\operatorname{Re}\lambda_{\pm n}=0$，$1\leqslant n\leqslant m$；$\operatorname{Re}\lambda_{\pm n}\neq 0$，$n>m$. 更详细一点有

$$|\operatorname{Re}\lambda_{\pm n}|\geqslant\beta:=\sqrt{(m+1)^2-\mu_0},\ \forall n\geqslant m+1$$

这就推出中心子空间 X_c 为 $2m$ 维的，为了验证 A 满足假设(Σ)，再利用对方程(6.4.18)的估计式(6.4.19)～(6.4.25)，考虑式(6.4.30)或式(6.4.31)，对 $\lambda=\mathrm{i}\omega$，$\omega\in\mathbf{R}$，$\omega^2\geqslant\mu_0+1$。先取 $v_1=0$，$v_2\in L^2(0,\pi)$，则由式(6.4.32)、(6.4.20)得

$$(\omega^2-\mu_0)\|u_1\|_0\leqslant\|v\|_0,(\omega^2-\mu_0)^{\frac{1}{2}}\|u_1\|_1\leqslant\|v_2\|_0$$

因 $u_2=\mathrm{i}\omega u_1$，推出

$$\|u_2\|_0\leqslant\frac{|\omega|}{\omega^2-\mu_0}\|v_2\|_0\leqslant\frac{C_1}{|\omega|}\|v_2\|_0,$$

$$\|u_1\|_1\leqslant\frac{1}{(\omega^2-\mu_0)^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_0\leqslant\frac{C_2}{|\omega|}\|v_2\|_0$$

其中 C_1,C_2 为常数，与 ω 无关，再取 $v_2=0$，$v_1\in H_0^1(0,\pi)$，从式(6.4.31)消去 u_1 可得在 $H^{-1}(0,\pi)$ 中的方程

$$-D^2u_2+(\omega^2-\mu_0)u_2=-D^2v_1-\mu_0v_1 \tag{6.4.34}$$

由式(6.4.19)得

$$\|u_2\|_1\leqslant\|D^2v_1+\mu_0v_1\|_{-1}\leqslant C_3\|v_1\|_1,$$

$$(\omega^2-\mu_0)^{\frac{1}{2}}\|u_2\|_0\leqslant C_3\|v_1\|_1$$

因 $u_1=(\mathrm{i}\omega)^{-1}(u_2-v_1)$，有

$$\| u_1 \|_1 \leqslant \frac{C_4}{|\omega|} \| v_1 \|_1, \| u_1 \|_0 \leqslant \frac{C_4}{|\omega|} \| v_1 \|_1$$

这些估计连同$(\mathrm{i}\omega - A)^{-1}$的线性性得

$$\| (\mathrm{i}\omega - A)^{-1} \|_{\mathscr{L}(Z)} \leqslant \frac{C}{|\omega|}, \forall \omega \in \mathbf{R}, \omega^2 \geqslant \mu_0 + 1 \tag{6.4.35}$$

再设$(v_1, v_2) \in Y = H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi) \times H_0^1(0,\pi)$。如$v_1 = 0$，则从式(6.4.32)、(6.4.20)和式(6.4.25)得

$$\| u_1 \|_1 \leqslant C_5(\omega^2 - \mu_0)^{-\frac{3}{4}} \| v_2 \|_1,$$

$$\| u_1 \|_2 \leqslant C_5(\omega^2 - \mu_0)^{-\frac{1}{4}} \| v_2 \|_1$$

因 $u_2 = \mathrm{i}\omega u_1$，得

$$\| u_1 \|_2 \leqslant C_6 |\omega|^{-\frac{1}{2}} \| v_2 \|_1, \| u_2 \|_1 \leqslant C_6 |\omega|^{-\frac{1}{2}} \| v_2 \|_1 \tag{6.4.36}$$

另一方面，如$v_2 = 0$，则$(v_1, 0) \in X$，从式(6.4.35)得

$$\| (\mathrm{i}\omega - A)^{-1} \|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant C |\omega|^{-1}$$

联系式(6.4.36)和$(\mathrm{i}\omega - A)^{-1}$的线性性得

$$\| (\mathrm{i}\omega - A)^{-1} \|_{\mathscr{L}(Y,X)} \leqslant \frac{C'}{|\omega|^{\frac{1}{2}}}, \forall \omega \in \mathbf{R}, \omega^2 \geqslant \mu_0 - 1 \tag{6.4.37}$$

由此推出算子 A 满足假设(Σ)。

例 3 考虑 Navier-Stokes 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V + \nabla p = \nu \Delta V + f(x), \\ \nabla \cdot V = 0, \qquad x \in \Omega, \\ V|_{\partial\Omega} = a, \displaystyle\int_{\partial\Omega} a \cdot n \mathrm{d}\sigma = 0, \end{cases} \tag{6.4.38}$$

其中 Ω 为 $\mathbf{R}^3(\mathbf{R}^2)$的有界区域。具光滑边界 $\partial\Omega$，单位外法向向量 $n: \partial\Omega \to \mathbf{R}^3$，$V = V(t,x) \in \mathbf{R}^3$，$p = p(t,x) \in \mathbf{R}$，$\nu$ 为对应于 Reynolds 数的无量纲正数。$f: \Omega \to \mathbf{R}^3$，$a: \partial\Omega \to \mathbf{R}^3$ 为给定向量场。问题(6.4.38)可分解为两个方程：一个是 V 的方程，一个给出∇p 为 V

的函数。因此可由 V 决定 p（直到差一个常数）。对应于式(6.4.38)的柯西问题在于寻求解$(V,p):\mathbf{R}_+\times\Omega\to\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}$，使得$V(0,x)=\overline{V}(x)$，而$\overline{V}(x):\Omega\to\mathbf{R}^3$ 满足$\nabla\cdot\overline{V}=0$。

置 $\mu=(\nu,\tilde{\mu})$，$\tilde{\mu}\in\mathbf{R}^m$，设 f 和 a 依赖于$\tilde{\mu}$。对于每个 μ，式(6.4.38)具有定常解$(V_\mu^{(0)},p_\mu^{(0)})=(V_\mu^{(0)}(x),p_\mu^{(0)}(x))$。令 $V=V_\mu^{(0)}+U$，$p=p_\mu^{(0)}+\nu\tilde{p}$，则式(6.4.38)可写为方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}=\Delta U+\nu^{-1}[\tilde{B}_\mu U+\tilde{N}(U)]-\nabla\tilde{p},\\ \nabla\cdot U=0,U|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{6.4.39}$$

其中

$$\begin{aligned}&\tilde{B}_\mu U\overset{\text{def}}{=\!=}-((U\cdot\nabla)V_\mu^{(0)}+(V_\mu^{(0)}\cdot\nabla)U),\\&\tilde{N}(U)\overset{\text{def}}{=\!=}-(U\cdot\nabla)U\end{aligned}\tag{6.4.40}$$

令 $W\in(L^2(\Omega))^3$，使得$\nabla\cdot W\in L^2(\Omega)$，则有等式

$$\int_\Omega\nabla\psi\cdot W\mathrm{d}x+\int_\Omega\psi(\nabla\cdot W)\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\psi W\cdot n\mathrm{d}x\tag{6.4.41}$$

$\psi\in H^1(\Omega)$，$W\cdot n|_{\partial\Omega}$为$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$的对偶空间的元素。$W\cdot n\in H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)$。

定义基本空间

$$Z\overset{\text{def}}{=\!=}\{U\in(L^2(\Omega))^3|\nabla\cdot U=0,U\cdot n|_{\partial\Omega}=0\}\tag{6.4.42}$$

令 Π_0 为 Z 上的正交投影，能证$(I-\Pi_0)((L^2(\Omega))^3)=\{\nabla\psi|\psi\in H^1(\Omega)\}$，投影 Π_0 使$\nabla\tilde{p}$消失，可得方程

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=A_\mu U+\nu^{-1}N(U)\tag{6.4.43}$$

其中 $A_\mu:D(A_\mu)=X\overset{\text{def}}{=\!=}\{U\in Z|U\in(H^2(\Omega))^3,U|_{\partial\Omega}=0\}\to Z$ 为稠定闭线性算子，有

$$A_\mu U\overset{\text{def}}{=\!=}TU+\nu^{-1}B_\mu U,TU=\Pi_0\Delta U,BU\overset{\text{def}}{=\!=}\Pi\tilde{B}_\mu U\tag{6.4.44}$$

$$N(U) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \Pi \tilde{N}(U) \tag{6.4.45}$$

我们有 $A_\mu \in \mathscr{L}(X,Z)$，在 X 上给出 $(H^2(\Omega))^3$ 的内积，首先指出 $N \in C_0^\infty(X;Y)$，其中 $Y:=\{W\in Z \mid W\in (H^1(\Omega))^3\}$。Sobolev 嵌入定理给出连续嵌入 $H^2(\Omega)\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$，$H^1(\Omega)\hookrightarrow L^4(\Omega)$。由此易见映照 $(U_1,U_2)\in X^2 \mapsto V:=(U_1\cdot\nabla)U_2$ 为有界线性算子 $X\to(H^1(\Omega))^3$。因此 $\tilde{N}\in C^\infty(X;(H^1(\Omega))^3)$。其次取任何 $V\in(H^1(\Omega))^3$ 和 Neumann 问题

$$\begin{cases} \Delta\phi = \nabla\cdot V \in L^2(\Omega), \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial n} = V\cdot n \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \end{cases} \tag{6.4.46}$$

设 $\phi\in H^2(\Omega)$ 为式(6.4.46)的任意解，令 $W=V-\nabla\phi$。则易见 $W=\Pi_0 V\in Y$，$\|W\|_{H^1}\leqslant C\|V\|_{H^1}$。这就证明了 $Y=\Pi_0((H^1(\Omega))^3)$，因此有 $N=\Pi_0\tilde{N}\in C^\infty(X,Y)$，且

$$\|N(U)\|_Y \leqslant C\|U\|_X^2 \tag{6.4.47}$$

现转到考虑算子 A_μ 的主部，即 Stokes 算子 $T\subset\mathscr{L}(X;Z)$。解方程 $TU=g, U\in X, g\in Z$，等价于如下方程组：

$$\begin{cases} \Delta U + \nabla\psi = g, \nabla\cdot U = 0 \\ U|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{6.4.48}$$

的解 $(U,\psi)\in(H^2(\Omega))^3\times H^1(\Omega)$。易知式(6.4.48)有唯一解，因此 T 具有有界逆 $T^{-1}\in\mathscr{L}(Z;X)$。我们有

$$(TU,V) = (U,TV),\ \forall U,V\in X \tag{6.4.49}$$

$$(TU,U) = -\int_\Omega \sum_{i,j}\left|\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right| \mathrm{d}x \leqslant 0,\ \forall U\in X \tag{6.4.50}$$

由此推出 T 为自共轭的和非负的，且 T 有紧的预解集，因嵌入 $X\hookrightarrow Z$ 是紧的，且有

$$\|(\lambda - T)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{|\lambda|}, \mathrm{Re}\,\lambda > 0, \\ \dfrac{1}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}, \mathrm{Im}\,\lambda \neq 0 \end{cases} \tag{6.4.51}$$

利用前面类似的技巧可证

$$\|(\lambda - T)^{-1}\|_{\mathscr{L}(Y,X)} \leqslant \begin{cases} \dfrac{M}{|\lambda|^{\frac{1}{4}}}, & \text{Re}\,\lambda > 0, |\lambda| \text{ 充分大} \\ \dfrac{M}{|\text{Im}\,\lambda|^{\frac{1}{4}}}, & \text{Re}\,\lambda < 0, |\text{Im}\,\lambda| \text{ 充分大} \end{cases}$$

(6.4.52)

改写

$$\lambda - A_\mu = \lambda - (T + \nu^{-1}B_\mu) =$$

$$[I_Z - \nu^{-1}B_\mu(\lambda - T)^{-1}](\lambda - T) =$$

$$(\lambda - T)[I_X - \nu^{-1}(\lambda - T)^{-1}B_\mu]$$

从式(6.4.51)和式(6.4.52)推出 A_μ 满足假设(Σ)。

第七章　孤立波的存在性和稳定性

我们知道，非线性发展方程局部的行波解，我们称之为孤立波。所谓“局部的”是指当空间变元$|x|\to\infty$时它急剧地消失，或者说系统的能量集中在某个有限的局部区域内。我们说一个孤立波是“孤立子”，是指这种孤立波相互作用后仍保持它原来的形状和振幅。一个非线性发展方程是否存在孤立波以及是否是真正的孤立子，是必须经过认真的检验和论证的。一般来说，对于一维空间情形，孤立波的存在性问题是比较容易验证的。因为此时它归结为求一个常微分方程无穷边值问题的解的存在性问题，我们利用已有方法还是较好处理的，在某些特殊情况下，我们还可以解析地求出它们解的明显表达式，例如：KdV 方程，非线性 Schrödinger 方程，Sine-Gordon 方程等，对于空间维数高于一维的情况，孤立波的存在性就变为很复杂的问题了，这时它一般归结为多维半线性椭圆形方程在无界区域解的存在性问题，由于嵌入定理在无界区域的非紧性，我们利用新的理论框架，例如集中紧致原理去论证它的存在性，而且这种孤立波解在不少情况下还不是唯一的。对于孤立波是否是一个孤立子，也是需要从理论上或从数值模拟上进行验证的，其中一个很重要的因素是要考虑上述孤立波是否是“稳定”的，我们知道孤立子当$t\to\infty$是稳定的，是从不消失的。对于不稳定的行波解，它将如何发展？瞬时消失或坍塌(Collapse)或破裂(Blow up)，或趋于具奇性的自型解，也是人们所关心的。

孤立波的稳定性是可从不同方面来进行考察的，有许多不同形式和内容的“稳定性”定义。一般来说，可分为两类：一类是线性稳定性，即通过孤立波解附近的小扰动得到线性化方程，考察它的 Lyapunov 稳定性；另一类是非线性稳定性，即考察在某种泛函下

孤立波解的稳定性，例如这种行波解是否达到系统量的最小值等。最近还提出一类更弱的稳定性，即依轨道的稳定性，以及更强的稳定性，$t\to\infty$时的渐近稳定性和指数稳定性等。

近二十多年来，孤立波的稳定性理论得到了迅速发展，StraussW，Weinstein M，Bona J L 等对于许多非线性发展方程孤立波的稳定性与不稳定性进行深人的研究，得到了丰富的结果，见文献[174～179]。特别 Grillakis M 等在文献[174,175]中进行了理论的总结，提出了抽象而又具体的 Hamilton 系统的轨道稳定性理论，最近，Weinstein 又进一步研究了 KdV、BBM 等方程孤立波的渐近稳定性，并把抛物形方程常用的 Evans 函数方法应用进来，得到细致深人的结果。关于高维孤立波的存在性和稳定性，最近也取得实质性的进展。Saut J 等对 KP 方程、DS 方程等均得到很好的结果，见文献[180～183,186,187]。我们对于一维具导数的非线性 Schrödinger 方程，LS 方程组以及 KdV 方程组等的孤立波的轨道稳定性也进行了研究，详见文献[184,141]，对于二维非线性 Schrödinger-KP 耦合方程孤立波的存在性也得到了初步的结果，见文献[185]。

7.1 轨道稳定性

考虑如下的具 Hamilton 形式的发展方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=JE'(u(t)),u(t)\in X \tag{7.1.1}$$

其中：E 为一个泛函（“能量”）；J 为反对称线性算子；“$'$”表示泛函的 Fréchet 导数。设 X 为实 Hilbert 空间，具内积$(\cdot,\cdot)$，X^* 为它的对偶空间，存在一个自然的同构 $I:X\to X^*$ 定义为

$$\langle Iu,v\rangle=(u,v)$$

其中$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示 X 和 X^* 的配对。这里 J 为闭的线性算子：$X^*\to X$，具有稠的定义域 $\Delta(J)\subset X^*$。设 J 为反对称的，即

$$\langle Ju,v\rangle=-\langle u,Jv\rangle,\ u,v\in D(J) \tag{7.1.2}$$

且

$$J\text{ 是满射的} \tag{7.1.3}$$

设 $E:X\to\mathbf{R}$ 为 C^1 泛函,它的一阶导数为 $\langle E'(u),v\rangle$,其中 $E':X\to X^*$,二阶导数为 $\langle E''(u),v\rangle$。设 T 为在 X 上具有单参数群的酉算子,因此 $T(s)$ 为酉算子:$X\to X$,$\forall s\in\mathbf{R}$,即有 $\|T(s)u\|=\|u\|$。它是强连续的,满足 $T(s)T(r)=T(s+r)$,$\forall s,r\in\mathbf{R}$。令 $T'(0)$ 为无穷可生成子,一个从 X 到 X 的算子。它是斜共轭的,对于内积 $(\cdot,\cdot)$,具有稠定义域。利用 T 的酉性共轭的定义,有

$$T^*(s)I=IT(-s),\forall s\in\mathbf{R}$$

其中 $T^*(s):X^*\to X^*$。

设 E 在 T 下是不变的,即有

$$E(T(s)u)=E(u),s\in\mathbf{R},u\in X \tag{7.1.4}$$

式(7.1.4)对 u 微分,可得

$$T^*(s)E'(T(s)u)=E'(u) \tag{7.1.5}$$

再微分一次得

$$T^*(s)E''(T(s)u)=E''(u) \tag{7.1.6}$$

式(7.1.4)对 s 在 $s=0$ 处微分,得

$$\langle E'(u),T'(0)u\rangle=0,\ u\in D(T'(0)) \tag{7.1.7}$$

设 J 和 T 可变换,即有

$$T(s)J=JT^*(-s) \tag{7.1.8}$$

它可写为等价形式 $T(s)JT^*(s)=J$,或 $JIT(s)=T(s)JI$。特别由式(7.1.8)推出 $T^*(s)(D(J))=D(J)$。形式上,式(7.1.8)对 s 在 $s=0$ 处微分,可得 $T'(0)J=-J(T'(0))^*$,因此 $J^{-1}T'(0)=-(T'(0))^*J^{-1}=(J^{-1}T'(0))^*$。为了更详细点,设

$$\text{存在一个线性有界算子 } B:X\to X^*\text{,使得 } B^*=B$$
$$\text{和算子 } JB\text{ 是 } T'(0)\text{ 的一个扩张} \tag{7.1.9}$$

现定义另一个泛函 $Q:X\to\mathbf{R}$

$$Q(u)=\frac{1}{2}\langle Bu,u\rangle \tag{7.1.10}$$

由式(7.1.9)、(7.1.10)推出 Q 在 T 下是不变的，即

$$Q(T(s)u)=Q(u),\ s\in\mathbf{R},u\in X \tag{7.1.11}$$

事实上，令 $u\in D(T'(0))$，则 $T(s)u\in D(T'(0))\subset D(JB)$，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}Q(T(s)u)=\langle Q'(T(s)u),T'(0)T(s)u\rangle=$$

$$\langle BT(s)u,JBT(s)u\rangle=0$$

微分式(7.1.10)和式(7.1.11)，可得 $Q'(u)=Bu,Q''(u)=B$，$\forall u\in X$。再进一步，有

$$\begin{cases}(\mathrm{a})\quad T(s)^{*}Q'(T(s)u)=Q'(u)\\(\mathrm{b})\quad T^{*}(s)BT(s)=B\\(\mathrm{c})\quad BT'(0)=-T'(0)^{*}B\\(\mathrm{d})\quad B[D(T'(0))]=D(T'(0)^{*})\end{cases} \tag{7.1.12}$$

我们研究的发展方程为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=JE'(u(t)),\ u(t)\in X \tag{7.1.12a}$$

注意 E 和 Q 在流(7.1.12a)下形式上是守恒的。事实上

$$\frac{\mathrm{d}E(u)}{\mathrm{d}t}=\langle E'(u),\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\rangle=\langle E'(u),JE'(u)\rangle=0$$

$$\frac{\mathrm{d}Q(u)}{\mathrm{d}t}=\langle Q'(u),\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\rangle=\langle Bu,JE'(u)\rangle=-\langle JBu,E'(u)\rangle=$$

$$-\langle T'(0)u,E'(u)\rangle=0$$

定义 7.1.1 式(7.1.12a)在时间区间 $\mathscr{J}$ 的一个解。意味着函数 $u\in C(\mathscr{J};X)$，使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle u(t),\psi\rangle=\langle E'(u(t)),-J\psi\rangle,$$

$$u\in D'(\mathscr{J}),\ \forall\psi\in D(J)\subset X^{*} \tag{7.1.13}$$

假设 7.1.1 解的存在性：$\forall u_0\in X$，存在 $t_0>0$，它仅依赖于 μ，$\|u_0\|\leqslant\mu$，存在在区间 $\mathscr{J}=[0,t_0)$ 的方程(7.1.12a)的解 u，使得

(1) $u(0)=u_0$；

(2) $E(u(t))=E(u_0),Q(u(t))=Q(u_0),t\in\mathscr{J}$。

注意到$u(t)$为式(7.1.12a)的解，则$T(s)u(t)$也是它的解，$\forall s \in \mathbf{R}$。事实上，由式(7.1.5)和式(7.1.8)有

$$\langle E'(T(s)u(t)), J\psi\rangle = \langle E'(u(t)), T(-s)J\psi\rangle =$$

$$\langle E'(u(t)), JT^*(s)\psi\rangle = -\langle JE'(u(t)), T^*(s)\psi\rangle =$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle u(t), T^*(s)\psi\rangle = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle T(s)u(t), \psi\rangle$$

$$\forall \psi \in D(J)$$

定义 7.1.2

“有界态”意味着发展方程特殊形式的解

$$u(t) = T(\omega t)\phi,\ \omega \in \mathbf{R}, \phi \in X \tag{7.1.14}$$

如果$\phi \in D(T'(0))$满足“定常”方程

$$E'(\phi) = \omega Q'(\phi) \tag{7.1.15}$$

则$T(\omega t)\phi$为有界态。事实上，由式(7.1.9)、(7.1.12)和(7.1.14)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(\omega t)\phi = \omega T'(0)T(\omega t)\phi = \omega JBT(\omega t)\phi =$$

$$\omega JT^*(-\omega t)Q'(\phi) = JT^*(-\omega t)E'(\phi) = JE'(T(\omega t)\phi)$$

假设 7.1.2 基态的存在：

存在$\omega_1 < \omega_2$和一个映照

$$\begin{cases} (\mathrm{a}) & \omega \to \phi_\omega: (\omega_1, \omega_2) \to X,\ \in C^1, \omega \in (\omega_1, \omega_2) \\ (\mathrm{b}) & E'(\phi_\omega) = \omega Q'(\phi_\omega) \\ (\mathrm{c}) & \phi_\omega \in D(T'(0)^3) \cap D(JIT'(0)^2) \\ (\mathrm{d}) & T'(0)\phi_\omega \neq 0 \end{cases}$$

定义 7.1.3

$$d(\omega) = E(\phi_\omega) - \omega Q(\phi_\omega) \tag{7.1.16}$$

和算子$H_\omega: X \to X^*$

$$H_\omega = E''(\phi_\omega) - \omega Q''(\phi_\omega) \tag{7.1.17}$$

可知H_ω为自共轭算子，$H_\omega^* = H_\omega$。这意味着$I^{-1}H_\omega$在X上为有界自共轭算子，因$(I^{-1}Hu, v) = \langle Hu, v\rangle = \langle Hv, u\rangle = \langle I^{-1}Hu, v\rangle$。$H_\omega$

的谱由那些实 λ 组成，使得 $H_\omega-\lambda I$ 不是可逆的，我们要求 $\lambda=0$ 属于 H_ω 的谱，事实上，从式(7.1.5)、(7.1.12a)和式(7.1.15)有

$$E'(T(s)\phi_\omega)-\omega Q'(T(s)\phi_\omega)=$$
$$T^*(-s)[E'(\phi_\omega)-\omega Q'(\phi_\omega)]=0$$

对 s 微分在 $s=0$ 处，有

$$H_\omega(T'(0)\phi_\omega)=0 \tag{7.1.18}$$

因此 $T'(0)\phi_\omega$ 为对应于特征 0 的特征向量。

定义 7.1.4 轨线 $\phi_\omega\{T(\omega t)\phi_\omega,t\in\mathbf{R}\}$ 是稳定的，如果对一切 $\epsilon>0$ 存在 $\delta>0$，具有如下性质：如果 $\|u_0-\phi_\omega\|<\delta$，$u(t)$ 为式(7.1.12a)具 $u(0)=u_0$ 在 $[0,t_0)$ 上的解，则 $u(t)$ 能连续延拓解到 $0<t<\infty$，且

$$\sup_{0<t<\infty}\inf_{s\in\mathbf{R}}\|u(t)-T(s)\phi_\omega\|<\varepsilon$$

否则，则称 ϕ_ω 轨道是不稳定的。

定理 7.1.1 假设 7.1.1 和 7.1.2 满足，如果算子 H_ω 具有由 $T'(0)\phi_\omega$ 所张成的核空间，它的其余的谱是正的，而且是有界的，远离于 0，则 ϕ_ω 轨道是稳定的。

假设 7.1.3 对于每一个 $\omega\in(\omega_1,\omega_2)$，$H_\omega$ 仅有一个负的简单特征值，且它的核空间由 $T'(0)\phi_\omega$ 张成，它的其余谱是正的，有界的，而且远离于 0。

定理 7.1.2 假设 7.1.1～7.1.3 成立，设 $\omega_1<\omega<\omega_2$，则 ϕ_ω 轨道是稳定的当且仅当函数 $d(\cdot)$在 ω 的一个邻域是凸的。

定理 7.1.3 假设 7.1.1～7.1.3 成立，设 $\omega_1<\omega<\omega_2$，且 $\phi''(\omega)\neq0$。则如下条件是等价的：

(1) $d''(\omega)>0$；

(2) 如$\langle Q'(\phi_\omega),y\rangle=0$，则$\langle H_\omega y,y\rangle\geqslant0$；

(3) $E(u)$在 $u=\phi_\omega$ 取极小，对 u 在 ϕ_ω 的一个邻域，$Q(u)=Q(\phi_\omega)$；

(4) ϕ_ω 轨道是稳定的。

我们将在下面利用一系列引理来证明定理 7.1.1～定理

7.1.3。

我们注意到如 $d''(\omega)>0$，则 H_ω 至少存在某个负谱，事实上，微分(7.1.16)得

$$H_\omega\phi'_\omega = Q'(\phi_\omega), \phi'_\omega = \frac{\mathrm{d}\phi_\omega}{\mathrm{d}\omega} \tag{7.1.19}$$

微分式(7.1.15)两次，得

$$d'(\omega) = -Q(\phi_\omega) \tag{7.1.20}$$

$$d''(\omega) = -\langle Q'(\phi_\omega), \phi'_\omega\rangle = -\langle H\phi'_\omega, \phi'_\omega\rangle \tag{7.1.21}$$

因此，如 $d''(\omega)>0$，则 $\langle H\phi'_\omega, \phi'_\omega\rangle<0$。

现考虑轨道的稳定性，为方便计，忽略下标 ω，例如记 ϕ_ω 为 ϕ，H_ω 为 H 等，一个环绕轨线 $\{T(s)\phi|_{s\in\mathbf{R}}\}$ 的管邻域，或者简称为管，定义为：

$$U_\varepsilon = \{u \in X : \inf_{s\in\mathbf{R}} \| u - T(s)\phi \| < \varepsilon\}$$

引理 7.1.1 假设 7.1.2 和假设 7.1.3 成立。则(i) $T(s)\phi=\phi$ 对某个 $s>0$ 或者(ii) $T(s_n)\phi\to\phi$ 推出 $s_n\to 0$。

证明 考虑在 ϕ 的邻域 $L=E-\omega Q$ 的临界点集合，如 u 为临界点，则有

$$0 = L'(u) - L'(\phi) = H(u-\phi) + O(\| u-\phi \|^2)$$

因 $H=L''(\phi)$，因此临界点集合是局部地同构于 H 的零空间。现 ϕ 是一个临界点，由式(7.1.17a)可知，对每个 s，$T(s)\phi$ 也是一个临界点。因此存在 ϕ 的一个邻域 N 和 $\delta>0$，使得

$$\{u \in N|_{L'(u)=0}\} = \{T(r)\phi|_{|r|<\delta}\}$$

现设(i)不成立，则存在一个序列 $|s_n|\geqslant\delta$，$T(s_n)\phi\in N$。固定 n，我们已证存在 $|r_n|<\delta$，$T(s_n)\phi=T(r_n)\phi$。于是 $T(s_n-r_n)\phi=\phi$。这意味着(i)成立。

引理 7.1.2 设假设 7.1.2 和假设 7.1.3 成立，则存在 $\varepsilon>0$ 和一个 C^2 映照 $s: U_\varepsilon\to\mathbf{R}$（$R$/周期，如轨道是周期的），使得对 $\forall u\in U_\varepsilon$，$\forall r\in\mathbf{R}$ 有

(i) $\| T(s(u))u-\phi \| \leqslant \| T(r)u-\phi \|$；

(ii) $(T(s(u))u, T'(0)\phi)=0$;

(iii) $s(T(r)u)=s(u)-r$，如轨道是周期的，为 mod(周期)；

(iv) $s'(u)=IT(-s(u))T'(0)\phi/(T'(0)^2\phi, T(s(u))u)$；

(v) s'映照 U_ϵ 为 $D(J)$，Js'为 C^1 函数：$U_\epsilon \to X$。

证 明　定义 $s(u)$为 $\rho(s)=\|T(s)u-\phi\|^2$ 的极小值，u 接近于 ϕ 的轨道，计算可得

$$\rho'(s) = 2(T'(s)u - \phi, T'(0)T(s)u) = 2(T(s)u, T'(0)\phi),$$

$$\rho''(s) = -2(T'(0)T(s)u, T'(0)\phi) = 2(T(s)u, T'(0)^2\phi)$$

当 $u=\phi, s=0$ 时 $\rho'(0)=0, \rho''(0)=2\|T'(0)\phi\|^2>0$。由隐函数存在定理可知，存在一个环绕 ϕ 的开球 V，和一个环绕 $s=0$ 的区间 I，和 C^2 映照 $s: V\to I$ 使得方程 $\rho'(s)=0$ 具有唯一解 $s=s(u)\in I$，$\forall u\in V$。因此对于给定 $u\in V$，$s(u)$为 $\rho(s)$在 I 上的唯一极小值。由引理 7.1.1 可知，对 $\delta>0$（如轨道为周期，δ 小于$\frac{1}{2}$周期），则存在 $\eta(\delta)>0$ 使得如 $\|T(s)\phi-\phi\|\leqslant\eta(\delta)$时，则 $|s|<\delta$（轨道周期时，s 位于数倍周期的 δ 之中）。周期轨道时，选取 δ 小于$\frac{1}{2}$周期，选取 $I=(-\delta,\delta)$，$V=\{v: \|v-\phi\|<\eta(\delta)/3\}$。如 $u\in V, s\in \mathbf{R}$，$\|T(r)u-\phi\|<\|T(s(u))u-\phi\|$，则

$$\|T(r)\phi - \phi\| \leqslant \|T(r)u - \phi\| + \|T(r)(u - \phi)\| \leqslant 2\|u - \phi\| < \eta(\delta)$$

因此 $r=s(u)$，在周期轨道时，再加上周期的若干倍。这就证明了(i)、(ii)，$u\in V$。在 V 中为证(iii)，注意到

$$\|T(s(u) - r)\phi - \phi\| \leqslant \|T(r)u - \phi\| + \|T(s(u))u - \phi\| + \|u - \phi\|。$$

如 $T(r)u\in V, u\in V$，则 $s(u)-r\in I$(mod(周期))。由唯一性，$s(T(r)u)=s(u)-r$(mod (周期))。为证(iv)，对 $u\in X$，微分(ii)得

$$(T(s(u))w, T'(0)\phi) + \langle s'(u), w\rangle(T''(0)T(s(u))u, T'(0)\phi) = 0$$

因 $T'(0)$对于内积为反对称的，由上式可得

$$\langle s'(u), w\rangle = \frac{(T(-s(u))T'(0)\phi, w)}{(T'(0)^2\phi, T(s(u))u)}, \forall \omega \in X$$

这就推出(iv)。如上式再对 u 微分一次,且设 $\phi \in D(T'(0)^3) \cap D(JIT'(0)^2)$,则(v)成立。最后,我们能拓展 $s(u)$ 的定义域到 $u \in U_\epsilon$,其中 $\epsilon = \eta(\delta)/3$,事实上,如 $\| u - T(s_0)\phi \| < \epsilon, s_0 \in \mathbf{R}$。我们定义

$$s(u) \stackrel{\text{def}}{=\!=} s(T(-s_0)u) - s_0$$

这个定义是和 s_0 的选取无关的。这是因为如果 $\| u - T(s_0)\phi \| < \epsilon$ 和 $\| u - T(s_1)\phi \| < \epsilon$,则 $T(-s_0)u$ 和 $T(-s_1)u \in V$。因(iii)已证在 V 中,有

$$s(T(s_0 - s_1)T(-s_0)u) = s(T(-s_0)u) - (s_0 - s_1)$$

如是周期轨道,则加上周期的倍数,$r = s_0 - s_1$。因此

$$s(T(-s_1)u) - s_1 = s(T(-s_0)u) - s_0 (R/\text{周期})$$

因此 $s(u)$ 定义在一切 $u \in U_\epsilon$,具有性质(i)~(v)。

因 $T'(0)\phi$ 生成 H 的核空间,令 $\chi = \chi_\omega$ 为 H 的负特征值

$$H_\omega \chi_\omega = -\lambda_\omega^2 I \chi_\omega, \| \chi_\omega \| = 1 \qquad (7.1.22)$$

令 $P = P_\omega$ 为 H 的正交空间,则存在 $\delta = \delta_\omega > 0$,使得

$$\langle Hp, p\rangle \geqslant \delta \| p \|^2, p \in P \qquad (7.1.23)$$

定理 7.1.4 设 $d''(\omega) > 0$,如果 $\langle Q'(\phi), y\rangle = (T'(0)\phi, y) = 0, y \neq 0$ 则

$$\langle Hy, y\rangle > 0$$

证明 由式(7.1.21)有 $\langle H\phi', \phi'\rangle < 0$,作谱分解 $\phi' = a_0\chi + b_0T''(0)\phi + p_0, p_0 \in P$。则 $-a_0^2\lambda^2 + \langle Hp_0, p_0\rangle < 0$。令 $y \in X$,满足 $\langle Q'(\phi), y\rangle = 0$ 和 $(T''(0)\phi, y) = 0$。分解

$$y = a\chi + p, \ p \in P$$

由式(7.1.19)有

$$0 = \langle H\phi', y\rangle = -a_0 a\lambda^2 + \langle Hp_0, p\rangle$$

因此

$$\langle Hy,y\rangle = -a^2\lambda^2 + \langle Hp,p\rangle \geqslant -a^2\lambda^2 + \frac{\langle Hp,p_0\rangle^2}{\langle Hp_0,p_0\rangle} >$$

$$-a^2\lambda^2 - \frac{(a_0 a\lambda^2)^2}{a_0^2\lambda^2} = 0$$

推论 7.1.1　如$\langle Q'(y),y\rangle=0$,则

$$\langle Hy,y\rangle \geqslant C\|\Pi y\|^2$$

其中$C>0$,Π为在$[T'(0)\phi]^\perp$上的直交投影。

定理 7.1.5

如$d''(\omega)>0$,则存在$C>0,\epsilon>0$,使得

$$E(u)-E(\phi)\geqslant C\|T(s(u))u-\phi\|^2,$$

$$u\in U_\epsilon,\ Q(u)=Q(\phi)$$

证明　令$q=I^{-1}Q'(\phi)$,分解

$$T(s(u))u-\phi = aq+y$$

其中$(y,q)=0$,a为常数,则

$$Q(\phi)=Q(u)=Q(T(s(u))u)=Q(\phi)+$$

$$\langle Q'(\phi),T(s(u))u-\phi\rangle + O(\|T(s(u))u-\phi\|^2)=$$

$$Q(\phi)+a\|q\|^2+O(|T(s(u))u-\phi\|^2)$$

因此$a=O(\|T(s(u))u-\phi\|^2)$。令$L(u)=E(u)-\omega Q(u)$,由Taylor展开得

$$L(u)=L(T(s(u))u)=L(\phi)+\langle L'(\phi),v\rangle+$$

$$\frac{1}{2}\langle L''(\phi)v,v\rangle + o(\|v\|^2)$$

其中$v=T(s(u))u-\phi=aq+y$。因$Q(u)=Q(\phi)$,$L'(\phi)=0$和$L''(\phi)=H$,则有

$$E(u)-E(\phi)=\frac{1}{2}\langle Hv,v\rangle + o(\|v\|^2)=$$

$$\frac{1}{2}\langle Hy,y\rangle + O(a^2)+O(a\|v\|)+o(\|v\|^2)=$$

$$\frac{1}{2}\langle Hy,y\rangle + o(\|v\|^2)$$

因 $0=(q,y)=\langle Q'(\phi),y\rangle$，和

$$(y,T''(0)\phi)=(T(s(u))u-\phi-aq,T''(0)\phi)=0$$

因此，由推论 7.1.1 得

$$E(u)-E(\phi)\geqslant\frac{1}{2}c\|y\|^2+o(\|v\|^2)$$

最后，$\|y\|=\|v-aq\|\geqslant\|v\|-|a|\|q\|\geqslant\|v\|^2-O(\|v\|^2)$。因此对小的 $\|v\|$ 有

$$E(u)-E(\phi)\geqslant\frac{1}{2}c\|v\|^2$$

定理 7.1.5 证毕。

定理 7.1.6 设假设 7.1.1，7.1.2，7.1.3 成立，$d''(\omega)>0$，则 ϕ 轨道是稳定的。

证明 用反证法。如果不稳定，则存在一个初值序列 $u_n(0)$ 和 $\delta>0$，使得

$$\inf_{s\in\mathbb{R}}\|u_n(0)-T(s)\phi\|\to 0,\text{但}\sup_{t>0}\inf_{s\in\mathbb{R}}\|u_n(t)-T(s)\phi\|\geqslant\delta$$

其中 $u_n(t)$ 为具初值 $u_n(0)$ 的解。由对 t 的连续性，能选取 t_n，使得

$$\inf_{s\in\mathbb{R}}\|u_n(t_n)-T(s)\phi\|=\delta \tag{7.1.24}$$

解 u_n 在 $[0,t_n]$ 上存在。由假设 7.1.1，

$$E(u_n(t_n))=E(u_n(0))\to E(\phi),$$

$$Q(u_n(t_n))=Q(u_n(0))\to Q(\phi)$$

选取序列 $\{v_n\}$ 使得 $Q(v_n)=Q(\phi)$，$\|v_n-u_n(t_n)\|\to 0$。由 E 的连续性，$E(v_n)\to E(\phi)$。选取 δ 充分小，应用定理 7.1.5 得

$$0\leftarrow E(v_n)-E(\phi)\geqslant c\|T(s(v_n))v_n-\phi\|^2=$$
$$c\|v_n-T(-s(v_n))\phi\|^2$$

因此 $\|u_n(t_n)-T(-s(v_n))\phi\|^2\to 0$，它和式(7.1.24)矛盾。

现考虑轨道的不稳定性。

定理 7.1.7 如 $d''(\omega)<0$，则

(1)具有约束 $Q(u)=Q(\phi)$，$E(u)$ 在 $u=\phi$ 不取得局部极小；

(2)存在 $y\in D(T'(0)^2)$，使得 $\langle Hy,y\rangle<0$ 和 $\langle Q'(\phi),y\rangle=0$。

证明　利用式(7.1.22)和式(7.1.23)，考虑ϕ_Ω，Ω接近ω。令$q(s,\Omega)=Q(\phi_\Omega,+s\chi_\omega)$则由式(7.1.21)有

$$\frac{\partial q}{\partial \Omega}(0,\omega)=\langle Q'(\phi_\omega),\phi'_\omega\rangle=-d'(\omega)<0$$

存在定理，存在C^1函数$\Omega(s)$，使得$\Omega(0)=\omega$和

$$Q(\phi_{\Omega(s)}+s\chi_\omega)=Q(\phi_\omega) \tag{7.1.25}$$

作$L_\Omega(u)=E(u)-\Omega Q(u)$，在$u=\phi_\Omega$附近展开得

$$L_\Omega(\phi_\Omega+s\chi)=L_\Omega(\phi_\Omega)+s\langle L'_\Omega(\phi_\Omega),\chi_\Omega\rangle+$$

$$\frac{1}{2}s^2\langle L''_\Omega(\phi_\Omega)\chi_\omega,\chi_\omega\rangle+o(s^2)$$

对$\Omega=\Omega(s)$，可写为

$$E(\phi_{\Omega(s)}+s\chi_\Omega)-\Omega Q(\phi_\omega)=d(\Omega(s))+$$

$$\frac{1}{2}s^2\langle H_{\Omega(s)}\chi_\omega,\chi_\omega\rangle+o(s^2) \tag{7.1.26}$$

因$d''(\omega)<0$，则由式(7.1.16)和式(7.1.20)有

$$d(\Omega)<d(\omega)+(\Omega-\omega)d'(\omega)=E(\phi_\omega)-\Omega Q(\phi_\omega),\Omega\text{ 靠近 }\omega$$

进一步，由对Ω的连续性有

$$\langle H_\Omega\chi_\omega,\chi_\omega\rangle\leqslant\frac{1}{2}\langle H_\Omega\chi_\omega,\chi_\omega\rangle<0,\Omega\text{ 靠近 }\omega$$

联合式(7.1.26)由 Taylor 展开有

$$E(\phi_{\Omega(s)}+s\chi_\omega)<E(\phi_\omega)+\frac{1}{2}s^2\langle H_\omega\chi_\omega,\chi_\omega\rangle+o(s^2)$$

令

$$z=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)(\phi_{\Omega(s)}+s\chi_\omega)|_{s=0}$$

由式(7.1.25)，$\langle Q'(\phi_\omega),z\rangle=0$，进一步，$E(\phi_{\Omega(s)}+s\chi_\omega)=E(\phi_\omega)$，在$s=0$处二阶消失，因此

$$\langle H_\omega z,z\rangle=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}|_{s=0}E(\phi_{\Omega(s)}+s\chi_\omega)<\frac{1}{2}\langle H_\omega\chi_\omega,\chi_\omega\rangle<0$$

这就证明了(1)。为证(2),除去 z 不属于 $D(T'(0))=D$,现 D 在 X 中稠,$I-T'(0)^2$ 在 X 中是正算子。这是由于

$$((I-T'(0)^2)v,v)=\|v\|^2+\|T'(0)v\|^2\geqslant\|v\|^2,$$
$$v\in D(T'(0)^2)$$

因此

$$\xi=(I-T'(0)^2)^{-1}I^{-1}Q'(\phi_\omega)\in D(T'(0)^2),$$
$$\langle Q'(\phi_\omega),\xi\rangle=(I^{-1}Q'(\phi_\omega),[I-T'(0)^2]^{-1}I^{-1}Q'(\phi_\omega))>0$$

给定 $z\in X$,$\langle Q'(\phi_\omega),z\rangle=0$,$\langle H_\omega z,z\rangle<0$。选取 $x\in D(T'(0)^2)$,使得 $\|x-z\|<\epsilon$。则令

$$y=x-\frac{\langle Q'(\phi_\omega),x\rangle}{\langle Q'(\phi_\omega),q\rangle}\xi$$

有 $\langle Q'(\phi_\omega),y\rangle=0$,$\|y-z\|=O(\epsilon)$。如 ϵ 充分小,,则 $\langle Hy,y\rangle<0$。这就完成了证明。

引理 7.1.3 对 ϵ 充分小,存在 C^1 泛函 $A:U_\epsilon\to\mathbf{R}$,使得

(i) $A(T(s)u)=A(u)$;

(ii) $[A'(u)$的值域$]\subset D(J)$;

(iii) $JA'(\phi)=-y$,y 为定理 7.1.7 所给定;

(iv) $\langle Q'(u),JA'(u)\rangle=0$, $\forall u\in U_\epsilon$, $s\in\mathbf{R}$;

(v) $JA'\in C^1:U_\epsilon\to X$。

证明 y 为定理 7.1.7 所给定。令 $y\in D(J)$,$Jy=y$,$s(u)$为引理 7.1.1 所给定。定义

$$A(u)=-\langle y,T(s(u))u\rangle \tag{7.1.27}$$

不变性(i)是清楚满足的。对式(7.1.27)求导得

$$A'(u)=-T^*(s(u))y-\langle y,T(s(u))T'(0)u\rangle S'(u) \tag{7.1.28}$$

由式(7.1.7)、(7.1.28)右端第一项属于 $D(J)$,由假设 2,$IT'(0)\phi\in D(J)$,由式(7.1.8)$IT(-s)T'(0)\phi\in D(J)$。由引理 7.1.1(iii),$s'(u)\in D(J)$。因此 $A'(u)\in D(J)$,令 $u=\phi$,则

$$A'(\phi)=-y-\langle y,T'(0)\phi\rangle s'(\phi)$$

由式(7.1.9)和式(7.1.21)有

$$\langle y, T'(0)\phi\rangle = \langle y, JB\phi\rangle = -\langle B\phi, y\rangle = -\langle Q'(\phi), y\rangle = 0$$

因此 $A'(\phi)=-y$。其次，从(i)有 $u\in D(T'(0))\cap U_\varepsilon$。

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} A(T(s)u) = \langle A'(u), T'(0)u\rangle = \langle A'(u), JQ'(u)\rangle = -\langle Q'(u), JA(u)\rangle$$

取一下极限，则对一切 $u\in U_\varepsilon$ 成立。为证(v)，J 作用于式(7.1.28)，再求导一次，为验证这个过程的合理性，$T'(0)J=-JT'(0)^*$ 具有相同的定义域，$Jy=y\in D(T'(0)^2)$，因此 $y\in D(JT'(0)^{*2})$。现 J 作用于式(7.1.28)再微分，有几项。第一项 $-JT'(s(u))y$ 是可微的，这是因为 $y\in D(JT'(0)^*)$，因 $y\in D(T'(0)^{*2})$ 因子 $\langle y, T(s(u))T'(0)u\rangle$ 是可微的，最后一项由引理 7.1.2 知，$Js'(u)$ 是可微的。

定义 7.1.5 解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\lambda} = -JA'(u) \tag{7.1.29}$$

具初值 $u(0)=v\in U_\varepsilon$。它的解 $u=R(\lambda,v)$，它在某个区间 $|\lambda|\leqslant\lambda_0(v)$ 存在，且满足

$$T(s)R(\lambda,v) = R(\lambda,T(s)v) \tag{7.1.30}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}Q(R(\lambda,v)) = \langle Q'(u), -JA'(u)\rangle = 0 \tag{7.1.31}$$

$$\frac{\mathrm{d}R(\lambda,\phi)}{\mathrm{d}\lambda}\Big|_{\lambda=0} = -JA'(\phi) = y \tag{7.1.32}$$

引理 7.1.4 存在 C^1 泛函

$$\Lambda: \{v\in U_\varepsilon : Q(v)=Q(\phi)\}\to\mathbf{R}$$

使得

$$E(R(\Lambda(v),v)) > E(\phi),\ \forall v\in U_\varepsilon \tag{7.1.33}$$

其中 $Q(v)=Q(\phi)$，$v\notin\{T(s)\phi : s\in\mathbf{R}\}$。

证明 令 $L=E-\omega Q$，$M(u)=T(s(v)u)$，我们有 $L(M(u))=$

$L(u)$，由 Taylor 展开得

$$L(u) = L(\phi) + \frac{1}{2}\langle H[M(u) - \phi],$$

$$M(u) - \phi\rangle + o(\| M(u) - \phi \|^2) \qquad (7.1.34)$$

$M(u)-\phi$ 正交于 $T'(0)\phi$。可证 $\lambda=\Lambda(v)$ 为方程

$$f(\lambda,v) = (M(R(\lambda,v)) - \phi,\chi) = 0 \qquad (7.1.35)$$

的唯一解，其中 χ 为 H 的负特征向量，事实上，$f(0,\phi)=(M(\phi)-\phi,\chi)=0$，

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,\phi) = (M'(\phi)\frac{\partial R}{\partial \lambda}(0,\phi),\chi) = (M'(\phi)y,\chi) =$$

$$(y,\chi) + (T'(0)\phi,\chi)\langle s'(\phi),y\rangle = \langle y,\chi\rangle \neq 0,$$

$$(\langle Hy,y\rangle < 0)$$

由隐函数存在定理，$\lambda=\Lambda(v)$ 在 $v=\phi$ 的邻域存在，因

$$f(\lambda,T(r)v) = (M(T(r)R(\lambda,v)) - \phi,\chi) = f(\lambda,v)$$

函数 Λ 能延拓到一切 $v\in U_\varepsilon$，$\varepsilon>0$。

$u=R(\lambda,v)=R(\Lambda(v),v)$ 代入式(7.1.34)，$M(u)-\phi$ 和 $T'(0)\phi$，χ 均正交。由式(7.1.23)得

$$L(u) \geqslant L(\phi) + \frac{c}{2}\| M(u) - \phi \|^2 + o(\| M(u) - \phi \|^2)$$

因此 $L(u)\geqslant L(\phi)$，因 $Q(u)=Q(v)=Q(\phi)$。故有 $E(u)\geqslant E(\phi)$。等式仅当 $M(u)=\phi$ 时成立。因此 u 在 ϕ 轨道中，v 也是。

引理 7.1.5 对 $v\in U_\varepsilon$，$Q(v)=Q(\phi)$，$v\notin\{T(s)\phi|s\in\mathbf{R}\}$，有

$$E(\phi) < E(v) + \Lambda(v)P(v) \qquad (7.1.36)$$

其中

$$P(v) = \langle E'(v), -JA'(v)\rangle \qquad (7.1.37)$$

证明 注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\Big|_{\lambda=0}E(R(\lambda,v)) = \langle E'(v),\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\lambda}\Big|_{\lambda=0}\rangle = P(v),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2}E(R(\lambda,v))\Big|_{\lambda=0,v=\phi} = \langle H\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\lambda},\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\lambda}\rangle + \langle L'(\phi),\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\lambda^2}\rangle =$$

$$\langle Hy,y\rangle < 0$$

因此 v 在 ϕ 的邻域内二阶导数为负，对 λ 作 Taylor 展开得

$$E(R(\lambda,v)) \leqslant E(v) + \lambda P(v)\text{，对小的 }\lambda\text{。}$$

联合这个不等式和式(7.1.33)得

$$E(\phi) < E(R(\Lambda(v),v)) \leqslant E(v) + \Lambda(v)P(v)$$

引理 7.1.6 存在 C^2 曲线 $\psi:(-\delta,\delta)\to U_\varepsilon$，使得 $\psi(0)=\phi$，$\psi'(0)=y$，$Q(\psi(s))=Q(\phi)$，$P(\psi(s))$ 在 $s=0$ 处改变符号，$E(\psi(s))$ 在 $s=0$ 处具有一个严格的局部极大值。

证明 因 y 是一个向量，和光滑流形 $\{v\mid Q(v)=Q(\phi)\}$ 相切，在这个流形上，选一曲线通过 ϕ 和 y 相切。我们必须证明 P 沿着这条曲线改变符号。由式(7.1.15)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(\psi(s))|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}L(\psi(s))|_{s=0} = \langle L'(\phi),y\rangle = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}E(\psi(s))|_{s=0} = \langle L''(\phi)y,y\rangle + \langle L'(\phi),\psi''(0)\rangle =$$

$$\langle Hy,y\rangle < 0$$

因此 $E(\psi(s))$ 在 $s=0$ 处具有局部极大值，由式(7.1.36)

$$0 < E(\phi) - E(\psi(s)) \leqslant \Lambda(\psi(s))P(\psi(s))\text{，小的 }s \tag{7.1.38}$$

这个不等式是严格成立的。因 $\psi'(0)=y\neq T'(0)\phi$。充分证明 $\Lambda(\psi(s))$ 在 $s=0$ 改变符号。微分由 $\Lambda(\psi(s))$ 确定的方程(7.1.35)得

$$(M'(R(\Lambda(\psi(s)),\psi(s))\{\frac{\partial R}{\partial\lambda}\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial R}{\partial v}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s}\},\chi) = 0$$

如 $s=0$，则

$$\psi(0) = \phi, \Lambda(\psi(0)) = \Lambda(\phi) = 0,$$

$$\frac{\partial R(0,v)}{\partial v} = I, \psi'(0) = y, \frac{\partial R(0,\phi)}{\partial\lambda} = y$$

因此

$$(M'(\phi)\{y\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}s}|_{s=0} + y\},\chi) = 0$$

由于

$$(M'(\phi),\chi) = (y + \langle s'(\phi),\chi\rangle T'(0)\phi,\chi) = (y,\chi) \neq 0$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(\psi(s))|_{s=0} = -1 \neq 0 \qquad (7.1.39)$$

引理 7.1.7 设 X 和 W 为两个实 Banach 空间，且 W 稠嵌入于 X^*，$u\in C(\mathscr{J},X)\cap C^1(\mathscr{J};W^*)$，其中 $\mathscr{J}$ 为 $\mathbf{R}$ 的一个开区间。设 $A\in C^1(X,\mathbf{R})$，$A'\in C(X,W)$。$A\cdot u\in C^1(\mathscr{J})$，且

$$\frac{\mathrm{d}A(u(t))}{\mathrm{d}t} = \langle\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t),A'(u(t))\rangle \qquad (7.1.40)$$

证明 因 $W\subset X^*$，推出 $X\subset X^{**}\subset W^*$。式(7.1.40)右端的配对是在 W^*，W 之间进行。首先截断和磨光时间变元。令 $\rho\in C_c^\infty(\mathbf{R})$为正函数，且 $\int_{\mathbf{R}}\rho(t)\mathrm{d}t=1$，$\zeta_n\in C_c^\infty(\mathscr{J})$，$\zeta_n\to 1$，在 $\mathscr{J}$ 上。令

$$u_n(t) = \int n\rho(n(t-\tau))\zeta_n(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (7.1.41)$$

则 $u_n\in C^1(\mathscr{J};X)$，$u_n\to u$，在 $C(\mathscr{J},X)$ 中，$u'_n\to u'$，在 $C(\mathscr{J},W^*)$ 中，现

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(u_n(t)) = \langle\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t),A'(u_n(t))\rangle \qquad (7.1.42)$$

其中配对在 X 和 X^*之间。因 $A'\in C(X,W)$，这个配对也可看成在 W^* 和 W 之间。当 $n\to\infty$时 $A'\cdot u_n\to A'\cdot u\in C(\mathscr{J},W)$，$A\cdot u_n\to A\cdot u\in C(\mathscr{J})$，由上式取极限即得式(7.1.40)。

定理 7.1.8 如果 $d''(\omega)<0$，则 ϕ 轨道是不稳定的。

证明 $J:D(J)\subset X^*\to X$ 为闭线性算子。令 $W=D(J)$具有图模，$\|v\|_W^2=\|v\|^2+\|Jv\|^2$，则 W 是一个 Hilbert 空间，$J:W\to X$，$J^*:X^*\to W^*$ 是连续的，由定义(7.1.13)，发展方程的解 $u\in(\mathscr{J},X)$满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle u(t),\psi\rangle = \langle E'(u(t)),-J\psi\rangle = \langle J^*E'(u(t)),\psi\rangle,$$

$$\forall\psi\in W$$

因此 $u\in C^1(\mathscr{J},W^*)$，且

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-J^*E'(u(t)),\ t\in\mathscr{J} \tag{7.1.43}$$

现固定 ω 和 $\phi=\phi_\omega$，固定管宽度 ε 如此小，使得引理 7.1.5 得以成立。设 $u_0=\Psi(s)$ 给定于引理 7.1.6 中，因此 u_0 任意接近 ϕ，$Q(u_0)=Q(\phi)$，$E(u_0)<E(\phi)$，$P(u_0)>0$（$P(u_0)<0$ 同样可证）。按照假设 7.1.1，存在一个区间 $[0,t_0)$ 和式(7.1.43)的一个解 $u(t)$ 满足 $u(0)=u_0$，且

$$Q(u(t))=Q(u_0)=Q(\phi),E(u(t))=E(u_0)<E(\phi) \tag{7.1.44}$$

因 t_0 仅依赖于 μ，$\|u_0\|\leqslant\mu$，或者 $u(t)$ 能延拓为一个在一切时间 $0\leqslant t<\infty$ 满足式(7.1.43)的整体解，或者它在有限时间 T 发生破裂：$t\to T$，$u(t)\to\infty$。后面一种情况，我们确认为不稳定性。我们现讨论前面的情况。

在任何区间 $[0,t_1)$，$u(t)\in U_\varepsilon$，我们应用引理 7.1.5 和式(7.1.44)可得

$$0<E(\phi)-E(u_0)=E(\phi)-E(u(t))<\Lambda(u(t))P(u(t))$$

因此 $P(u(t))>0$ 取 ε 适当小，可设 $\Lambda(u(t))<1$。因此

$$P(u(t))>E(\phi)-E(u_0)=\varepsilon_0>0 \tag{7.1.45}$$

由引理 7.1.7，$A\cdot u$ 是可微的，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(u(t))=\langle\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},A'(u)\rangle=\langle -J^*E'(u),A'(u)\rangle=$$

$$\langle E'(u),-JA'(u)\rangle=P(u)>\varepsilon_0,\ t\in[0,t_1)$$

然而

$$|A(v)|\leqslant\|y\|_{X^*}(\|\phi\|+\varepsilon),v\in U_\varepsilon$$

因此

$$t_1<\frac{2\|y\|_{X^*}(\|\phi\|+\varepsilon)}{E(\phi)-E(u_0)}<\infty$$

于是解在有限时间存在，ϕ 轨道是不稳定的。定理 7.1.7 证毕。

以下研究 $d(\omega)$ 更一般的情况。

推论 7.1.2 设假设 7.1.1～7.1.3 成立，如果 $d(\cdot)$ 在 ω 的一个邻域不是凸的，则 ϕ_ω 轨道是不稳定的。

证明 令 $S=\{\omega \mid \omega_1<\omega<\omega_2, \phi_\omega$ 轨道是稳定的$\}$，曲线 $\omega\to\phi_\omega$ 是连续的。从稳定性的定义可知，集合 S 是开的。令 $R=\{\omega \mid \omega_1<\omega<\omega_2, d(\cdot)$ 在 ω 的邻域是凸的$\}$。显然 R 是开的。如果 $d(\cdot)$ 在 ω 的邻域不是凸的，则 $\omega\notin \mathbf{R}$，因此存在一个序列 $\omega_n\to\omega$，使得 $d''(\omega_n)<0$。由定理 7.1.8，$\omega_n\notin S$，因此 $\omega\notin S$。

定理 7.1.9 固定 ω，并设 $d''(\omega)=0$，则 $\langle Hy,y\rangle>0, \forall y\in X$，使得 $y\neq 0$，且 y 在 X 中正交于三个向量 $I^{-1}Q'(\phi)$，ϕ' 和 $T'(0)\phi$ 的每一个。

证明 由式(7.1.9)和假设 7.1.2，$JB\phi=T'(0)\phi\neq 0$。由式(7.1.19) $H\phi'=Q'(\phi)=B\phi\neq 0$，其中 $\phi'=\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\omega}$，由式(7.1.21) $\langle H\phi', \phi'\rangle=d''(\omega)=0$，这推出 ϕ' 必须具有非平凡分量 χ 和 P，于是可得谱分解

$$\phi' = a_0\chi + b_0T'(0)\phi + p_0 \qquad (p_0\in P) \tag{7.1.46}$$

其中 $a_0\neq 0$，$p_0\neq 0$，且

$$Q'(\phi) = H\phi' = a_0H\chi + Hp_0 \tag{7.1.47}$$

重复定理 7.1.4 的证明。如 y 正交于 $I^{-1}Q'(\phi)$ 和 $T'(0)\phi$，则 $\langle Hy, y\rangle\geqslant 0$，现设 $\langle Hy,y\rangle=0$，从定理 7.1.4 的证明中，有 Schwarz 等式

$$\langle Hp,p_0\rangle^2 \leqslant \langle Hp,p\rangle\langle Hp_0,p_0\rangle$$

其中 y 具有谱分解 $y=a\chi+p, p\in P$。因此 p 和 p_0 是线性相关的，于是

$$y = a\chi + acp_0 \tag{7.1.48}$$

其中 a，c 为常数。我们要证明：如果 y 正交于 ϕ'，则 $a=c=0$。因

$$0 = \langle I^{-1}Q'(\phi), y\rangle = \langle aH\chi + Hp_0, a\chi + cp_0\rangle,$$

$$0 = \langle \phi', y\rangle = \langle a_0\chi + p_0, a\chi + cp_0\rangle$$

于是 a，c 满足线性方程组，具有矩阵

$$\begin{pmatrix} a_0\langle H\chi,\chi\rangle & \langle Hp_0,p_0\rangle, \\ a_0 & \| p_0\|^2 \end{pmatrix}$$

这个矩阵是非奇的，这是由于$\langle H\chi,\chi\rangle$和$\langle Hp_0,p_0\rangle$具有反号。因此$a=c=0$。

推论 7.1.3 设$d''(\omega)=0$。如果ω充分接近于ω_0，而且$y\neq 0$正交于$I^{-1}Q'(\phi_\omega)$，ϕ'_ω和$T'(0)\phi_\omega$，则$\langle H_\omega y,y\rangle>0$。

证明 由对变元ω的连续性推得。

定理 7.1.10 设$d''(\omega)=0$。其中ω是固定的，设在含有ω的一个开区间上$d''\geqslant 0$，则存在$\varepsilon>0$，使得$E(u)>E(\phi)$，$\forall u\in U_\varepsilon$，$Q(u)=Q(\phi)$，$u\neq T(s)\phi$，$s\in\mathbf{R}$。

证明 记$\phi=\phi_\omega$，ω为固定的，给定$u\in U_\varepsilon$，定义

$$y=T(s)u-\phi_\Omega-aI^{-1}Q'(\phi_\Omega) \qquad (7.1.49)$$

我们要求选取三个参数s，Ω和a依赖于u，使得y正交于三个向量$T'(0)\phi_\Omega$，ϕ'_Ω和$I^{-1}Q'(\phi_\Omega)$。这是可以做到的，因为ϕ_Ω的某个邻域内，由隐函数定理提供的3×3行列式不为零。事实上，首先注意到当$s=0$，$\Omega=\omega$，$a=0$时，有$y=u-\phi_\omega$三个正交条件

$$0=(y,T''(0)\phi_\Omega)=(y,\phi'_\omega)=(y,I^{-1}Q'(\phi_\Omega)) \qquad (7.1.50)$$

其中y为式(7.1.49)给定，得到关于s，Ω和a的三个数量方程，计算在$s=0$，$\Omega=\omega$，$a=0$，$u=\phi_\omega=\phi$，Jacobi 为

$$\begin{pmatrix} \|T'(0)\phi\|^2 & 0 & -\langle Q'(\phi),T'(0)\phi\rangle \\ & & =0 \\ (T'(0)\phi,\phi') & -\|\phi'\|^2 & -\langle Q'(\phi),\phi'\rangle \\ & & =0 \\ \langle Q'(\phi),T'(0)\phi\rangle & -\langle Q'(\phi),\phi'\rangle & -\|I^{-1}Q'(\phi)\|^2 \\ =0 & =0 & \end{pmatrix}$$

这是一个三角矩阵。主对角线元素非零，因而，行列式非奇。进一步，

$$|s|+|\Omega-\omega|+|a|=O(\|u-\phi_\omega\|)=O(\|y\|),u\to\phi_\omega \qquad (7.1.51)$$

令 $v=T(s)u$,由 Taylor 展开得到

$$Q(u)=Q(v)=Q(\phi_\omega)+\langle Q'(\phi_\Omega),v-\phi_\Omega\rangle+$$
$$O(\|v-\phi_\Omega\|^2)=Q(\phi_\omega)+\langle Q'(\phi_\omega),\phi'_\omega\rangle(\Omega-\omega)+$$
$$O((\Omega-\omega)^2)+\langle Q'(\phi_\Omega),y+aI^{-1}Q'(\phi_\Omega)\rangle+$$
$$O(\|v-\phi_\Omega\|^2)=Q(\phi_\omega)+O((\Omega-\omega)^2)+$$
$$a\|I^{-1}Q'(\phi_\omega)\|^2+O(\|v-\phi_\omega\|^2)$$

由假设 $Q(u)=Q(\phi_\omega)$,且 $Q'(\phi_\omega)\neq0$,由此推出

$$|a|=O((\Omega-\omega)^2+\|v-\phi_\Omega\|^2)=O(\|y\|^2) \tag{7.1.52}$$

对 $E(v)-\Omega Q(v)$ 在 $v=\phi_\Omega$ 处作展开,注意到 $E'(\phi_\Omega)-\Omega Q'(\phi_\Omega)=0$ 和 $E''(\phi_\Omega)-\Omega Q''(\phi_\Omega)=H_\Omega$,于是

$$E(u)-\Omega Q(u)=E(v)-\Omega Q(v)=d(\Omega)+$$
$$\frac{1}{2}\langle H_\Omega(v-\phi_\Omega),v-\phi_\Omega\rangle+o(\|v-\phi_\Omega\|^2)$$

将 $v-\phi_\Omega=y+aI^{-1}Q'(\phi_\Omega)$代入上式得到为

$$d(\Omega)+\frac{1}{2}\langle H_\Omega y,y\rangle+O(a\|y\|)+O(a^2)+o(\|v-\phi_\Omega\|^2)$$

由式(7.1.52),所有误差项可写为 $o(\|y\|^2)$。由式(7.1.50)推论 7.1.3 的条件满足,$\omega_n\to\omega,\omega\to\Omega$,因此

$$E(u)-\Omega Q(u)\geqslant d(\Omega)+\delta\|y\|^2+O(\|y\|^2)$$

当 $y\neq0$ 时,$E(u)-\Omega Q(u)>d(\Omega)$。由假设 $u\neq T(r)\phi_\omega,\forall r\in\mathbf{R}$。取充分小的管 U_ϵ,有 $u\neq T(r)\phi_\Omega,\forall r\in\mathbf{R}$,因此 $y\neq0$。于是

$$E(u)-\Omega Q(u)>d(\Omega)\geqslant d(\omega)+d'(\omega)(\Omega-\omega)=$$
$$E(\phi_\omega)-\omega Q(\phi_\omega)-Q(\phi_\omega)(\Omega-\omega)=E(\phi_\omega)-\Omega Q(\phi_\omega)$$

因 $Q(u)=Q(\phi_\omega)$,由此推出 $E(u)>E(\phi_\omega)$。

现来证明定理 7.1.1 和定理 7.1.2。先证定理 7.1.2,当 d 不是凸的和 $d''(\omega)>0$,已在推论 7.1.2 和定理 7.1.5 中处理过。模仿定理 7.1.5 的证明,我们有 $v_n\in U_\epsilon,Q(v_n)=Q(\phi),E(v_n)\to E(\phi)$。由定理 7.1.10 必须有

$$\inf_{s\in\mathbf{R}}\|v_n - T(s)\phi\| \to 0$$

因此$\inf_{s\in\mathbf{R}}\|u_n(t_n)-T(s)\phi\|\to 0$它和式(7.1.24)矛盾,定理7.1.2证毕。

再证明定理7.1.1由关于(H)的假定,显然对于任何非零的向量y正交于核$T'(0)\phi$有$\langle Hy,y\rangle>0$,由简单的Taylor展开,我们有定理7.1.5的结论。最后,稳定性的证明如同定理7.1.6。

我们能把上述结果推广到Banach空间。设X为实Banach空间。J和E定义如前,T为单参数强连续半群:$X\to X$(等距)。式(7.1.4)、(7.1.8)和式(7.1.9)成立,B仅为对称:$\langle Bu,v\rangle=\langle Bv,u\rangle$,$u,v\in X$,$Q(u)$由式(7.1.10)的定义。

假设式(7.1.3)对$\omega\in(\omega_1,\omega_2)$,令$H_\omega=E''(\phi_\omega)-\omega Q''(\phi_\omega)$。设

(i) 存在$\chi\in X$,使得$\langle H\chi,\chi\rangle<0$;

(ii) 存在闭子空间$P\subset X$,使得

$$\langle Hp,p\rangle\geqslant\delta\|p\|^2,p\in P;$$

(iii) 对于一切$u\in X$,存在唯一的常数a,b和唯一的$p\in P$,使得

$$u=a\chi+bT'(0)\phi+p$$

则定义$\Pi_p(u)=p,\Pi_0(u)=b,\Pi_N(u)=a$,这些算子是连续投影。置换假设式(7.1.2)为

(C_1) 泛函$u\to\Pi_0(T'(s)u)\in D(J)$;

(C_2) 泛函$u\to\Pi_0(T'(s)^2u)\in X^*$, $\forall s\in\mathbf{R}$,

则有定理

定理 7.1.11 如X为Banach空间,上述假设成立,则定理7.1.2和定理7.1.3成立。

例 非线性波动方程的行波

考虑非线性波动方程

$$u_{tt}-u_{xx}+f(u)=0 \tag{7.1.53}$$

这个方程具有空间平移不变性。式(7.1.53)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}=JE'(\mathbf{u})$$

其中

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\quad J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$E(\mathbf{u})=\int(\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{2}u_x^2+F(u))\mathrm{d}x \tag{7.1.54}$$

$$F'=f,F(0)=0,$$

具有同构 $I:X\to X^*$，其中

$$I=\begin{bmatrix}-\Delta+1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

上述方程初值问题在 X 上确定。$T(s)$为在 X 上的酉群，

$$T'(0)=\begin{pmatrix}\partial_x&0\\0&\partial_x\end{pmatrix},D(T'(0))=H^2(\mathbf{R})\times H^1(\mathbf{R})\subset X,$$

$$J^{-1}T(s)=T^*(s)J^{-1}$$

动量守恒

$$Q(u)=\frac{1}{2}\langle Bu,u\rangle=\int u_xv\mathrm{d}x \tag{7.1.55}$$

其中

$$B=\begin{pmatrix}0&-\partial_x\\\partial_x&0\end{pmatrix}$$

为求行波解，需求如下方程的非零解

$$E'(\Phi)-\omega Q'(\Phi)=0$$

即 $\Phi=\begin{pmatrix}\phi\\\psi\end{pmatrix}$ 满足方程组

$$-(1-\omega^2)\phi_{xx}+f(\phi)=0 \tag{7.1.56}$$

$$\psi=\omega\phi_x \tag{7.1.57}$$

设 f 满足如下条件：

(i) $f'(0)>0$；

(ii) $\exists\eta$，使得 $F(\eta)<0$(从(i)推出 $F(u)$至少有一个零点在 u_0 处)；

(iii) 如 u_0 为 F 的零点，具有最小非零绝对值，则 $f'(u_0)\neq 0$。

引理 7.1.8 如 f 满足(i)～(iii)，则方程

$$-p_{xx}+f(p)=0$$

具有唯一解，且满足

(1) $p(x)>0, p(x)=p(-x), p(0)=u_0$;

(2) $p(x)$指数衰减，如 $e^{-c|x|}, c>0$。

令 $\phi_\omega(x)=p(x/\sqrt{1-\omega^2}), \omega\in(-1,1)$，则 $\phi_\omega(x)$满足式(7.1.56)，具有非零行波解的线性化算子为

$$L_\omega=-(1-\omega^2)\partial_x^2+f'(\phi_\omega) \tag{7.1.58}$$

L_ω 的核由 $\partial_x\phi_\omega$ 所张成。因 $\partial_x\phi_\omega$ 在 $x=0$ 处具有简单零点，L_ω 仅有一个负特征值$-\alpha_\omega^2$，和特征函数 χ_ω，

$$L_\omega\chi_\omega=-\alpha_\omega^2\chi_\omega \tag{7.1.59}$$

为了验证定理 7.1.11 条件(iii)，我们计算算子的谱

$$H_\omega=E''(\phi_\omega)-\omega Q''(\phi_\omega)=\begin{pmatrix} L_0 & \omega\partial_x \\ -\omega\partial_x & 1\end{pmatrix} \tag{7.1.60}$$

引理 7.1.9 算子 H_ω 的谱如下：

(1)存在一个负的简单特征值；

(2)核由 $T'(0)\phi_\omega$ 所张成；

(3)H_ω 的正谱是有界的，远离于 0。

证明 令 $\Psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$为 H_ω 的对应于特征值 λ 的特征函数。

$$H_\omega\Psi=\lambda\Psi$$

即

$$-\partial_x^2\psi_1+f'(\phi_\omega)\psi_1+\omega\partial_x\psi_2=\lambda\psi_1,$$
$$-\omega\partial_x\psi_1+\psi_2=\lambda\psi_2$$

对 $\lambda\neq 1$ 可写上述方程为

$$-(1-\omega^2)\partial_x^2\psi_1+f'(\phi_\omega)\psi_1=\frac{\lambda(1-\omega^2)-\lambda^2}{1-\lambda}\psi_1 \tag{7.1.61}$$

$$\psi_2 = \frac{\omega}{\lambda - 1}\partial_x\psi_1 \tag{7.1.62}$$

如 $\lambda<0$，则由式(7.1.59)有

$$\frac{\lambda(1-\omega^2)-\lambda^2}{1-\lambda} = -\alpha_\omega^2$$

或

$$\lambda^2-(1-\omega^2-\alpha_\omega^2)\lambda-\alpha_\omega^2=0$$

它仅有一个负根。因此 H_ω 仅有一个负特征值 $\lambda_-(\omega)$。

其次，我们易知 H_ω 的核由 $T'(0)\phi_\omega$ 所张成。由关于本性谱的 Weyl 定理，可知 H_ω 的其他谱是有界的，且远离于 0。

因 H_ω 满足定理的条件，行波的稳定性由 $d''(\omega)$ 的符号决定。因

$$d'(\omega) = -Q(\phi_\omega) = -\omega\int|\partial_x\phi_\omega|^2\mathrm{d}x$$

因此

$$d''(\omega) = (\sqrt{1-\omega^2})''\int|\partial_x p|^2\mathrm{d}x < 0$$

于是可知，所有行波是不稳定的。

附注 对于已知具有扭状解 $\phi_\omega(x-\omega t)$，行波单调地从 f 的一个零点到另一个零点。因此 $\partial_x\phi_\omega$ 不消失，且是算子 L_ω 具特征值 0 的最小特征函数，H_ω 由式(7.1.60)给出，由式(7.1.61)H_ω 不具有任何负的特征值。由定理 7.1.1，扭状解永远是稳定的。

为了得到孤立波解的稳定性或不稳定性的条件，我们寻求自共轭算子 H 的条件，设 $u(t)=T(e^{t\omega})\phi, \omega\in g, \phi\in X$，则 $T(e^{\omega t})\phi$ 为有界态，仅当 $E'(\phi)=Q'_\omega(\phi)$。设 H 为正定的，JH 和 $\sqrt{H}J\sqrt{H}$ 相似。因而它的谱是虚的。因 H 是 $E(\phi)-Q_\omega(\phi)$ 的二阶导数，我们希望 $E(\phi)-Q_\omega(\phi)$ 取得极小时是稳定的。但因 Q_ω 保持不变，我们充分地寻求能量 E 在常数电荷集合中取得极小。有以下定理

定理 7.1.12 如 $E(v)$ 限制在集合

$$\{v\in X\,|\,Q_\sigma(v)=Q_\sigma(\phi_\omega),\ \forall\sigma\in g_\omega\}$$

上，当 ϕ_ω 取极小时，则 ϕ_ω 是稳定的。其中 g_ω 为李群。

一般来说，约束条件下的极小值问题，线性 Hamilton 量 H 具有某些负的谱。但如果不具有太多的负谱时，孤立波仍然是稳定的。以下叙述两个简便可作判别的定理。

定义 7.1.6 $d(\sigma): g_\omega \to \mathbf{R}$,

$$d(\sigma) = E(\phi_\sigma) - Q_\sigma(\phi_\sigma) \tag{7.1.63}$$

并以 $d''(\sigma)$表示它的 Hessian 矩阵。

定理 7.1.13 如果 H 的负特征值的个数 $\mathrm{neg}H$ 等于 $d''(\sigma)$ 的正特征值个数 $\mathrm{pos}(d'')$，则 ϕ 是稳定的。

定理 7.1.14 如果 $\mathrm{neg}(H)-\mathrm{pos}(d'')$是一个奇的正整数，则 ϕ 是不稳定的。

作为上述定理的应用，举几个例子。

例 1 非线性 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}u_t - \Delta u - |u|^{p-1}u = 0,\ x \in \mathbf{R}^n \tag{7.1.64}$$

此时

$$E(u) = \int\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{p+1}|u|^{p+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$Q(u) = \frac{1}{2}\int|u|^2\mathrm{d}x$$

$J=\mathrm{i}, G=S^1: u(x)\to\exp(\mathrm{i}\theta)u(x)$，$\theta$ 为实数。现来应用定理 7.1.13 和定理 7.1.14。取空间 X 为 $H^1(\mathbf{R}^n,\mathbf{C})=H^1(\mathbf{R}^n;\mathbf{R})+H^1(\mathbf{R}^n;\mathbf{R})$，即分为实部和虚部两部分，线性化 Hamilton 量 H 为 2×2 的对角矩阵，其对角元素 R 和 S 为

$$R=-\Delta+\omega-p|\phi|^{p-1},\quad S=-\Delta+\omega-|\phi|^{p-1}$$

S 的核空间是一维的，是由 ϕ 张成的。因 $\phi(x)$是正的，S 的最小特征值是正的，$S\geqslant0$，R 的核空间是由$\dfrac{\partial\phi}{\partial x_k}(k=1,2,\cdots,n)$生成的，它们不是正的。$R$ 的最小特征值是负的，ϕ 是极小问题

$$\inf\frac{1}{n}\int|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x$$

在约束条件

$$\int\left[-\frac{1}{2}\omega\phi^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)|\nabla\phi|^2-\frac{1}{p+1}|\phi|^{p+1}\right]\mathrm{d}x=0$$

下的解。于是可得 neg$(H)=$neg$(S)+$neg$(R)=0+1=1$。

从

$$\begin{cases}d(\omega)=E(\phi)-\omega Q(\phi)\\ d'(\omega)=-\langle E'(\phi)-\omega Q'(\phi),\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\omega}\rangle-Q(\phi)=-Q(\phi)\\ d''(\omega)=-\langle Q'(\phi),\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\omega}\rangle=-\langle H(\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\omega}),\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\omega}\rangle\end{cases}\tag{7.1.65}$$

有

$$d'(\omega)=-\frac{1}{2}\int|\phi|^2\mathrm{d}x$$

其中 ϕ 满足

$$-\omega\phi-\Delta\phi-|\phi|^{p-1}\phi=0$$

置

$$\phi(x)=(-\omega)^{-\frac{1}{p-1}}\Psi(\sqrt{-\omega}x)$$

其中 Ψ 满足

$$\Psi-\Delta\Psi-|\Psi|^{p-1}\Psi=0$$

因此

$$d'(\omega)=-(-\omega)^b\frac{1}{2}\int|\Psi|^2\mathrm{d}x$$

$$d''(\omega)=b(-\omega)^{b-1}\frac{1}{2}\int|\Psi|^2\mathrm{d}x$$

其中 $b=\frac{2}{p-1}-\frac{n}{2}$。如 $1<p<1+\frac{4}{n}$，则 $b>0$，$d''(\omega)>0$，且 neg$(H)=1=$pos(d'')。依定理 7.1.13，孤立波是稳定的，如 $1+\frac{4}{n}<p<1+\frac{4}{n-2}$，则 neg$(H)-pos(\mathrm{d}'')=1-0=1$ 是奇数。依定理

7.1.14,孤立波则是不稳定的。

例 2 耦合波动方程组

$$u_{tt} - u_{xx} + u - |u|^2 u = 0 \tag{7.1.66}$$

其中 $x \in \mathbf{R}, u(x,t) \in \mathbf{R}^3$,考虑如下形式的孤立波解

$$u = e^{tS} \phi(x + \omega_0 t) \tag{7.1.67}$$

其中 ω_0 为实数;S 为 3×3 反对称矩阵。写 $Sy = \omega \wedge y$,其中 $\omega \in \mathbf{R}^3$。将式(7.1.67)代人式(7.1.66),则 ϕ 满足方程

$$-\partial_x^2 \phi + \phi - |\phi|^2 \phi + (\omega_0 \partial_x + S^2)\phi = 0$$

令

$$\phi(x) = \eta(x) \exp(\alpha x S) \nu$$

其中 ν 为与 ω 正交的单位向量,则可得 $\eta(x)$ 满足的方程

$$-(1 - \omega_0^2)\partial_x^2 \eta - |\omega|^2 (1 - \omega_0^2)^{-1} \eta + \eta - \eta^3 = 0$$

设 $\omega_0^2 + |\omega|^2 < 1$,则存在唯一正解 $\eta(x)$,且当 $|x| \to \infty$ 时,它指数衰减于 0。写式(7.1.66)为 Hamilton 形式。能量 E 为

$$E(u) = \int \left[\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} |u|^2 - \frac{1}{4} |u|^4\right] dx$$

J 为通常的反对称矩阵,李群 $G = SO(3) \times \mathbf{R}$,即旋转作用于 u 和平移作用于 x,$\mathbf{u}(x) \to R\mathbf{u}(x + a)$,其中 $R \in SO(3)$,$a \in R$。电荷为 $\int Su \cdot v dx$ 和 $\int \partial_x u \cdot v dx$,其中 S 为任意反对称矩阵,$\mathbf{u} = [u, v]^T \in X$,则线性化 Hamilton 为

$$H = \begin{pmatrix} -\partial_{xx}^2 + 1 + 3\phi^2 & \omega_0 \partial_x + S^2 \\ -\omega_0^2 \partial_x - S & 1 \end{pmatrix} \tag{7.1.68}$$

类似于非线性 Schrödinger 方程的分析,可证 H 仅具有一个负特征值。数量函数 $d(\omega)$ 具有形式

$$d(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3) =$$

$$\frac{1}{2} \int \left[|\partial_x \phi|^2 + |\phi|^2 - \frac{1}{2} |\phi|^4 + |(\omega_0 \partial_x + S)\phi|^2\right] dx =$$

$$\frac{1}{2} \int \left[(1 - \omega_0^2) |\partial_x \eta|^2 + (1 - |\omega|^2 (1 - \omega_0^2)^{-1}) \eta^2 - \frac{1}{4} \eta^4\right] dx$$

必须计算 $d(\omega_0,|\omega|)$的 Hessian 矩阵,其中

$$d(\omega_0,|\omega|) = C(1-\omega_0^2)^{-1}(1-\omega_0^2-|\omega|^2)^{\frac{3}{2}} \tag{7.1.69}$$

如果 ω_0 或 $|\omega|$是小的,则 $d''(\omega_0,|\omega|)$具有两个负特征值。因此 $\text{neg}(H)-\text{pos}(d'')=1-0=1$。依定理 7.1.14,孤立波是不稳定的。

另一方面,如$|\omega|$靠近$(1-\omega_0^2)^{\frac{1}{2}}$,则 $d''(\omega_0,|\omega|)$仅有一个正特征值和一个负特征值,因此

$$\text{neg}(H)-\text{pos}(d'')=1-1=0$$

依定理 7.1.13,孤立波是稳定的。

例 3 广义 KdV 方程

$$u_t + u_{xxx} + (u^p)_x = 0, x \in \mathbf{R} \tag{7.1.70}$$

考虑方程(7.1.70)的实值解,且当$|x|\to\infty$时消失。$p>1$,显然,式(7.1.72)对 x 是平移不变的。此时,孤立波解为

$$u(x,t) = \phi(x-ct)$$

因 ϕ 满足常微分方程,容易看到对一切 $c>0,p>1$。孤立波解是存在的。$p=2$ 时,即为经典的 KdV 方程,它具有孤立波解,而且是非常稳定的。但当 p 适当大时,稳定性丧失。可以证明:仅当 $p<5$ 时,孤立波是稳定的。

作为应用,令 X 为实的 $H^1(\mathbf{R})$空间,$J=\dfrac{\partial}{\partial x}$,

$$E(u) = \int\left[\frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{p+1}u^{p+1}\right]\mathrm{d}x,$$

$$Q(u) = \frac{1}{2}\int u^2\mathrm{d}x$$

$G=R$ 是对 x 的平移群,不难看到 J 不是满射的。因此不能直接应用以前的定理。但可应用修改了的不稳定性证明。事实上,我们需增加 KdV 方程的一个不变量

$$I(u) = \int u\mathrm{d}x$$

设 $p>5$,线性 Hamilton$H=-\partial_{xx}^2+c-p\phi^{p-1}$,$\partial_x\phi$ 形成它的核空间,可证明存在 $y\in X$,使得

$$\langle Hy,y\rangle < 0, \langle y,\phi\rangle = 0$$

令 $Y=J^{-1}y, Y(x)=\int_{-\infty}^{x} y(z)\mathrm{d}z$,

$$A(t)=\int_{-\infty}^{\infty} Y(x-\beta(t))u(x,t)\mathrm{d}x$$

选取 $\beta(t)$,使得 $u(x+\beta(t),t)$ 和 $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ 正交。当 $x\to-\infty$ 时,$Y(x)\to 0$; $x\to+\infty$,$Y(x)\to\gamma=\int_{-\infty}^{\infty} y(z)\mathrm{d}z$。因此 $A(t)$ 逼近于

$$\int_{\beta(t)}^{\infty} u(x,t)\mathrm{d}x$$

利用估计

$$\sup_{-\infty<z<\infty}\left|\int_{z}^{\infty} u(x,t)\mathrm{d}x\right| \leqslant c_1(1+t^{\frac{2}{3}})$$

可得

$$|A(t)| \leqslant c_2(1+t^{\frac{2}{3}}), 0\leqslant t\leqslant t_1 \qquad (7.1.71)$$

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} \geqslant E(\phi)-E(u(0))>0, 0\leqslant t\leqslant t_1 \quad (7.1.72)$$

比较式(7.1.71)和式(7.1.72),可知 $t_1<\infty$,当 t 充分大时,存在 $\varepsilon_1>0$ 和 $\delta>0$,使得当

$$\| u(0)-\phi \| <\delta$$

时有

$$\inf_{s\in \mathbf{R}} \| u(t)-T(s)\phi_c \| >\varepsilon_1$$

因此它是不稳定的。

7.2 具导数非线性 Schrödinger 方程

考虑如下具导数非线性 Schrödinger 方程孤立波的稳定性

$$u_t=\mathrm{i}u_{xx}+\mathrm{i}g(|u|^2)u+[(s_0+s_2|u|^2)u]_x, x\in \mathbf{R} \qquad (7.2.1)$$

其中

$$g(|u|^2) = c_3|u^2| + c_5|u|^4 \tag{7.2.2}$$

显然，如果 $u(x,t)$ 为式(7.2.1)的解，则 $u(x-s_0t,t)$ 为如下方程

$$u_t = \mathrm{i}u_{xx} + \mathrm{i}g(|u|^2)u + s_2(|u|^2u)_x,\ x \in \mathbf{R} \tag{7.2.3}$$

的解。进一步，如 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(x-vt)}a(x-vt)$ 为式(7.2.3)的一个孤立子解，则

$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(x-(v-s_0)t)}a(x-(v-s_0)t)$ 为式(7.2.1)的孤立子解。

以下考虑方程

$$u_t = \mathrm{i}u_{xx} + \mathrm{i}(c_3|u|^2 + c_5|u|^4)u + s_2(|u|^2u)_x, u \in \mathbf{R} \tag{7.2.4}$$

其中 s_2, c_3, c_5 是实常数。设式(7.2.4)的孤立波具有形式

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(x-vt)}a(x-vt) \tag{7.2.5}$$

其中：ω, v 为实常数；$\psi(\cdot), a(\cdot)$ 为实函数。

在文献[233]中，已证存在形式(7.2.5)的孤立波

$$a^2(\xi) = (d_3 + d_5\cosh d_6\xi)^{-1},\ \xi \in \mathbf{R} \tag{7.2.6}$$

$$\psi'(\xi) = \frac{v}{2} + \frac{3}{4}s_2a^2(\xi) \tag{7.2.7}$$

$$d_3 = -(d_2/2d_0),\ d_5^2 = (d_2^2 - 4d_0d_4)/4d_0^2 \tag{7.2.8}$$

$$d_6^2 = 4d_0, d_0 = -\omega - \frac{v^2}{4}, d_2 = -\frac{1}{2}c_3 - \frac{1}{4}s_2v \tag{7.2.9}$$

$$d_4 = -\frac{1}{3}(c_5 + 3s_2^2/16) \tag{7.2.10}$$

于此，我们可以考虑式(7.2.4)的非负解。

假设 7.2.1 以下条件满足：

$$\begin{aligned}&(1)\ d_0 > 0, d_2 < 0,\\&(2)\ d_4 \leqslant 0,\text{或 } d_4 > 0, d_2^2 - 4d_0d_4 > 0\end{aligned} \tag{7.2.11}$$

由式(7.2.6)～(7.2.10)和假设 7.2.1，可得如下存在性结果。

定理 7.2.1 对任何固定的实数 c_3, c_5, s_2，如果 ω, v 满足假设 1，则存在(7.2.4)的孤立波解 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(x-vt)}a(x-vt)$，其中 $a(\xi)$，$\psi(\xi)$ 具有形式(7.2.6)、(7.2.7)。

令

$$\hat{a}(x) = e^{i\psi(x)}a(x) \qquad (7.2.12)$$

由式(7.2.4)～(7.2.10)，易知 $\hat{a}(x)$满足

$$-\hat{a}_{xx} - g(a^2)\hat{a} + is_2(a^2\hat{a})_x - \omega\hat{a} + iv\hat{a}_x = 0 \qquad (7.2.13)$$

和 $a(x)$满足

$$a'' + g(a^2) + s_2a^2\psi' - (\psi')^2 + \omega + v\psi' = 0 \qquad (7.2.14)$$

其中 $g(a^2)=c_3a^2+c_5a^4$。

现考虑如下初值问题

$$u_t = iu_{xx} + i(c_3|u|^2 + c_5|u|^4)u - s_2(|u|^2u)_x,\ u \in \mathbf{R} \qquad (7.2.15)$$

$$u(0,x) = u_0(x),\ x \in \mathbf{R} \qquad (7.2.16)$$

设 $X=H^1(\mathbf{R})$，具有内积

$$(u,v) = \mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}(u_x\bar{v}_x + u\bar{v})\mathrm{d}x \qquad (7.2.17)$$

X 的对偶 $X^*=H^{-1}(\mathbf{R})$，存在自然同构 $I:X\to X^*$ 定义为

$$\langle Iu,v\rangle = (u,v) \qquad (7.2.18)$$

其中$\langle , \rangle$表示 X 和 X^*之间的配对，

$$\langle f,u\rangle = \mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}} f\bar{u}\mathrm{d}x \qquad (7.2.19)$$

由式(7.2.17)～(7.2.19)，显然有

$$I = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 \qquad (7.2.20)$$

设 T_1,T_2 为定义在 X 上的单参数酉算子，

$$T_1(s_1)\phi(\cdot)=e^{-s_1i}\phi(\cdot) \quad 对\ \phi(\cdot)\in X,s_1\in\mathbf{R} \qquad (7.2.21)$$

$$T_2(s_2)\phi(\cdot)=\phi(\cdot-s_2) \quad 对\ \phi(\cdot)\in X,s_2\in\mathbf{R} \qquad (7.2.22)$$

显然 $T_1'(0)=-i, T'_2(0)=-\frac{\partial}{\partial x}$。

由定理 7.2.1，我们已经得到式(7.2.15)的孤立波解 $T_1(\omega t)T_2(vt)\hat{a}_{\omega,v}(x)$的存在性，其中 $\hat{a}_{\omega,v}$为式(7.2.8)～(7.2.10)和式

(7.2.12)所定义。今后我们考虑孤立波 $T_1(\omega t)T_2(vt)\hat{a}_{\omega,v}(x)$ 的轨道稳定性。方程(7.2.15)具有位相和平移的对称性。

定义 7.2.1 我们说孤立波 $T_1(\omega t)T_2(vt)\hat{a}_{\omega,v}(x)$ 为轨道稳定的，如果对一切 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，具有如下性质：如果 $\|u_0-\hat{a}_{\omega,v}\|_X<\delta$，$u(t)$ 为式(7.2.15)在区间$[0,t_0)$上具有初值 $u(0)=u_0$ 的一个解，且能连续延拓到 $0\leqslant t<\infty$，而且

$$\sup_{0<t<\infty}\inf_{s_1\in\mathbf{R}}\inf_{s_2\in\mathbf{R}}\|u(t)-T_1(s_1)T_2(s_2)\hat{a}_{\omega,v}\|_X<\varepsilon$$

否则，则称 $T_1(\omega t)T_2(vt)\hat{a}_{\omega,v}(x)$ 是轨道不稳定的。

我们注意到当 $s_2\neq 0$ 时，方程(7.2.15)不可写成 Hamilton 形式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=JE'(u(t))$$

因此上面有关孤立波稳定性的抽象理论不能直接应用，我们必须构造三个适当的运动不变量，使问题得到解决。

定义 7.2.2

$$E(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}\{|u_x|^2+\frac{s_2^2}{2}|u|^6-G(|u|^2)+\frac{3s_2}{2}\mathrm{Im}(|u|^2,u\bar{u}_x)\}\mathrm{d}x \tag{7.2.23}$$

其中 $G(u)=\int_0^u g(s)\mathrm{d}s$，$g(s)=c_3s^2+c_5s^4$

$$Q_1(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}|u|^2\mathrm{d}x \tag{7.2.24}$$

$$Q_2(u)=\int_{\mathbf{R}}[\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar{u}u_x)-\frac{1}{4}s_2|u|^4]\mathrm{d}x \tag{7.2.25}$$

容易验证 $E(u)$，$Q_1(u)$，$Q_2(u)$在 T_1 和 T_2 下是不变的，对 $s_1,s_2\in\mathbf{R}$，

$$\begin{cases}E(T_1(s_1)T_2(s_2)u)=E(u),\\ Q_1(T_1(s_1)T_2(s_2)u)=Q_1(u),\\ Q_2(T_1(s_1)T_2(s_2)u)=Q_2(u)\end{cases} \tag{7.2.26}$$

对任何 $t\in\mathbf{R}$，$u(t)$为(7.2.15)的流，有

$$E(u(t)) = E(u(0)),Q_1(u(t)) = Q_1(u(0)),\quad Q_2(u(t)) = Q_2(u(0)) \tag{7.2.27}$$

容易验证 E，Q_1，Q_2 均为定义在 X 上的 C^2 泛函。它们的导数分别记为$\langle E'(u),v\rangle$，$\langle Q'_1(u),v\rangle$和$\langle Q'_2(u),v\rangle$，其中 $E',Q'_1,Q'_2:X\to X^*$，二阶导数为$\langle E''(u)w,v\rangle$，$\langle Q''_1(u)w,v\rangle$，$\langle Q''_2(u)w,v\rangle$。由计算有

$$E'(u) = -u_{xx} + \frac{3}{2}s_2^2|u|^4u - g(|u|^2)u + 3\mathrm{i}s_2|u|^2u_x,$$

$$Q'_1(u) = u,$$

$$Q'_2(u) = -\mathrm{i}u_x - s_2|u|^2u$$

设 $T_1(\omega t)T_2(vt)\hat{a}_{\omega,v}(x)$为式(7.2.15)的孤立波解。易于验证

$$E'(\hat{a}(x)) - \omega Q'_1(\hat{a}(x)) - vQ'_2(\hat{a}(x)) = 0 \tag{7.2.28}$$

注意到

$$E'(\hat{a}) - \omega Q'_1(\hat{a}) - vQ'_2(\hat{a}) = -\hat{a}_{xx} +$$

$$\frac{3}{2}s_2^2a^4\hat{a} - g(a^2)\hat{a} + 3\mathrm{i}s_2a^2\hat{a}_x - \omega\hat{a} + v(\mathrm{i}\hat{a}_x + s_2a^2\hat{a}) =$$

$$\frac{3}{2}s_2^2a^4\hat{a} + 3\mathrm{i}s_2a^2\hat{a}_x + vs_2a^2\hat{a} - \mathrm{i}s_2(a^2\hat{a})_x =$$

$$2s_2a^2\psi'\hat{a} + 2\mathrm{i}s_2a^2(\mathrm{i}\psi'\hat{a} + a'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}) - 2\mathrm{i}s_2aa_x\hat{a} = 0$$

对于任何 $u,\phi\in X$，由计算可得

$$E''(u)\phi = -\phi_{xx} + \frac{3}{2}s_2^2(3|u|^4\phi + 2|u|^2u^2\overline{\phi}) - g(|u|^2)\phi -$$

$$g'(|u|^2)(\overline{u}\phi + u\overline{\phi})u + 3\mathrm{i}s_2(|u|^2\phi_x + \phi\overline{u}u_x + \overline{\phi}uu_x),$$

$$Q''_1(u)\phi = \phi,$$

$$Q''_2(u)\phi = -\mathrm{i}\phi_x - 2s_2|u|^2\phi - s_2u^2\overline{\phi}$$

定义算子 $H_{\omega,v}:X\to X^*$

$$H_{\omega,v} = E''(\hat{a}) - \omega Q''_1(\hat{a}) - vQ''_2(\hat{a}) \tag{7.2.29}$$

则对任何 $\phi\in X$，有

$$H_{\omega,v}\phi = -\phi_{xx} + \frac{3}{2}s_2^2(3|a|^4\phi + 2|a|^2\hat{a}^2\overline{\phi}) -$$

$$g(|a|^2)\phi - g'(|a|^2)(\overline{\hat{a}}\phi + \hat{a}\overline{\phi})\hat{a} +$$

$$3is_2(|a|^2\phi_x + \phi\overline{\hat{a}}\hat{a}_x + \overline{\phi}\hat{a}\hat{a}_x) - \omega\phi +$$

$$iv\phi_x + 2vs_2|a|^2\phi + vs_2\hat{a}^2\overline{\phi} \tag{7.2.30}$$

注意到 $H_{\omega,v}$ 是自共轭的，$H_{\omega,v}^* = H_{\omega,v}$，这意味着 $I^{-1}H_{\omega,v}$ 为在 X 上的有界自共轭算子，$H_{\omega,v}$ 的谱由这样的实数 λ 组成，$H_{\omega,v}-\lambda I$ 不是可逆的，我们要求 $\lambda=0$ 属于 $H_{\omega,v}$ 的谱。

由式(7.2.26)、(7.2.27)，容易证明

$$H_{\omega,v}T_1'(0)\hat{a}(x) = 0 \tag{7.2.31}$$

$$H_{\omega,v}T_2'(0)\hat{a}(x) = 0 \tag{7.2.32}$$

$$T_1'(0)\hat{a}(x) = -ia(x)e^{i\psi(x)},$$

$$T_2'(0)\hat{a}_{(x)} = -(a'(x) + i\psi'(x)a)e^{i\psi(x)} =$$

$$-(a'(x) + i(\frac{v}{2} + \frac{3}{4}s_2a^2)a)e^{i\psi(x)}$$

令 $Z=\{k_1T_1'(0)\hat{a}(x)+k_2T_2'(0)\hat{a}(x)\,|\,k_1,k_2\in\mathbf{R}\}$。由式(7.2.31)和式(7.2.32)，可知 Z 含在 $H_{\omega,v}$ 的核内。

假设 7.2.2 $H_{\omega,v}$ 的谱分解：空间 X 分解为直接和

$$X = N + Z + P \tag{7.2.33}$$

其中 Z 已为上面定义过，N 为一个有限维子空间，使得

$$\langle H_{\omega,v}u, u\rangle < 0 \text{ 对 } 0 \neq u \in N \tag{7.2.34}$$

P 是一个闭子空间，使得

$$\langle H_{\omega,v}u, u\rangle \geqslant \delta\|u\|_X^2 \quad \text{对 } u \in P \tag{7.2.35}$$

其中常数 $\delta>0$ 与 u 无关。

定义 7.2.3 $d(\omega,v)$：$\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为

$$d(\omega,v) = E(\hat{a}_{\omega,v}) - \omega Q_1(\hat{a}_{\omega,v}) - vQ_2(\hat{a}_{\omega,v}) \tag{7.2.36}$$

我们定义 $d''(\omega,v)$ 为函数 d 的 Hessian 矩阵。它具有对称双线性形式。

式(7.2.15)、(7.2.16)初值问题的解 $u\in H^1$ 的局部存在性已

在文献[234]中得到。

类似前面的抽象稳定性定理，可得

定理 7.2.2 抽象稳定性定理：设存在三个泛函 $E(u)$，$Q_1(u)$，$Q_2(u)$满足式(7.2.26)、(7.2.27)，则存在孤立波解 $T_1(\omega t)T_2(vt)\hat{a}_{\omega,v}(x)$，$(\omega,v)\in\Omega\overset{\text{def}}{=\!=}(\omega_1,\omega_2)\times(v_1,v_2)$，使得式(7.2.28)～(7.2.29)和假设 7.2.2 成立。令 $n(H_{\omega,v})$为 $H_{\omega,v}$的负特征值，设 $d(\omega,v)$在(ω,v)处非退化和 $p(d'')$为 d''正特征值的数目。如果 $p(d'')=n(H_{\omega,v})$，则孤立波 $T_1(\omega t)T_2(vt)\hat{a}_{\omega,v}(x)$为轨道稳定的。

定理 7.2.3 主要定理：对任何实的固定常数 c_3,c_4,s_2，如果 ω,v 满足假设 7.2.1，则式(7.2.15)的孤立波 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\hat{a}(x-vt)$为轨道稳定的。

证明 我们只需验证定理 7.2.2 的条件成立。由式(7.2.23)～(7.2.28)，我们仅需验证假设 7.2.2 成立和 $n(H_{\omega,v})=p(d'')$。

对任何 $\phi(x)\in X$，令

$$\phi(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x)}z(x),z(x)=z_1(x)+z_2(x),z_1(x)=\mathrm{Re}\ z(x) \tag{7.2.37}$$

则

$$H_{\omega,v}\phi=[L_{11}z_1+L_{12}z_2+\mathrm{i}(L_{21}z_1+L_{22}z_2)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

其中

$$L_{11}=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(\psi')^2-g(a)^2-2g'(a^2)a^2-$$

$$\omega-v\psi'+s_2a^2\psi'-2s_2a^2v,$$

$$L_{12}=\psi''-\frac{3}{2}s_2a^2\frac{\partial}{\partial x},$$

$$L_{21}=\psi''+\frac{3}{2}s_2a^2\frac{\partial}{\partial x}+6s_2aa',$$

$$L_{22}=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(\psi')^2-g(a^2)-\omega-v\psi'-s_2a^2\psi',$$

$$\langle H_{\omega,v}\phi,\phi\rangle=\langle L_{11}z_1,z_1\rangle+\langle L_{12}z_2,z_1\rangle+\langle L_{21}z_1,z_2\rangle+$$

$$\langle L_{22}z_2,z_2\rangle=\langle\overline{L}_{11}z_1,z_1\rangle+\langle L_{22}z_2,z_2\rangle+$$

$$\langle \frac{9}{4} s_2^2 a^4 z_1 + 3s_2 a a' z_2, z \rangle - \langle 3s_2 a^2 z_2', z_1 \rangle \tag{7.2.38}$$

其中

$$L_{11} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\psi')^2 - g(a^2) - 2g'(a^2)a^2 - \omega - v\psi' -$$

$$3s_2 a^2 \psi' - \frac{3}{2} s_2 a^2 (v - 2\psi' + s_2 a^2) \tag{7.2.39}$$

式(7.2.7)和式(7.2.14)推出

$$\overline{L}_{11} a'(x) = 0 \tag{7.2.40}$$

$$L_{22} a(x) = 0 \tag{7.2.41}$$

由式(7.2.6),可以看到 $a'(x)$在 $x=0$ 上有简单零点,由 Sturm-Liouville定理推出 0 为 $\overline{L}_{11}$的第二个特征值,$\overline{L}_{11}$仅有一个负特征值 $-\lambda_{11}^2$,对应的特征函数为 χ_{11}。

$$\overline{L}_{11} \chi_{11} = -\lambda_{11}^2 \chi_{11} \tag{7.2.42}$$

再写 $\overline{L}_{11}$为

$$\overline{L}_{11} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + d_0 + M_1(x) \tag{7.2.43}$$

其中

$$M_1(x) = -g(a^2) - 2g'(a^2)a^2 - \frac{3}{2} s_2 a^2 v + \frac{21}{16} s_2^2 a^4 \tag{7.2.44}$$

注意到式(7.2.6),推出

$$M_1(x) \to 0, \ |x| \to \infty \tag{7.2.45}$$

则由式(7.2.11)、(7.2.43)、(7.2.45)和 Weyl 本质谱定理推出

$$\sigma_{ess}(\overline{L}_{11}) = [d_0, +\infty), d_0 > 0 \tag{7.2.46}$$

由此可得到算子 $\overline{L}_{11}$的谱性质:

命题 7.2.1 $\overline{L}_{11}$仅有一个负的简单特征值,它的核由 $a'(x)$所张成,它的其余谱是正的、有界的、远离于 0。

由命题 7.2.1,对任何实函数 $z_1 \in H^1(\mathbf{R})$满足

$$\langle z_1, a' \rangle = \langle z_1, \chi_{11} \rangle = 0 \tag{7.2.47}$$

则，存在正数 $\delta_1>0$ 使得

$$\langle \overline{L}_{11}z_1, z_1\rangle \geqslant \overline{\delta}_1 \|z_1\|_{L^2}^2 \tag{7.2.48}$$

其中 $\overline{\delta}_1$ 与 z_1 无关。由式(7.2.47)～(7.2.48)，易证

引理 7.2.1 对任何实函数 $z_1\in H^1(\mathbf{R})$，满足式(7.2.47)，则存在正数 $\delta_1>0$，使得

$$\langle \overline{L}_{11}z_1, z_1\rangle \geqslant \delta_1 \|z_1\|_{H^1}^2 \tag{7.2.49}$$

其中 δ_1 与 z_1 无关。

从式(7.2.6)和式(7.2.41)可知 0 为 L_{22} 的第一个特征值，对应的特征函数为 $a(x)$。

注意到

$$L_{22}=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+d_0+M_2(x) \tag{7.2.50}$$

由式(7.2.6)、(7.2.8)～(7.2.10)推出

$$M_2(x)\to 0, |x|\to\infty \tag{7.2.51}$$

因此

$$\sigma_{ess}(L_{22})=[d_0,+\infty),\ d_0>0 \tag{7.2.52}$$

我们有 L_{22} 的如下的谱性质。

命题 7.2.2 L_{22} 的核由 $a(x)$ 所张成，它的其余谱是正的和有界的，远离于 0。

从命题 7.2.2 和式(7.2.50)、(7.2.51)，可得

引理 7.2.2 对任何实函数 $z_2\in H^1(\mathbf{R})$，满足

$$(z_2, a)=0 \tag{7.2.53}$$

则存在正数 $\delta_2>0$ 使得

$$\langle L_{22}z_1, z_1\rangle \geqslant \delta_2 \|z_2\|_{H^1}^2 \tag{7.2.54}$$

其中 δ_2 与 z_1 无关。

为证定理 7.2.3，首先验证假设 7.2.2 成立。且

$$n(H_{\alpha,v})=1 \tag{7.2.55}$$

对任何 $\phi(x)\in X$，令

$$\phi(x) \doteq e^{i\psi(x)}(z_1(x) + iz_2(x)) \text{ 和 } z_2(x) = a(x)x_3(x) \tag{7.2.56}$$

其中 z_1,z_2,z_3 为实函数，$z_1,z_2 \in H^1(\mathbf{R})$。

令 $\overline{M}_2 = d_0 + M_2(x)$，注意到

$$\langle L_{22}z_2(x), z_2(x)\rangle = \langle -(z_2)'', z_2\rangle - \langle \overline{M}_2(x)z_2, z_2\rangle =$$
$$\langle L_{22}a, az_3^2\rangle - \langle (a^2z'_3)', z_3\rangle = \langle a^2z'_3, z'_3\rangle = \langle az'_3, az'_3\rangle \tag{7.2.57}$$

从式(7.2.38)和式(7.2.56)、(7.2.57)，有

$$\langle H_{\omega,v}\phi,\phi\rangle = \langle \overline{L}_{11}z_1, z_1\rangle + \langle az'_3, az'_3\rangle +$$
$$\langle \frac{9}{4}s_2^2a^4z_1, z_1\rangle - 3\langle s_2a^3z'_3, z_1\rangle = \langle \overline{L}_{11}z_1, z_1\rangle +$$
$$\int_{\mathbf{R}} (\frac{3}{2}s_2a^2z_1 - az'_3)^2 dx \tag{7.2.58}$$

选取

$$\chi_- = (\chi_{11} + i\chi_{12})e^{i\psi(x)} \tag{7.2.59}$$

$$\chi_{12} = a\chi_{13} = a(\frac{3}{2}s_2\int_{-\infty}^{x} a(s)\chi_{11}(s)ds + k_1) \tag{7.2.60}$$

其中 k_1 为任意实数。则由式(7.2.56)、(7.2.58)～(7.2.60)推出

$$\langle H_{\omega,v}\chi_-, \chi_-\rangle = \langle \overline{L}_{11}\chi_{11}, \chi_{11}\rangle = -\lambda_{11}^2 < 0 \tag{7.2.61}$$

固定 k_1，使得

$$\langle \chi_{12}, a\rangle = 0 \tag{7.2.62}$$

令

$$N = \{k\chi_1 \mid k \in \mathbf{R}\} \tag{7.2.63}$$

则由式(7.2.61)和式(7.2.63)推出式(7.2.34)。

令

$$\chi_1 = (a'(x) + i(k_2 + \frac{3}{4}s_2a^2(x))a(x))e^{i\psi(x)} \tag{7.2.64}$$

$$\chi_2 = ia(x)e^{i\psi(x)} \tag{7.2.65}$$

选取 k_2 使得

$$\langle (k_2 + \frac{3}{4}s_2a^2)a, a\rangle = 0 \quad (7.2.66)$$

则 Z 可写为

$$Z = \{k_1\chi_1 + k_2\chi_2 | k_1, k_2 \in \mathbf{R}\} \quad (7.2.67)$$

选取子空间 P 为

$$P = \{p \in X | p = (p_1 + \mathrm{i}p_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}, \langle p_1, \chi_{11}\rangle = 0,$$
$$\langle p_1, a'\rangle = 0, \langle p_2, a\rangle = 0\} \quad (7.2.68)$$

对此子空间 P，我们证明式(7.2.33)成立。事实上，对任何 $\phi(x) \in X$，$\phi(x)$ 可唯一表示为

$$\phi(x) = a_1\chi_- + b_1\chi_1 + b_2\chi_2 + p \quad (7.2.69)$$

其中 $p \in P$，a_1、b_1，b_2 为实数。

令 $\phi(x) = (z_1 + \mathrm{i}z_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$，选取

$$a_1 = \langle z_1, \chi_{11}\rangle,\ b_1 = \frac{\langle z_1, a'\rangle}{\| a' \|_{L^2}^2},\ b_2 = \frac{\langle z_2, a\rangle}{\| a \|_{L^2}^2} \quad (7.2.70)$$

则由式(7.2.40)、(7.2.42)和式(7.2.62)～(7.2.66)推出式(7.2.69)，$p \in P$。

对子空间 P，要证明式(7.2.35)成立。

引理 7.2.3 对任何由式(7.2.68)定义的 $p \in P$，存在常数 $\delta > 0$ 使得

$$\langle H_{\omega,v}p, p\rangle \geqslant \delta \| p \|_{H^1}^2 \quad (7.2.71)$$

其中 δ 与 p 无关。

证明 对任何 $p = (p_1 + \mathrm{i}p_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} \in P$，令 $p_2 = ap_3$，由式(7.2.58)，有

$$\langle H_{\omega,v}p, p\rangle = \langle \overline{L}_{11}p_1, p_1\rangle + \int_{\mathbf{R}} (\frac{3}{2}s_2a^2p_1 - ap'_3)^2\mathrm{d}x \quad (7.2.72)$$

由式(7.2.68)和引理 7.2.1、引理 7.2.2，可知

$$\langle \overline{L}_{11}p_1, p_1\rangle \geqslant \delta_1 \| p_1 \|_{H^1}^2 \quad (7.2.73)$$

$$\langle L_{22}p_2, p_2\rangle \geqslant \delta_2 \| p_2 \|_{H^1}^2 \quad (7.2.74)$$

(1) 如 $\| ap'_3 \|_{L_2} \geqslant C_0 \| p_1 \|_{L_2}, C_0 = 3s_2|a(0)|^2$ (7.2.75)

则

$$\int_{\mathbf{R}} (\frac{3}{2}s_2 a^2 p_1 - ap'_3)^2 \mathrm{d}x \geqslant \frac{\| ap'_3 \|_{L_2}^2}{2} - \int_{\mathbf{R}} (\frac{3}{2}s_2 a^2 p_1)^2 \mathrm{d}x \geqslant$$

$$\frac{\| ap'_3 \|_{L_2}^2}{4} = \frac{1}{4}\langle L_{22}p_2, p_2 \rangle \quad (7.2.76)$$

由式(7.2.72)~(7.2.75)推出

$$\langle H_{\omega,v}p, p \rangle \geqslant \delta \| p_1 \|_{H^1}^2 + \frac{\delta_2}{4} \| p_2 \|_{H^1}^2 \geqslant \delta \| p \|_{H^1}^2$$

(2) 如 $\| ap'_3 \|_{L_2} < C_0 \| p_1 \|_{L_2}, C_0 = 3s_2|a(0)|^2$ (7.2.77)

则由式(7.2.72)~(7.2.74)、(7.2.77)和式(7.2.57)推出

$$\langle H_{\omega,v}p, p \rangle \geqslant \delta_1 \| p_1 \|_{H^1}^2 \geqslant \frac{\delta_1}{2} \| p_1 \|_{H^1}^2 + \frac{\delta_1}{2C_0^2} \| ap'_3 \|_{L_2}^2 \geqslant$$

$$\frac{\delta_1}{2} \| p_1 \|_{H^1}^2 + \frac{\delta_1 \delta_2}{2C_0^2} \| p_2 \|_{H^1}^2$$

引理 7.2.3 证毕。

从式(7.2.63)和式(7.2.67)~(7.2.71)可知假设 7.2.2 成立和 $n(H_{\omega,v}) = 1$。现证对任何 c_3, c_5, s_2, ω, v 满足假设 7.2.1 条件，$p(d'') = 1$，于是完成了定理 7.2.3 的证明。现证

$$p(d'') = 1 \quad (7.2.78)$$

注意到

$$d(\omega, v) = E(\hat{a}) - \omega Q_1(\hat{a}) - vQ_2(\hat{a}),$$

$$d_\omega = -Q_1(\hat{a}), d_v = -Q_2(\hat{a}),$$

$$d_{\omega\omega} = -\langle Q'_1(\hat{a}), \frac{\partial \hat{a}}{\partial \omega} \rangle = -\langle \hat{a}, \frac{\partial \hat{a}}{\partial \omega} \rangle,$$

$$d_{v,\omega} = d_{\omega,v} = -\langle \hat{a}, \frac{\partial \hat{a}}{\partial v} \rangle,$$

$$d_{vv} = -\langle Q'_2(\hat{a}), \frac{\partial \hat{a}}{\partial v} \rangle = \langle \mathrm{i}a_x + s_2 a^2 \hat{a}, \frac{\partial \hat{a}}{\partial v} \rangle,$$

$$d''=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle & -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\langle a,a\rangle \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\langle a,a\rangle & \langle \mathrm{i}\hat{a}_x+s_2a^2\hat{a},\frac{\partial\hat{a}}{\partial v}\rangle \end{bmatrix},$$

$$\hat{a}(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(x)}a(x),$$

$$\langle \mathrm{i}\hat{a}_x+s_2a^2\hat{a},\frac{\partial\hat{a}}{\partial v}\rangle=$$

$$\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}(-\psi'a+\mathrm{i}a'+s_2a^3)\frac{\partial a}{\partial v}-\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial v}a)\mathrm{d}x=$$

$$\int_{\mathbf{R}}[(-\psi'a+s_2a^3)\frac{\partial a}{\partial v}+a'a\frac{\partial\psi}{\partial v}]\mathrm{d}x=$$

$$\int_{\mathbf{R}}[(-\frac{v}{2}+\frac{1}{4}s_2a^2)a\frac{\partial a}{\partial v}-\frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial v\partial x}]\mathrm{d}x=$$

$$-\frac{v}{4}\frac{\partial}{\partial v}\langle a,a\rangle-\frac{1}{4}\langle a,a\rangle-\frac{1}{8}s_2\frac{\partial}{\partial v}\int_{\mathbf{R}}a^4(x)\mathrm{d}x,$$

$$\det(d'')=\frac{v}{8}\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle\frac{\partial}{\partial v}\langle a,a\rangle+$$

$$\frac{1}{8}\langle a,a\rangle\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle+\frac{s_2}{16}\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle\frac{\partial}{\partial v}\int_{\mathbf{R}}a^4(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{4}(\frac{\partial}{\partial v}\langle a,a\rangle)^2 \tag{7.2.79}$$

和

$$a^2(x)=(d_3+d_5\cosh d_6x)^{-1},$$

$$d_3=-(d_2/2d_0),\ d_5^2=(d_2^2-4d_0d_4)/4d_0^2,\ d_6^2=4d_0$$

$$\frac{\partial d_0}{\partial\omega}=-1,\frac{\partial d_0}{\partial v}=-\frac{1}{2}v$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial v}=-\frac{1}{4}s_2,\frac{\partial d_2}{\partial\omega}=0,\ \frac{\partial d_4}{\partial\omega}=\frac{\partial d_4}{\partial v}=0$$

情形(A) $d_4<0$。此时,有

$$\langle a,a\rangle=\int_{\mathbf{R}}(d_3+d_5\cosh d_6x)^{-1}\mathrm{d}x=$$

$$\frac{2}{d_6}\frac{1}{\sqrt{d_5^2-d_3^2}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{d_3}{\sqrt{d_5^2-d_3^2}}\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{-d_4}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{-d_2}{2\sqrt{-d_0d_4}}\right)>0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle=\frac{d_2}{(d_2^2-4d_0d_4)\sqrt{d_0}}<0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\langle a,a\rangle=\frac{-\sqrt{d_0}}{2(d_2^2-4d_0d_4)}\left(s_2-\frac{vd_2}{d_0}\right), \tag{7.2.80}$$

$$\int_{\mathbf{R}}a^4(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}}(d_3+d_5\cosh d_6x)^{-2}\mathrm{d}x=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4\mathrm{e}^{2d_6x}}{[2d_3\mathrm{e}^{d_6x}+d_5\mathrm{e}^{2d_6x}+d_5]^2}\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{4y}{d_6(2d_3y+d_5y^2+d_5]^2}\mathrm{d}y=$$

$$\frac{-\sqrt{d_0}}{d_4}-\frac{d_2}{2d_4\sqrt{-d_4}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{-d_2}{2\sqrt{-d_0d_4}}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\int_{\mathbf{R}}a^4(x)\mathrm{d}x=\frac{v}{4d_4\sqrt{d_0}}-$$

$$\frac{s_2}{8(-d_4)^{3/2}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{-d_2}{2\sqrt{-d_0d_4}}\right)+$$

$$\frac{\sqrt{d_0}d_2}{4(d_2^2-4d_0d_4)d_4}\left(s_2-\frac{vd_2}{d_0}\right)$$

由式(7.2.79),有

$$\det(d'')=\frac{1}{8}\langle a,a\rangle\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle+\frac{1}{8}\frac{\partial}{\partial v}\langle a,a\rangle\left(v\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle-\right.$$

$$\left.2\frac{\partial}{\partial v}\langle a,a\rangle\right)+\frac{s_2}{16}\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle\frac{\partial}{\partial v}\int_{\mathbf{R}}a^4(x)\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{8}\langle a,a\rangle\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle+\frac{1}{8}\frac{\partial}{\partial v}\langle a,a\rangle\left(s_2\frac{d_0}{d_2}\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle\right)+$$

$$\frac{s_2}{16}\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle\frac{\partial}{\partial\omega}\int_{\mathbf{R}}a^4(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\langle a,a\rangle\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle+$$

$$\left[\frac{s_2^2}{64(d_2^2-4d_0d_4)d_4}\left[1+\frac{d_2}{2\sqrt{-d_0d_4}}\left(\frac{\pi}{2}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\arctan\frac{-d_2}{2\sqrt{-d_0d_4}}\right)\right]\right]=I_1+I_2$$

式(7.2.11)和式(7.2.80)推出 $I_1<0$。

令 $y=-d_2/(2\sqrt{d_0d_4})$，则 $y>0$ 且

$$I_2=\frac{s_2^2}{64(d_2^2-4d_0d_4)d_4}Y_1(y),$$

$$Y_1(y)=1-y(\frac{\pi}{2}-\arctan y)$$

注意到

$$Y_1(0)=1,$$

$$Y_1(+\infty)=\lim_{y\to+\infty}[1-y(\frac{\pi}{2}-\arctan y)]=1-$$

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan y}{1/y}=1-\lim_{y\to+\infty}\frac{-1/(1+y^2)}{-1/y^2}=0$$

(7.2.81)

$$Y_1'(y)=-\frac{\pi}{2}+\arctan y+\frac{y}{1+y^2},$$

$$Y_1'(0)=-\frac{\pi}{2},Y_1'(+\infty)=0 \qquad (7.2.82)$$

$$Y_1''(y)=\frac{2}{1+y^2}-\frac{2y^2}{(1+y^2)^2}=\frac{2}{(1+y^2)^2}>0,\forall y\in\mathbf{R}$$

(7.2.83)

由式(7.2.82)和式(7.2.83)推出 $Y_1'(y)<0,\forall y\in\mathbf{R}$。由式(7.2.81)有

$$Y_1(y)>0,\forall y\in\mathbf{R}$$

于是 $I_2<0(d_4<0)$。

最后我们有 $\det(d'')<0$，因此 d''具有一个负特征值和正特征值。因此在情况(A)下，式(7.2.78)成立。

情况(B) $d_4=0$。此时，有

$$a^2(x)=-\frac{2d_0}{d_2}(1+\cosh d_6x)^{-1},$$

$$\langle a,a\rangle=-\frac{2d_0}{d_2}\int_{\mathbf{R}}(1+\cosh d_5x)^{-1}\mathrm{d}x=\frac{-2\sqrt{d_0}}{d_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle=\frac{1}{d_2\sqrt{d_0}}<0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\langle a,a\rangle=\frac{-\sqrt{d_0}}{2d_2^2}\left(s_2-\frac{vd_2}{d_0}\right),$$

$$\int_{\mathbf{R}}a^4(x)\mathrm{d}x=\frac{4d_0^2}{d_2^2}\int_{\mathbf{R}}(1+\cosh d_6x)^{-2}\mathrm{d}x=$$

$$\frac{16d_0^2}{\mathrm{d}_2^2d_6}\int_0^{+\infty}\frac{y}{(1+y)^4}\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\frac{d_0\sqrt{d_0}}{d_2^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\int_{\mathbf{R}}a^4(x)\mathrm{d}x=\frac{d_0^{3/2}}{d_2^3}\left(s_2-\frac{vd_2}{d_0}\right)-\frac{1}{3}s_2\frac{d_0^{3/2}}{d_2^3},$$

$$\det(d'')=\frac{1}{8}\langle a,a\rangle\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle+\frac{1}{8}\frac{\partial}{\partial v}\langle a,a\rangle$$

$$\left(v\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle-2\frac{\partial}{\partial v}\langle a,a\rangle\right)+\frac{s_2}{16}\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle\frac{\partial}{\partial v}\int_{\mathbf{R}}a^4(x)\mathrm{d}x=$$

$$-\frac{1}{4d_2^2}-\frac{s_2d_0}{16d_2^4}\left(s_2-\frac{vd_2}{d_0}\right)+\frac{s_2d_0}{16d_2^4}\left(s_2-\frac{vd_2}{d_0}\right)-\frac{s_2^2}{48}\frac{d_0}{d_2^4}=$$

$$-\frac{1}{4d_2^2}-\frac{s_2^2d_0}{48d_2^4}<0,$$

因此 d''仅有一个负特征值和一个正特征值，由此在情况(B)下，式(7.2.78)成立。

情况(C) $d_4>0, d_2^2-4d_0d_4>0$。此时，我们有

$$d_5^2 - d_3^2 = -d_4/d_0 < 0,\ d_3 > d_5,\ d_2 < 0,\ d_0 > 0,$$

$$\langle a,a\rangle = \frac{1}{2\sqrt{d_4}}\ln\left|\frac{-d_2/2d_0 + \sqrt{d_4/d_0}}{-d_2/2d_0 - \sqrt{d_4/d_0}}\right|,$$

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle = \frac{d_2}{\sqrt{d_0}}\frac{1}{(d_2^2 - 4d_0d_4)} < 0 \qquad (8.2.84)$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\langle a,a\rangle = \frac{-\sqrt{d_0}}{2(d_2^2 - 4d_0d_4)}\left(s_2 - \frac{vd_2}{d_0}\right),$$

$$\int_{\mathbf{R}} a^4(x)\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{d_0}}{d_4} - \frac{d_2}{4d_4\sqrt{d_4}}\ln\left|\frac{2\sqrt{d_4d_0} - d_2}{-2\sqrt{d_4d_0} - d_2}\right|,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\int_{\mathbf{R}} a^4(x)\mathrm{d}x = \frac{v}{4d_4\sqrt{d_0}} + \frac{s_2}{16(d_4)^{3/2}}\ln$$

$$\left|\frac{2\sqrt{d_4d_0} - d_2}{-2\sqrt{d_4d_0} - d_2}\right| + \frac{\sqrt{d_0}d_2}{4(d_2^2 - 4d_0d_4)d_4}\left(s_2 - \frac{vd_2}{d_0}\right)$$

由式(7.2.79),有

$$\det(d'') = \frac{1}{8}\langle a,a\rangle\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle +$$

$$\frac{1}{8}\frac{\partial}{\partial v}\langle a,a\rangle\left(v\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle - 2\frac{\partial}{\partial v}\langle a,a\rangle\right) +$$

$$\frac{s_2}{16}\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle\frac{\partial}{\partial v}\int_{\mathbf{R}} a^4(x)\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{8}\langle a,a\rangle\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle +$$

$$\frac{s_2}{16}\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle\left(2\frac{d_0}{d_2}\frac{\partial}{\partial v}\langle a,a\rangle + \frac{\partial}{\partial v}\int_{\mathbf{R}} a^4(x)\mathrm{d}x\right) =$$

$$\frac{1}{8}\langle a,a\rangle\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle + \frac{s_2}{16}\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle\cdot$$

$$\left[-\frac{d_0\sqrt{d_0}}{(d_2^2 - 4d_0d_4)d_2}\left(s_2 - \frac{vd_2}{d_0}\right) + \frac{d_2\sqrt{d_0}}{4(d_2^2 - 4d_0d_4)d_4}\left(s_2 - \frac{vd_2}{d_0}\right)\right.$$

$$+\frac{v}{4d_4\sqrt{d_0}}+\frac{s_2}{16(d_4)^{3/2}}\ln\left(\frac{2\sqrt{d_4d_0}-d_2}{-2\sqrt{d_4d_0}-d_2}\right)\Bigg]=$$

$$\frac{1}{8}\langle a,a\rangle\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle+\frac{s_2d_2}{16\sqrt{d_0}(d_2^2-4d_0d_4)}\cdot$$

$$\left[\frac{s_2\sqrt{d_0}}{4d_2d_4}+\frac{s_2}{16(d_4)^{3/2}}\ln\left(\frac{2\sqrt{d_4d_0}-d_2}{-2\sqrt{d_4d_0}-d_2}\right)\right]=$$

$$\frac{1}{8}\langle a,a\rangle\frac{\partial}{\partial\omega}\langle a,a\rangle+\frac{s_2^2}{64d_4(d_2^2-4d_0d_4)}\cdot$$

$$\left[1+\frac{d_2}{4\sqrt{d_0d_4}}\ln\left(\frac{2\sqrt{d_4d_0}-d_2}{-2\sqrt{d_4d_0}-d_2}\right)\right]=I_1+I_2$$

式(7.2.84)推出 $I_1<0$。

令 $y=-d_2/(2\sqrt{d_0d_4})$，则在情况(C)下，$y>1$，且

$$I_2=\frac{s_2^2}{64d_4(d_2^2-4d_0d_4)}Y_2(y)$$

其中

$$Y_2(y)=1-\frac{y}{2}\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$$

注意到

$$Y_2(1)=-\infty,$$

$$\lim_{y\to+\infty}Y_2(y)=1+\lim_{y\to+\infty}\frac{1/(1+y)-1/(y-1)}{2/y^2}=$$

$$1+\lim_{y\to+\infty}\frac{-y^2}{y^2-1}=0 \tag{7.2.85}$$

和

$$Y_2'(y)=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)+\frac{y}{y^2-1} \tag{7.2.86}$$

$$Y_2'(+\infty)=0,$$

$$Y_2''(y) = -\frac{2}{(y^2-1)^2} < 0, \forall 1 < y < +\infty \quad (7.2.87)$$

由式(7.2.86)和式(7.2.87)推出

$$Y_2'(y) > 0, \forall 1 < y < +\infty \quad (7.2.88)$$

因此由式(7.2.85)和式(7.2.88)有

$$Y_2(y) < 0, \forall 1 < y < +\infty$$

由此推出 $I_2<0$(因 $d_4>0, d_2^2-4d_0d_4>0$)。

最后在情况(C)下,有 $\det(d'')<0$,推出式(7.2.78)成立。于是定理 7.2.3 得到了证明。

7.3 长短波方程

考虑在等离子体等许多物理力学问题中提出的长短波相互作用方程

$$i\varepsilon_t + \varepsilon_{xx} = n\varepsilon + \alpha|\varepsilon|^2\varepsilon \quad (7.3.1)$$

$$n_t = (|\varepsilon|^2)_x \quad (7.3.2)$$

其中 $\alpha\in\mathbf{R}$,$n(x,t)$为实值函数,表示长波的振幅;$\varepsilon(x,t)$为复值函数,表示短波的包络。首先,考虑如下的孤立波解

$$\begin{cases}\varepsilon(x,t) = e^{i\omega t}e^{iq(x-ct)}\phi_{\omega,c}(x-ct),\\ n(x,t) = n_{\omega,c}(x-ct)\end{cases} \quad (7.3.3)$$

其中 ω,q,c 均为实常数,将式(7.3.3)代入方程(7.3.1)、(7.3.2)得

$$\varphi''_{\omega,c} + i(2q-c)\varphi'_{\omega,c} + (\omega+qc-q^2-n_{\omega,c})\varphi_{\omega,c} - \alpha\varphi^3_{\omega,c} = 0 \quad (7.3.4)$$

$$-cn'_{\omega,c} = 2\varphi_{\omega,c}\varphi'_{\omega,c} \quad (7.3.5)$$

设当$|x|\to\infty$时,$n_{\omega,c},\varphi_{\omega,c}\to 0$,由式(7.3.5)得

$$n_{\omega,c} = -\frac{1}{c}\varphi^2_{\omega,c} \quad (7.3.6)$$

式(7.3.4)推出

$$2q - c \quad (7.3.7)$$

$$\varphi''_{\omega,c} + (\omega + cq - q^2)\varphi_{\omega,c} + (\frac{1}{c} - \alpha)\varphi^3_{\omega,c} = 0 \quad (7.3.8)$$

令 $\varphi_{\omega,c} = c_1 \operatorname{sech} c_2 x$，其中 c_1, c_2 为待定常数，代入式(7.3.8)得

$$\omega + cq - q^2 = -c_2^2,\ 2c_2^2 = (\frac{1}{c} - \alpha)c_1^2 \quad (7.3.9)$$

由式(7.3.7)和式(7.3.9)得

$$q = \frac{c}{2}, c_2 = \sqrt{-\omega - \frac{c^2}{4}},\ c_1 = \sqrt{\frac{-(4\omega + c^2)c}{2(1 - \alpha c)}} \quad (7.3.10)$$

因此

$$\begin{cases} \varphi_{\omega,c}(x) = \sqrt{\dfrac{-(4\omega + c^2)c}{2(1 - \alpha c)}} \operatorname{sech}(\sqrt{-\omega - \dfrac{c^2}{4}}x) \\ n_{\omega,c} = \dfrac{4\omega + c^2}{2(1 - \alpha c)} \operatorname{sech}^2(\sqrt{-\omega - \dfrac{c^2}{4}}x) \\ q = \dfrac{c}{2} \end{cases} \quad (7.3.11)$$

于是有

定理 7.3.1 对任何实数 ω, c, α，满足

$$c_0 = 4\omega + c^2 < 0,\ c > 0,\ 1 - \alpha c > 0 \quad (7.3.12)$$

则存在式(7.3.1)、(7.3.2)的孤立波解，具有式(7.3.3)形式，其中 $\varphi_{\omega,c}(x), n_{\omega,c}(x)$ 具有式(7.3.11)形式。

为了证明上述孤立波的稳定性，将方程(7.3.1)写为实部和虚部形式，$\varepsilon = u + \mathrm{i}v$，可得

$$\begin{cases} u_t = -v_{xx} + nv + \alpha(u^2 + v^2)v, \\ v_t = u_{xx} - nu - \alpha(u^2 + v^2)u,\ x \in \mathbf{R} \\ n_t = (u^2 + v^2)_x \end{cases} \quad (7.3.13)$$

令 $\mathbf{u} = (u, v, n)$，取 $X = H^1(\mathbf{R}) \times H^1(\mathbf{R}) \times L^2(\mathbf{R})$，具内积

$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) = \int_{\mathbf{R}} (f_1 g_1 + f_{1x} g_{1x} + f_2 g_2 + f_{2x} g_{2x} + f_3 g_3) \mathrm{d}x,$$

$$\boldsymbol{f},\boldsymbol{g} \in X \tag{7.3.14}$$

X 的对偶空间为 $X^* = H^{-1}(\mathbf{R}) \times H^{-1}(\mathbf{R}) \times L^2(\mathbf{R})$，存在自然同构 $I: X \to X^*$，定义为

$$\langle I\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) \tag{7.3.15}$$

其中〈·，·〉表示 X 和 X^* 之间的配对。

$$\langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle = \int_{\mathbf{R}} \left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_i\right) \mathrm{d}x \tag{7.3.16}$$

由式(7.3.14)～(7.3.16)，显然有

$$I = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

设 T_1, T_2 为在 X 上酉算子的单参数群，定义为

$$T_1(s_1)\mathbf{u}(\cdot) = \mathbf{u}(\cdot - s_1), \mathbf{u}(\cdot) \in X, s_1 \in \mathbf{R} \tag{7.3.17}$$

$$T_2(s_2)\mathbf{u}(\cdot) = \begin{pmatrix} \cos s_2 & \sin s_2 & 0 \\ -\sin s_2 & \cos s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\cdot) \\ v(\cdot) \\ n(\cdot) \end{pmatrix} \tag{7.3.18}$$

$$\mathbf{u}(\cdot) \in X, s_2 \in \mathbf{R}$$

显然有

$$T'_1(0) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & & \\ & -\frac{\partial}{\partial x} & \\ & & -\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, T'_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从定理 7.3.1 可知，存在式(7.3.13)的孤立波解 $\Phi_{\omega,c}(x)$，其中

$\Phi_{\omega,c}(x)$定义为

$$\Phi_{\omega,c}(x) = (\varphi_{\omega,c}(x)\cos(\frac{c}{2}x),\varphi_{\omega,c}(x)\sin(\frac{c}{2}x),n_{\omega,c}(x))$$

以下考虑孤立波 $T_1(ct)T_2(\omega t)\Phi_{\omega,c}(x)$的轨道稳定性。

令

$$E(\mathbf{u}) = \int_{\mathbf{R}}[\frac{1}{2}(u_x^2 + v_x^2) + \frac{1}{2}n(u^2 + v^2) + \frac{\alpha}{4}(u^2 + v^2)^2]\mathrm{d}x \tag{7.3.19}$$

容易验证 $E(\mathbf{u})$在 T_1 和 T_2 是不变的，且在式(7.3.16)的流下也是不变的，即有

$$E(T_1(s_1)T_2(s_2)\mathbf{u}) = E(\mathbf{u}),\forall\ s_1,s_2 \in \mathbf{R} \tag{7.3.20}$$

对$\forall t\in\mathbf{R}$，$\mathbf{u}(t)$为式(7.3.13)的流

$$E(\mathbf{u}(t)) = E(\mathbf{u}(0)) \tag{7.3.21}$$

方程(7.3.13)能写成如下 Hamilton 方程组

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = JE'(\mathbf{u}) \tag{7.3.22}$$

其中反对称算子 J 为

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \tag{7.3.23}$$

$E'(\mathbf{u})$为 $E(\mathbf{u})$的 Fréchet 导数，令

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

可得 $T'_1(0)=JB_1$。令

$$B_2=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{bmatrix}$$

则 $T'_2(0)=JB_2$，令

$$Q_1(\mathbf{u})=\frac{1}{2}\langle B_1\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle=-\frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}}n^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}(v_xu-vu_x)\mathrm{d}x \tag{7.3.24}$$

$$Q_2(\mathbf{u})=\frac{1}{2}\langle B_2\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}(u^2+v^2)\mathrm{d}x \tag{7.3.25}$$

由式(7.3.19)～(7.3.25)，能证

$$Q_1(T_1(s_1)T_2(s_2)\mathbf{u})=Q_1(\mathbf{u}),$$

$$Q_2(T_1(s_1)T_2(s_2)\mathbf{u})=Q_2(\mathbf{u}),\forall s_1,s_2\in\mathbf{R} \tag{7.3.26}$$

且对任何 $t\in\mathbf{R}$，$\mathbf{u}(t)$ 为式(7.3.13)的流，有

$$Q_1(\mathbf{u}(t))=Q_1(\mathbf{u}(0)),Q_2(\mathbf{u}(t))=Q_2(\mathbf{u}(0)) \tag{7.3.27}$$

进一步

$$E'(\Phi_{\omega,c})-cQ'_1(\Phi_{\omega,c})-\omega Q'_2(\Phi_{\omega,c})=0 \tag{7.3.28}$$

其中 E',Q'_1,Q'_2 分别为 E,Q_1,Q_2 的 Fréchet 导数，其中

$$E'(\mathbf{u})=\begin{bmatrix}-u_{xx}+nu+\alpha(u^2+v^2)u\\ -v_{xx}+nv+\alpha(u^2+v^2)v\\ \frac{1}{2}(u^2+v^2)\end{bmatrix},$$

$$Q'_1(\mathbf{u})=\begin{bmatrix}v_x\\ -u_x\\ -\frac{1}{2}n\end{bmatrix},\ Q'_2(\mathbf{u})=\begin{bmatrix}u\\ v\\ 0\end{bmatrix}$$

定义线性化算子 $H_{\omega,c}:X\to X^*$

$$H_{\omega,c}=E''(\Phi_{\omega,c})-cQ''_1(\Phi_{\omega,c})-\omega''_2(\Phi_{\omega,c}) \tag{7.3.29}$$

因 ω,c 为固定的，以 φ 代替 $\varphi_{\omega,c}$，$\mathbf{u}$ 代替 $\Phi_{\omega,c}$，我们有

$$H_{\omega,c} =$$

$$\begin{pmatrix} L + \alpha\varphi^2\cos\left(\frac{c}{2}x\right) & \alpha\varphi^2\sin\left(\frac{c}{2}x\right) - c\frac{\partial}{\partial x} & \varphi\cos\left(\frac{c}{2}x\right) \\ \alpha\varphi^2\sin\left(\frac{c}{2}x\right) + c\frac{\partial}{\partial x} & L - \alpha\varphi^2\cos\left(\frac{c}{2}x\right) & \varphi\sin\left(\frac{c}{2}x\right) \\ \varphi\cos\left(\frac{c}{2}x\right) & \varphi\sin\left(\frac{c}{2}x\right) & \frac{c}{2} \end{pmatrix} \tag{7.3.30}$$

其中 $L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \omega + n + 2\alpha\varphi^2$。

易知 $H_{\omega,c}$ 为自共轭算子，$H_{\omega,c}^* = H_{\omega,c}$，它意味着 $I^{-1}H_{\omega,c}$ 为 X 上的有界自共轭算子。$H_{\omega,c}$ 的“谱”由实数 λ 组成，$H_{\omega,c} - \lambda I$ 为不可逆。要求 $\lambda = 0$ 属于 $H_{\omega,c}$ 的谱。由式(7.3.20)、(7.3.26)、(7.3.28)和式(7.3.29)，容易证明

$$H_{\omega,c}T'_1(0)\Phi_{\omega,c}(x) = 0 \tag{7.3.31}$$

$$H_{\omega,c}T'_2(0)\Phi_{\omega,c}(x) = 0 \tag{7.3.32}$$

令

$$Z = \{k_1T'_1(0)\Phi_{\omega,c}(x) + k_2T'_2(0)\Phi_{\omega,c}(x) \mid k_1, k_2 \in \mathbf{R}\} \tag{7.3.33}$$

由式(7.3.31)和式(7.3.32)可知，Z 被包含在 $H_{\omega,c}$ 的核空间中。

假设 7.3.1 $H_{\omega,c}$ 的谱分解：空间 X 可分解为直接和

$$X = N + Z + P \tag{7.3.34}$$

其中 Z 为 $H_{\omega,c}$ 的核，N 为有限维子空间，使得

$$\langle H_{\omega,c}\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle < 0,\ 0 \neq \mathbf{u} \in N \tag{7.3.35}$$

P 为闭子空间，使得

$$\langle H_{\omega,c}\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle \geqslant \delta \|\mathbf{u}\|_X^2,\ \mathbf{u} \in P \tag{7.3.36}$$

其中常数 $\delta > 0$ 与 $\mathbf{u}$ 无关。

定义 $d(\omega, c): \mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为

$$d(\omega,c) = E(\Phi_{\omega,c}) - cQ_1(\Phi_{\omega,c}) - \omega Q_2(\Phi_{\omega,c}) \tag{7.3.37}$$

$d''(\omega,c)$ 为 d 的 Hessian 矩阵，由式(7.3.24)可知 J 不是满射的，

此时必须利用修改了的稳定性理论，我们有

定理 7.3.2 设存在式(7.3.13)的孤立波解 $T_1(vt)T_2(\omega t)\Phi_{\omega,c}(x)$，且设假设 7.3.1 成立。$n(H_{\omega,c})$表示 $H_{\omega,c}$的负特征值数目。设 $d(\omega,c)$在(ω,c)处为非退化的，$p(d'')$表示 d 的 Hessian 矩阵在(ω,c)处的正特征值数目。更进一步，如果 $p(d'')=n(H_{\omega,c})$，则孤立波$T_1(vt)T_2(\omega t)\Phi_{\omega,c}(x)$是轨道稳定的。

定理 7.3.3 在定理 7.3.1 条件下，式(7.3.13)的孤立波 $T_1(ct)T_2(\omega t)\Phi_{\omega,c}(x)$是轨道稳定的，其中

$$\omega < -\frac{\alpha(10-9\alpha v)v^3}{4(3-2\alpha v)} \tag{7.3.38}$$

为了证明定理 7.3.3，充分证明在条件(7.3.12)和式(7.3.38)下，假设 7.3.1 成立，且 $n(H_{\omega,c})=p(d'')$。我们先证假设 7.3.1 成立和 $n(H_{\omega,c})=1$。

对任何 $\Psi\in X$，具有如下形式：

$$\Psi=\begin{pmatrix}\cos(\frac{c}{2}x) & -\sin(\frac{c}{2}x) & 0\\ \sin(\frac{c}{2}x) & -\cos(\frac{c}{2}x) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)\in X \tag{7.3.39}$$

$\langle\Psi,\Psi\rangle=\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle$，由式(7.3.30)得

$$\begin{aligned}\langle H_{\omega,c}(\Phi_{\omega,c})\Psi,\Psi\rangle &= \langle L_1y_1,y_1\rangle+\langle L_2y_2,y_2\rangle+\\ &\frac{c}{2}\int_{\mathbf{R}}y_3^2\mathrm{d}x+2\int_{\mathbf{R}}\varphi^2y_1y_3\,\mathrm{d}x=\langle L_1y_1,y_1\rangle+\\ &\langle L_2y_2,y_2\rangle+\frac{c}{2}\int_{\mathbf{R}}(y_3+\frac{2}{c}\varphi y_1)^2\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{7.3.40}$$

其中

$$L_1=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{c^2}{4}-\omega-3(\frac{1}{c}-\alpha)\varphi^2 \tag{7.3.41}$$

$$L_2=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{v^2}{4}-\omega-(\frac{1}{c}-\alpha)\varphi^2 \tag{7.3.42}$$

注意到

$$L_1 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{c^2}{4} - \omega + M_1(x) \tag{7.3.43}$$

$$L_2 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{c^2}{4} - \omega + M_2(x) \tag{7.3.44}$$

其中

$$M_1(x) \to 0, |x| \to +\infty \tag{7.3.45}$$

$$M_2(x) \to 0, |x| \to +\infty \tag{7.3.46}$$

因此由 Weyl 定理，有

$$\sigma_{ess}(L_1) = [-\frac{c^2}{4} - \omega, +\infty) \tag{7.3.47}$$

$$\sigma_{ess}(L_2) = [-\frac{c^2}{4} - \omega, +\infty) \tag{7.3.48}$$

令 $\sigma_0 = -\frac{c^2}{4} - \omega$，由式(7.3.12)$\sigma_0 > 0$，从式(7.3.3)、(7.3.7)、(7.3.8)、(7.3.28)可知

$$L_1\varphi_x = 0 \tag{7.3.49}$$

$$L_2\varphi = 0 \tag{7.3.50}$$

由式(7.3.11)和式(7.3.49)可知 φ_x 在 $x=0$ 处具有简单零点，由 Sturn-Liouville 定理推出，0 为 L_1 的第二特征值，L_1 仅有一个负特征值 $-\sigma_-^2$，对应的特征函数为 χ_1：

$$L_1\chi_1 = -\sigma_-^2\chi_1, \langle\chi_1, \chi_1\rangle = 1 \tag{7.3.51}$$

由式(7.3.11)和式(7.3.50)推出 0 为 L_2 的第一个简单特征值。

基于式(7.3.44)～(7.3.50)，可得如下引理：

引理 7.3.1 对任何实函数 $y_1 \in H^{-1}(\mathbf{R})$，满足

$$\langle y_1, \chi_1\rangle = \langle y_1, \varphi_x\rangle = 0 \tag{7.3.52}$$

则存在正常数 $\delta_1 > 0$ 使得

$$\langle L_1 y_1, y_1\rangle \geqslant \delta_1 \| y_1 \|_{H^1}^2 \tag{7.3.53}$$

引理 7.3.2 对任何函数 $y_2 \in H^1(\mathbf{R})$满足

$$\langle y_2, \varphi\rangle = 0 \tag{7.3.54}$$

则存在正常数 $\delta_2>0$,使得

$$\langle L_2 y_2, y_2\rangle \geqslant \delta_2 \| y_2 \|_{H^1}^2 \tag{7.3.55}$$

对任何 $\Psi\in X$,由式(7.3.39),令

$$\Psi = (y_1, y_2, y_3) \tag{7.3.56}$$

选取

$$y_1^- = \chi_1,\ y_2^- = 0,\ z_2^- = -\frac{2}{c}\varphi\chi_1 \tag{7.3.57}$$

$$\Psi^- = (y_1^-, y_2^-, z_2^-)$$

则

$$\langle H_{\omega,c}\Psi^-, \Psi^-\rangle = -\sigma^2 \langle \chi_1, \chi_1\rangle < 0 \tag{7.3.58}$$

注意到 $H_{\omega,c}$的核空间由两个向量所成:

$$\Psi_{01} = (\varphi_x, 0, -\frac{2}{c}\varphi\varphi_x) \tag{7.3.59}$$

$$\Psi_{02} = (0, \varphi, 0) \tag{7.3.60}$$

令

$$Z = \{k_1\Psi_{01} + k_2\Psi_{02} \mid k_1, k_2 \in \mathbf{R}\} \tag{7.3.61}$$

$$\begin{aligned} P = \{p \in X \mid p = (p_1, p_2, p_3),\\ \langle p_1, \chi_1\rangle = \langle p_1, \varphi_x\rangle = \langle p_2, \varphi\rangle = 0\} \end{aligned} \tag{7.3.62}$$

$$N = \{k\Psi^- \mid k \in \mathbf{R}\} \tag{7.3.63}$$

显然式(7.3.35)成立。对任何 $\mathbf{u}\in X$,$\mathbf{u}=(y_1, y_2, y_3)$,选取 $a=\langle y_1, \chi_1\rangle$,$b_1=(\langle\varphi_x, y_1\rangle)/(\langle\varphi_x,\varphi_x\rangle)$,$b_2=(\langle\varphi, y_2\rangle)/(\langle\varphi,\varphi\rangle)$,则 u 能唯一表示为

$$\boldsymbol{u} = a\Psi^- + b\Psi_{01} + b_2\Psi_{02} + \boldsymbol{p} \tag{7.3.64}$$

其中 $p\in P$,于是推出式(7.3.34),于是对子空间 P,要证明式(7.3.36)成立。

引理 7.3.3 对任何 $\boldsymbol{p}\in P$,由式(7.3.62)定义,则存在常数 $\delta>0$,使得

$$\langle H_{\omega,c}\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle \geqslant \delta \|\boldsymbol{p}\|_X \tag{7.3.65}$$

其中 δ 与 Ψ 无关。

证明 对任何 $\boldsymbol{p}\in P$,由式(7.3.62)和引理 7.3.1、7.3.2,有

$$\langle H_{\omega,c}\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle \geqslant \delta_1 \|p_1\|_{H^1}^2 + \delta_2 \|p_2\|_{H^1}^2 + \frac{c}{2}\int_{\mathbf{R}}(p_3 + \frac{2}{c}\varphi p_1)^2\mathrm{d}x \tag{7.3.66}$$

$$(1)\text{如 } \|p_3\|_{L^2}^2 \geqslant \frac{8M}{c^2}\|p_1\|_{L^2}^2,\ M = |\varphi|_\infty^2 \tag{7.3.67}$$

则

$$\frac{c}{2}\int_{\mathbf{R}}(p_3 + \frac{2}{c}\varphi p_1)^2\mathrm{d}x \geqslant \frac{c}{2}\|p_3\|_{L^2}^2 - \frac{2M}{c}\|p_1\|_{L^2}^2 \geqslant \frac{c}{4}\|p_3\|_{L^2}^2 \tag{7.3.68}$$

$$(2)\text{如 } \|p_3\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{8M}{c^2}\|p_1\|_{L^2}^2, \tag{7.3.69}$$

则

$$\delta_1 \|p_1\|_{H^1}^2 \geqslant \frac{\delta_1}{2}\|p_1\|_{H^1}^2 + \frac{\delta_1 c^2}{16M}\|p_3\|_{L^2}^2 \tag{7.3.70}$$

因此对任何 $p\in P$,从式(7.3.66)~(7.3.70)得

$$\langle H_{\omega,c}\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle \geqslant \delta_3 \|p_3\|_{L^2}^2 + \frac{\delta_1}{2}\|p_1\|_{H^1}^2 + \delta_1\|p_2\|_{H^1}^2 \tag{7.3.71}$$

其中 $\delta_3 = \min\{\frac{c}{4},\frac{\delta_1 c^2}{16M}\} > 0$。最后,由式(7.3.71)得

$$\langle H_{\omega,c}\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle \geqslant \delta \|\boldsymbol{p}\|_X^2 \tag{7.3.72}$$

其中 $\delta > 0$ 与 $\boldsymbol{p}$ 无关。

因此,在条件(7.3.12)下,假设 7.3.1 成立,且 $n(H_{\omega,c}) = 1$。

以下在定理 7.3.3 下验证 $p(d'') = 1$,注意到式(7.3.28)和式(7.3.37),推出

$$d_\omega(\omega,c) = -Q_2(\Phi_{\omega,c}),$$

$$d_c(\omega,c) = -Q_1(\Phi_{\omega,c}),$$

$$-Q_2(\Phi_{\omega,c}) = -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}(u^2 + v^2)\mathrm{d}x =$$

$$\frac{-c(\omega+\frac{c^2}{4})}{1-\alpha c}\int_{\mathbf{R}}\operatorname{sech}^2(\frac{\sqrt{-4\omega-c^2}}{2}x)\mathrm{d}x=$$

$$-\frac{c}{1-\alpha c}\sqrt{-4\omega-c^2}<0,$$

$$-Q_1(\Phi_{\omega,c})=\frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}}(n^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}(v_x u-u_x v)\mathrm{d}x=$$

$$\frac{4(-\omega-\frac{c^2}{4})^{3/2}}{3(1-\alpha c)^2}-\frac{c^2}{2(1-\alpha c)}\sqrt{-4\omega-c^2},$$

$$d_{\omega\omega}(\omega,c)=\frac{2c}{(1-\alpha c)\sqrt{-4\omega-c^2}}>0,$$

$$d_{c\omega}(\omega,c)=d_{\omega,c}(\omega,c)=-\frac{\sqrt{-4\omega-c^2}}{(1-\alpha c)^2}+\frac{c^2}{(1-\alpha c)\sqrt{-4\omega-c^2}}$$

$$d_{cc}(\omega,c)=\frac{\alpha(-4\omega-c^2)^{\frac{3}{2}}}{3(1-\alpha c)^3}-\frac{3c}{2(1-\alpha c)}\sqrt{-4\omega-c^2}+\frac{c^3}{2(1-\alpha c)\sqrt{-4\omega-c^2}}$$

令 $y=-4\omega-c^2>0$，则

$$\det(d'')=d_{\omega\omega}d_{cc}-d_{\omega c}d_{c\omega}=\frac{1}{y(1-\alpha c)^2}[\frac{2\alpha c y^2}{3(1-\alpha c)^2}-$$

$$-3c^2y+c^4-\frac{y^2}{(1-\alpha c)^2}-c^4+\frac{2c^2y}{1-\alpha c}]=$$

$$-\frac{1}{(1-\alpha c)^4}[(1-\frac{2}{3}\alpha c)y+(1-3\alpha c)(1-\alpha c)c^2]=$$

$$-\frac{4(1-\frac{2}{3}\alpha c)}{(1-\alpha c)^4}[-\omega+\frac{\alpha(10-9\alpha c)c^3}{12(1-\frac{2}{3}\alpha c)}]<0$$

因此 d'' 仅有一个正特征值和一个负特征值，于是 $p(d'')=1$。定理

7.3.3 证毕。

7.4 广义 Kadomtsev—Petviashvili 方程

最近,Bouard A,Saut J C,Liu Yue 等在文献[180～183]中对广义 KP 方程孤立波的存在性和稳定性,不稳定性进行了研究,得到了早些时候 Wang X P,Ablowitaz M,Segur H 在文献[182]中用不同方法得到的结果。

考虑如下的广义 KP 方程

$$\begin{cases} u_t + f(u)u_x + u_{xxx} + \varepsilon v_y = 0, \\ \qquad u = u(x,y,t),(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ t > 0, \\ v_x = u_y \end{cases} \tag{7.4.1}$$

和

$$\begin{cases} u_t + f(u)u_x + u_{xxx} + av_y + bw_z = 0, \\ \qquad u = u(x,y,z,t),(x,y,z) \in \mathbf{R}^2,t > 0, \\ v_x = u_y, \\ w_x = u_z, \end{cases} \tag{7.4.2}$$

其中常数 ε,a,b 表示横向色散效应,可规范为±1。通常的 KP 方程对应于 $f(u)=u$,我们考虑它的四次方非线性效应。式(7.4.1)当 $f(u)=u$ 时为可积系统,$\varepsilon=-1$ 称为 KPI,$\varepsilon=+1$ 为 KPII。我们先研究孤立波解的存在性和不存在性。

对 $d=2,3$,令

$$X = \{\varphi \in H^1(\mathbf{R}^d),\partial_x^2\varphi \in L^2(\mathbf{R}^d)\}$$

Y 为 $\partial_x(C_0^\infty(\mathbf{R}^d))$的闭包,具有模

$$\|\partial_x\varphi\|_Y = \{\|\nabla\varphi\|_{L^2}^2 + \|\partial_x^2\varphi\|_{L^2}^2\}^{\frac{1}{2}}$$

其中 $H^m(\mathbf{R}^d)$为古典的 m 阶 Sobolev 空间。$\partial_x(C_0^\infty(\mathbf{R}^d))$表示 $\partial_x\varphi$ 的函数空间,$\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$(即 ψ 的函数空间,$\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$,$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x,x')\mathrm{d}x'=0,\forall x'\in\mathbf{R}^{d-1}$)。

定义 7.4.1 方程(7.4.1)、(7.4.2)具有形式 $u(x-ct,y)$

$(u(x-ct,y,z))$的解，称之为它的孤立波。

我们寻求如下的局部解

$$\begin{cases} -cu_x + f(u)u_x + u_{xxx} + \varepsilon v_y = 0, \\ v_x = u_y \end{cases} \tag{7.4.3}$$

$$\begin{cases} -cu_x + f(u)u_x + u_{xxx} + av_y + bw_z = 0, \\ v_x = u_y, \\ w_x = u_z \end{cases} \tag{7.4.4}$$

为方便计，令 $c=1$，且 $f(u)=u^p$，$p=1,2,3\cdots$。

为了考虑孤立波的存在性，引入极小问题

$$I_\lambda = \inf\{ \| u \|_Y^2, u \in Y, \int_{\mathbf{R}^d} u^{p+2} \mathrm{d}x \mathrm{d}x' = \lambda \}$$

其中 $d=2, x'=y$；$d=3, x'=(y,z)$，$\lambda>0$。我们将用 Lions 的集中紧致原理来证明。

定理 7.4.1

(i) 设 $d=2$，方程(7.4.1)不存在任何非平凡的孤立波，满足 $u=\partial_x\varphi, \varphi\in X, u\in H^1(\mathbf{R}^2)\cap L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$，$\partial_x^2 u$ 和 $\partial_y^2\varphi\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$，其中

$$\varepsilon = -1, p \geqslant 4 \tag{7.4.5}$$

或者

$$\varepsilon = 1, p\ 任意 \tag{7.4.6}$$

(ii) 设 $d=3$，方程(7.4.2)不存在非平凡孤立波，满足 $u=\partial_x\varphi$，$\varphi\in X, \partial_x^2 u, \partial_y^2\varphi$ 和 $\partial_z^2\varphi\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^3)$，$u\in H^1(\mathbf{R}^3)\cap L^{2(p+1)}(\mathbf{R}^3)\cap L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^3)$，其中

$$ab = -1(或者\ a=b=1), p\ 任意 \tag{7.4.7}$$

或者

$$a = b = -1, p \geqslant 2 \tag{7.4.8}$$

证明 证明基于 Pohozaev 型等式。利用标准的截断函数原理，设 $\chi_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R})$，$0 \leqslant \chi_0 \leqslant 1$，$\chi_0(t)=1$，$0 \leqslant |t| \leqslant 1$；$\chi_0(t)=0$，$|t| \geqslant 2$。置 $\chi_j = \chi_0(\frac{|\cdot|^2}{j^2})$，$j=1,2,\cdots$。

先考虑二维情况。式(7.4.3)$_1$ 乘以 $x\chi_j u$，再在 $\mathbf{R}^2$ 上积分得：

$$-\int x\chi_j \partial_x(\frac{u^2}{2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{1}{p+2}\int x\chi_j \partial_x(u^{p+2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y +$$

$$\int x\chi_j u u_{xxx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \epsilon\int x\chi_j v_y u\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \qquad (7.4.9)$$

作几次分部积分可得

$$\frac{1}{2}\int\chi_j u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{1}{p+2}\int\chi_j u^{p+2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{3}{2}\int\chi_j u_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y +$$

$$\frac{\epsilon}{2}\int\chi_j v^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{1}{j^2}\int x\chi'_0(\frac{r^2}{j^2})u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y -$$

$$\frac{2}{j(p+2)}\int x^2\chi'_0(\frac{r^2}{j^2})u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{3}{j^2}\int\chi'_0(\frac{r^2}{j^2})u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y -$$

$$\frac{6}{j^4}\int\chi''_0(\frac{r^2}{j^2})u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{6}{j^4}\int x\chi''_0(\frac{r^2}{j^2})u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y -$$

$$\frac{6}{j^5}\int x^3\chi'''_0(\frac{r^2}{j^2})u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{3}{j^2}\int x\chi'_0(\frac{r^2}{j^2})u_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y -$$

$$\frac{2\epsilon}{j^2}\int xy\chi'_0(\frac{r^2}{j^2})uv\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{1}{j^2}\int x\chi'_0(\frac{r^2}{j^2})v^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \qquad (7.4.10)$$

其中 $r^2=x^2+y^2$。由 Lebesgue 控制收敛定理，可得

$$\int[-\frac{1}{2}u^2 + \frac{u^{p+2}}{p+2} - \frac{3}{2}u_x^2 - \frac{\epsilon}{2}v^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \qquad (7.4.11)$$

式(7.4.3)$_1$ 乘以 yv 再作几次分部积分，利用式(7.4.3)$_2$ 最后得

$$\int[\frac{1}{2}u^2 - \frac{u^{p+2}}{(p+1)(p+2)} + \frac{u_x^2}{2} + \frac{\epsilon}{2}v^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

(7.4.12)

式(7.4.3)$_1$ 乘以 φ 再积分可得第三个等式

$$\int[-u^2 + \frac{u^{p+2}}{p+1} - u_x^2 + \epsilon v^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \qquad (7.4.13)$$

将式(7.4.11)代入式(7.4.12)可得

$$\int[u^2 - \frac{u^{p+2}}{p+1} + 2u_x^2 + \varepsilon v^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \qquad (7.4.14)$$

式(7.4.13)+式(7.4.14)得

$$\int[u_x^2 + 2\varepsilon v^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \qquad (7.4.15)$$

当 $\varepsilon=-1$ 时,由式(7.4.15)得

$$\int u_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int v^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由式(7.4.12)、(7.4.13)得

$$\int[-\frac{1}{2}u^2 + \frac{u^{p-2}}{p+2} - \frac{5}{2}v^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

$$\int[-u^2 + \frac{u^{p+2}}{p+1} - 3v^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

消去 v^2 得

$$\int[u^2 + \frac{p-4}{2(p+1)(p+2)}u^{p+2}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \qquad (7.4.16)$$

另一方面,由式(7.4.12)、(7.4.13)得

$$\int u_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{p}{(p+1)(p+2)}\int u^{p+2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

从式(7.4.16)可知式(7.4.5)成立。$\varepsilon=1$,由式(7.4.15)可知式(7.4.6)成立。

现考虑 $d=3$ 情况。类似地,式$(7.4.7)_1$ 乘以 xu,yv 和 zw 积分可得

$$\int[-\frac{1}{2}u^2 + \frac{u^{p+2}}{(p+2)} - \frac{3}{2}u_x^2 - \frac{a}{2}v^2 - \frac{b}{2}v^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0 \qquad (7.4.17)$$

$$\int[\frac{1}{2}u^2 - \frac{u^{p+2}}{(p+1)(p+2)} + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{a}{2}v^2 - \frac{b}{2}w^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0 \qquad (7.4.18)$$

$$\int[\frac{1}{2}u^2 - \frac{u^{p-2}}{(p+1)(p+2)} + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{b}{2}w^2 - \frac{a}{2}v^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0 \qquad (7.4.19)$$

式$(7.4.7)_1$乘以φ,分部积分后可得

$$\int[-u^2+\frac{u^{p+2}}{(p+1)}-u_x^2+av^2+bw^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0 \tag{7.4.20}$$

式(7.4.19)代入式(7.4.18)得

$$\int[av^2-bw^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

当 $ab=-1$, p 为任意数时,显然(ii)成立。式(7.4.18)+式(7.4.19)得

$$\int[\frac{1}{2}u^2-\frac{u^{p+2}}{(p+1)(p+2)}+\frac{1}{2}u_x^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0 \tag{7.4.21}$$

式(7.4.17)$+(p+1)\times$式(7.4.21)得

$$\int[pu^2+(p-2)u_x^2-av^2-bw^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

由此推出式(7.4.8)。另一方面,由式(7.4.21)得

$$\frac{1}{(p+1)(p+2)}\int u^{p+2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int[u^2+u_x^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

由式(7.4.20)得

$$\int[\frac{p}{2}u^2+\frac{p}{2}u_x^2+av^2+bw^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

由此证明式(7.4.7),$a=b=1$。

现证孤立波的存在性。

定理 7.4.2 设 $d=2$, $\epsilon=-1$, p 为正整数,$1\leqslant p<4$,则式(7.4.3)具有解(u,v),$u\in Y$,$u\neq 0$。

证明 首先注意到,对任何 $\lambda>0$, $I_\lambda>0$。这是来自异向 Sobolev 嵌入定理[235],有

$$\|u\|_{L^q}\leqslant C\|u\|_Y,\ \forall u\in Y,2\leqslant q<6$$

因此,

$$\left|\int u^{p+2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant C\|u\|_Y^{p+2},\ \forall u\in Y,$$

$$I_\lambda \geqslant (\frac{\lambda}{C})^{\frac{2}{(p-2)}} > 0, \ \forall \lambda > 0$$

设 $\lambda>0$，u_n 为（*）的极小化序列，则存在序列 φ_n，$\varphi_n \in L^q_{loc}(\mathbf{R}^2)$，$q>0$，$u_n=\partial_x\varphi_n$。令 $v_n=\partial_y\varphi_n=D_x^{-1}u_{ny}$。应用集中紧致原理[236]，令 $\rho_n=|u_n|^2+|v_n|^2+|\partial_x u_n|^2$。注意到

$$\lim_{n\to+\infty}\int\rho_n \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to+\infty}\|u_n\|_Y^2 = I_\lambda > 0$$

(i) 先设"消失"产生，即对任何 $R>0$，

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{(x,y)\in\mathbf{R}^2}\int_{(x,y)+B_R}(|u_n|^2+|v_n|^2+|\partial_x u_n|^2)=0 \tag{7.4.22}$$

其中 B_R 为中心在 O，以 R 为半径的球。设 $2<q<6$，则由异向 Sobolev 空间的 Sobolev 不等式，存在一个正常数 C，它和 $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ 无关，使得对 $\varphi_x\in Y$

$$\int_{(x,y)+B_1}|\varphi_x|^q \leqslant C(\int_{(x,y)+B_1}(|\varphi_x|^2+|\varphi_y|^2+|\varphi_{xx}|^2))^{\frac{q}{2}} \leqslant$$

$$C(\sup_{(x,y)\in\mathbf{R}^2}\int_{(x,y)+B_1}(|\varphi_x|^2+|\varphi_y|^2-|\varphi_{xx}|^2))^{\frac{q-1}{2}} \times$$

$$\int_{(x,y)+B_1}(|\varphi_x|^2+|\varphi_y|^2+|\varphi_{xx}|^2)$$

对于 $\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2$，能用不超过三个球 B_1 去覆盖它，即有

$$\int_{\mathbf{R}^2}|\phi_x|^q \leqslant 3C(\sup_{(x,y)\in\mathbf{R}^2}\int_{(x,y)+B_1}(|\varphi_x|^2+|\varphi_y|^2+|\varphi_{xx}|^2))^{\frac{q-2}{2}}\|\varphi_x\|_Y^2$$

$\forall\varphi$，$\varphi_x\in Y$。由此和式(7.4.22)推出，$\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n\|_{L^q}=0$，$2<q<6$。它和 I_λ 定义矛盾。

(ii) 现设"二分法"产生，即有

$$\lim_{t\to+\infty}Q(t)=\alpha\in[0,I_\lambda],\ t\geqslant 0,$$

$$Q(t)=\lim_{n\to+\infty}\sup_{(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2}\int_{(x_0,y_0)+B_t}\rho_n\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注意到对 $\lambda>0$，$I_\lambda=\lambda^{\frac{2}{p+2}}I_1$，次可加条件成立。假设式(7.4.22)将导致矛盾。将 u_n 分解为两个序列 u_n^1 和 u_n^2，具有不共同的支集。

引理 7.4.1 设 q 使得 $2\leqslant q<+\infty$；存在正常数 C，使得对一切 $f\in L^1_{loc}(\mathbf{R}^2,)\nabla f\in L^1_{loc}(\mathbf{R}^2)$，$\forall R>0$，对一切 $x_0\in\mathbf{R}^2$ 有

$$\left(\int_{R\leqslant|x-x_0|\leqslant 2R}|f(x)-m_R(f)|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant CR^{\frac{2}{q}}\left(\int_{R\leqslant|x-x_0|\leqslant 2R}|\nabla f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

其中

$$m_R(f)=\int_{R\leqslant|x-x_0|\leqslant 2R}f(x)\mathrm{d}x,\ x=(x^1,x^2)\in\mathbf{R}^2$$

证明 对于定义在有界开集

$$\Omega_{x_0,R}=\{x\in\mathbf{R}^2,R<|x-x_0|<2R\}$$

上的 0 平均值 H^1 函数，应用 Poincáre 不等式，再由 Sobolev 嵌入定理，可得存在正常数 $C(x_0,R)$ 使得

$$\left(\int_{R\leqslant|x-x_0|\leqslant 2R}|f(x)-m_R(f)|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant C(x_0,R)\left(\int_{R\leqslant|x-x_0|\leqslant 2R}|\nabla f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

由 Lebesgue 测度的平移不变性和尺度变换 $f\to f(\frac{\cdot}{R})$ 可得

$$C(x_0,R)=CR^{\frac{2}{q}}$$

其中 C 与 x_0,R 无关。

利用引理 7.4.1，可证引理 7.4.2。

引理 7.4.2 设式(7.4.22)成立，则对一切 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)$ ($\varepsilon\to0,\delta(\varepsilon)\to0$)，使得存在 $u_n^1,u_n^2\in Y$，满足($n\geqslant n_0$)：

$$\|u_n^1+u_n^2-u_n\|_Y\leqslant\delta(\varepsilon),$$

$$\|u_n^1\|_Y-\alpha|\leqslant\delta(\varepsilon),$$

$$|\|u_n^2\|_Y-(I_\lambda-\alpha)|\leqslant\delta(\varepsilon),$$

$$\left|\int_{\mathbf{R}^2}[(u_n^1)^{p+2}+(u_n^2)^{p+2}-u_n^{p+2}]\right|\leqslant\delta(\varepsilon)$$

且

$$\lim_{n\to+\infty}\operatorname{dist}(\operatorname{supp}u_n^1,\operatorname{supp}u_n^2)=+\infty$$

证明 设式(7.4.22)成立，固定 $\varepsilon>0$，则能找到 $R_0>0,R_n>0,R_n\nearrow+\infty,x_n\in\mathbf{R}^2$，使得

$$\alpha\geqslant\int_{x_n+B_{R_0}}(|u_n|^2+|v_n|^2+|\partial_x u_n|^2)\geqslant\alpha-\varepsilon,$$

$$Q_n(2R_n)\leqslant\alpha+\varepsilon,$$

$n\geqslant n_0$，其中

$$Q_n(t)=\sup_{(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2}\int_{(x_0,y_0)+B_t}(|u_n|^2+|v_n|^2+|\partial_x u_n|^2)$$

推之

$$\int_{R_0<|x-x_n|\leqslant 2R_n}(|u_n|^2+|v_n|^2+|\partial_y u_n|^2)\leqslant 2\varepsilon$$

令 $\xi,\eta\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$，$0\leqslant\xi\leqslant1$，$0\leqslant\eta\leqslant1$，$\xi=1$ 在 B_1 上，$\operatorname{supp}\xi\subset B_2$，$\eta_1=1$，$\mathbf{R}^2\backslash B_2$，$\operatorname{supp}\eta\subset\mathbf{R}^2\backslash B_1$，令

$$\xi_n=\xi\left(\frac{\cdot-x_n}{R_1}\right),\ \eta_n=\eta\left(\frac{\cdot-x_n}{R_n}\right)$$

考虑

$$u_n^1=\partial_x(\xi_n(\varphi_n-a_n)),u_n^2=\partial_x(\eta_n(\varphi_n-b_n))$$

其中(a_n)，(b_n)为待定数列，令

$$v_n^1=D_x^{-1}(u_n^1)_y=\partial_y(\xi_n(\varphi_n-a_n)),$$

$$v_n^2=\partial_x^{-1}(u_n^2)_y=\partial_y(\eta_n(\varphi_n-b_n))$$

则有

$$\|u_n^1+u_n^2-u_n\|_{L^2}\leqslant\|(\partial_x\xi_n)((\varphi_n-a_n)\|_{L^2}+$$

$$\|(\partial_x\eta_n)(\varphi_n-b_n)\|_{L^2}+\sqrt{2\varepsilon},$$

$$\|(\partial_x\xi_n)((\varphi_n-a_n)\|_{L^2}\leqslant$$

$$(\int_{R_1 \leqslant |x-x_n| \leqslant 2R_1})|\partial_x \xi_n|^2 |\varphi_n - a_n|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\|\partial_x \xi_n\|_{L^p}(\int_{R_1 \leqslant |x-x_n| \leqslant 2R_1})|\varphi_n - a_n|^q)^{\frac{1}{q}}$$

其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$，选取 $a_n = \int_{R_1 \leqslant |x-x_n| \leqslant 2R_1} \varphi_n(x)\mathrm{d}x$，应用引理 7.4.1 得

$$|(\partial_x \xi_n)((\varphi_n - a_n)\|_{L^2} \leqslant$$

$$CR_1^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}(\int_{R_1 \leqslant |x-x_n| \leqslant 2R_1}(|u_n|^2 + |v_n|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant C' \sqrt{\varepsilon}$$

同理，选取 $b_n = \int_{R_n \leqslant |x-x_n| \leqslant 2R_n} \varphi_n(x)\mathrm{d}x$，导致

$$\|(\partial_x \xi_n)(\varphi_n - b_n)\|_{L^2} \leqslant C(\int_{R_n \leqslant |x-x_n| \leqslant 2R_n}(|u_n|^2 + |v_n|^2))^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$C\sqrt{\varepsilon}$$

这就推出 $\|u_n^1 + u_n^2 - u_n\|_{L^2}$的估计。引理要求估计的其它界均可类似推出。最后，

$$\operatorname{supp} u_n^1 \cap \operatorname{supp} u_n^2 = \emptyset$$

Y 单射到 $L^{p+2}(\mathbf{R}^2)$。

现继续定理 7.4.2 的证明。取子序列，设

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^2}(u_n^1)^{p+2} = \lambda_1(\varepsilon), \ \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^2}(u_n^2)^{p+2} = \lambda_2(\varepsilon)$$

其中

$$|\lambda_1(\varepsilon) + \lambda_2(\varepsilon) - \lambda| \leqslant \delta(\varepsilon)$$

先设$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lambda_1(\varepsilon)=0$。则选取 ε 充分小，对充分大的 n，$\int_{\mathbf{R}^2}(u_n^2)^{p+2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$，因此考虑

$$\left(\frac{\lambda_2(\varepsilon)}{\int_{\mathbf{R}^2}(u_n^2)^{p+2}}\right)^{\frac{1}{p+2}} u_n^2$$

可得

$$I_{\lambda_2}(\varepsilon) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \| u_n^2 \|_Y \leqslant I_\lambda - \alpha + \delta(\varepsilon)$$

但这和$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lambda_2(\varepsilon)=\lambda$矛盾。

再设$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}|\lambda_1(\varepsilon)|>0,\lim\limits_{\varepsilon\to 0}|\lambda_2(\varepsilon)|>0$,同样可得

$$I_{|\lambda_1(\varepsilon)|} + I_{|\lambda_2(\varepsilon)|} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \| u_n^1 \|_Y + \liminf_{n\to\infty} \| u_n^2 \|_Y \leqslant I_\lambda + \delta(\varepsilon)$$

令$\varepsilon\to 0$,由$I_\mu=\mu^{\frac{2}{(p+2)}}I_1(\mu>0)$和次可加性得到矛盾。因此"二分法"不成立。

(iii) 仅有一种可能性:存在序列$\{x_n\}$,$x_n\in\mathbf{R}^2$,使得对$\varepsilon>0$,存在有限的$R>0,n_0>0$,使得

$$\int_{x_n+B_R}(|u_n|^2+|v_n|^2+|\partial_x u_n|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant I_\lambda-\varepsilon, n\geqslant n_0$$

这推出$\int_{x_n+B_R}|u_n|^2\geqslant\int_{\mathbf{R}}|u_n|^2-2\varepsilon$,$n$充分大。因$u_n$在$Y$中有界,设$u_n(\cdot-x_n)$在$Y$中弱收敛于$u\in Y$,则有

$$\int_{\mathbf{R}^2}|u|^2\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^2}|u_n^2|\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_{x_n+B_R}|u_n^2|+2\varepsilon$$

引理 7.4.3 设u_n为Y中有界序列,$R>0$,则存在一个子序列$\{u_{nk}\}$在$L^2(B_R)$中强收敛于u。

我们先完成定理 7.4.2 的证明,然后证明引理 7.4.3。由引理 7.4.3,设$u_n(\cdot-x_n)$在L^2_{loc}强收敛于u,但实际上$u_n(\cdot-x_n)$在$L^2(\mathbf{R}^2)$中强收敛于u,由插值定理以及嵌入$Y\subset L^6(\mathbf{R}^2)$,$u_n(\cdot-x_n)$也在$L^{p+2}$中强收敛于$u$,使得$\int u^{p+2}=\lambda$,因$\|u\|_Y\leqslant\liminf\|u_n\|_Y=I_\lambda$,这表明$u$为$I_\lambda$的解。

证明 设u_n为Y中的有界序列,$u_n=\partial_x\varphi_n$,$\varphi_n\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$,$v_n=\partial_y\varphi_n\in L^2(\mathbf{R}^2)$。乘$\varphi_n$以函数$\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$,$0\leqslant\psi\leqslant 1$,$\psi\equiv 1$,在$B_R$,$\mathrm{supp}\,\psi\subset B_{2R}$。设$\mathrm{supp}\,\varphi_n\subset B_{2R}$,因$u_n$在$Y$中有界,设$u_n$在$Y$中弱收敛于$u=\partial_x\varphi$,可设$\varphi=0$,否则以序列$\varphi_n-\varphi$代替$\varphi_n$。则有

$$\int_{B_{2R}} |u_n|^2 = \int_{R^2} |\hat{u}_n|^2 = \int_{|\xi_1|\leqslant R_1, |\xi_2|\leqslant R_1} |\hat{u}_n|^2 + \int_{|\xi_1|\geqslant R_1} |\hat{u}_n|^2 + \int_{|\xi_1|\leqslant R_1, |\xi_2|\geqslant R_1^2} |\hat{u}_n|^2$$

其中 $\hat{f}(\xi_1,\xi_2)$表示 $f(x,y)$的傅氏变换。第三项满足

$$\int_{|\xi_1|\leqslant R_1, |\xi_2|\geqslant R_1^2} |\hat{u}_n|^2 = \int_{|\xi_1|\leqslant R_1, |\xi_2|\geqslant R_1^2} \frac{|\xi_1|^2}{|\xi_2|^2} |\hat{v}_n|^2 \leqslant \frac{1}{R_1^2} \| v_n \|_{L^2}^2$$

第二项是有界的：

$$\int_{|\xi_1|\geqslant R_1} |\hat{u}_n|^2 \leqslant \frac{1}{R_1^2} \| \partial_x u_n \|_{L^2}^2$$

固定 $\varepsilon>0$，选取 R_1 充分大使得

$$\int_{|\xi_1|\geqslant R_1} |\hat{u}_n|^2 + \int_{|\xi_1|\leqslant R_1, \xi_2\geqslant R_1^2} |\hat{u}_n|^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

对第一项利用 Lebesgue 控制收敛定理，因 u_n 在 $L^2(R^2)$中弱收敛于 0，

$$\lim_{n\to-\infty} \hat{u}_n(\xi_1,\xi_2) = \lim_{n\to+\infty} \int_{B_{2R}} e^{-ix\xi_1 - iy\xi_2} u_n(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

$$(\xi_1,\xi_2) \in \mathbf{R}^2,$$

$$|\hat{u}_n(\xi)| \leqslant |u_n|_{L^1(B_{2R})}$$

现转到三维情况。

定理 7.4.3 $d=3, a=b=-1, p=1$，则方程(7.4.4)具有解(u,v,w)，$u\in Y$，$u\neq 0$。

证明 我们用集中紧致原则，证明 I_λ 极小值的存在性。首先，对任何 $\lambda>0$，有 $I_\lambda>0$。我们有

$$\| u \|_{L^q} \leqslant C \| u \|_Y,\ 2 \leqslant q < \frac{10}{3}$$

$\lambda>0$，令 u_n 表示 I_λ 的极小序列。则存在 $\varphi_n \in L^6(\mathbf{R}^3)$，$\partial_x\varphi_n = u_n$，令 $v_n = \partial_y\varphi_n$，$w_n = \partial_z\varphi_n$。利用集中紧致原则对于 $\rho_n = |\varphi_n|^6$，因 φ_n 在 $L^6(\mathbf{R}^3)$ 中有界，由 Sobolev 不等式，存在子序列 ρ_n 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int \rho_n \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \beta > 0$。再应用以下引理 $r=6$，证明 $\beta>0$。

引理 7.4.4　设 $\varphi \in L^6(\mathbf{R}^3)$，$\partial_x\varphi \in Y$，则 $\varphi \in L^{10}(\mathbf{R}^3)$，存在常数 $C>0$，使得

$$\| \varphi \|_{L^{10}} \leqslant C \| \partial_x^2\varphi \|_{L^2}^{\frac{1}{5}} \| \partial_y\varphi \|_{L^2}^{\frac{2}{5}} \| \partial_z\varphi \|_{L^2}^{\frac{2}{5}}$$

对任何 $6 \leqslant r < 10$，存在 α_j，$0<\alpha_j<1$，$j=0,1,2,3$ 和常数 C，使得如果 $\varphi \in L^6(\mathbf{R}^3)$，$\partial_x\varphi \in Y$，则

$$\| \partial_x\varphi \|_{L^3} \leqslant C \| \varphi \|_{L^r}^{\alpha_0} \| \partial_x\varphi \|_{L^2}^{\alpha_1} \| \partial_x^2\varphi \|_{L^2}^{\alpha_2} \| \partial_y\varphi \|_{L^2}^{\alpha_3} \| \partial_z\varphi \|_{L^2}^{\alpha_3}$$

证明　第一个不等式和第二个不等式 $r=6$，直接来自广义 Sobolev 不等式。

如 $6<r<10$，我们不能直接取 $q=3$ 于广义 Sobolev 不等式中，但可考虑 q 满足 $3<\dfrac{4r}{2+r}<q<\dfrac{10}{3}$，则广义 Sobolev 不等式取

$$\mu_1 = \frac{3-\left(\dfrac{r}{q}\right)}{5-\left(\dfrac{r}{2}\right)},\ \mu_2=\mu_3=2\mu_1-1,\ \mu_0=r\left(\frac{1}{q}-\frac{\mu_1}{2}\right)，即有$$

$$\| \partial_x\varphi \|_{L^q} \leqslant C \| \varphi \|_{L^r}^{10} \| \partial_x^2\varphi \|_{L^2}^{\mu_1} \| \partial_y\varphi \|_{L^2}^{\mu_2} \| \partial_z\varphi \|_{L^2}^{\mu_3}$$

可用插值得到要求的不等式，其中

$$\frac{1}{3} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{2},\ \theta \in [0,1]$$

(i) 首先证明“消失”不发生。如发生，可证明 φ_n 在 $L^r(\mathbf{R}^3)$ 中趋于 0，由引理 7.4.4，可知和 I_λ 中的约束条件相矛盾。

(ii) “二分法”发生，即有

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \alpha \in [0,\beta], t \geqslant 0,$$

$$Q(t) = \lim_{n\to\infty} \sup_{(x_0,y_0,z_0)\in \mathbf{R}^3} \int_{(x_0,y_0,z_0)+B_t} |\varphi_n|^6 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

定义 R_0, R_n, ξ_n, η_n,如同引理 7.4.2,且将 $|u_n|^2 + |v_n|^2 + |\partial_x u_n|^2$ 置换为 $|\varphi_n|^6$,再令

$$\varphi_n^1 = \xi_n \varphi_n, \ \varphi_n^2 = \eta_n \varphi_n,$$

$$(u_n^1, v_n^1, w_n^1) = \nabla \varphi_n^1, \ (u_n^2, v_n^2, w_n^2) = \nabla \varphi_n^2$$

对 n 充分大有

$$| \| \varphi_n^2 \|_{L^6} - \alpha | \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{6}},$$

$$| \| \varphi_n^1 \|_{L^6} - (\beta - \alpha) | \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{6}} \qquad (7.4.23)$$

由于

$$\int_{R_0 \leqslant |x - x_n| \leqslant 2R_n} |\varphi_n|^6 \mathrm{d}x \leqslant 2\varepsilon, \ x = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

不难证明

$$| \| u_n^1 \|_Y^2 + \| u_n^2 \|_Y^2 - \| u_n^2 \|_Y^2 | \leqslant \delta(\varepsilon) \to 0, \ \varepsilon \to 0 \qquad (7.4.24)$$

作为例子

$$\left| \int_{\mathbf{R}^3} [\xi_n^2 |\nabla \varphi_n|^2 - |\nabla(\xi_n \varphi_n)|^2] \right| \leqslant$$

$$\int_{R_1 \leqslant |x - x_n| \leqslant 2R_1} (|\nabla \xi_1|^2 \varphi_n^2 + 2|\xi_n \nabla \xi_n| \ \varphi_n \nabla \varphi_n|) \leqslant$$

$$C \| \nabla \xi_n \|_{L^3}^2 \varepsilon^{\frac{1}{3}} + |\nabla \varphi_n|_{L^2} \varepsilon^{\frac{1}{6}} |\xi_n \nabla \xi_n|_{L^3}$$

利用 $\nabla\varphi_n$ 在 L^2 的有界性,可证 $\nabla\xi_n$ 在 L^3 中关于 n 一致有界。由此和引理 7.4.4,可得

$$\| u_n^1 + u_n^2 - u_n \|_{L^3} \leqslant \delta(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0 \qquad (7.4.25)$$

从式(7.4.23)、(7.4.24)和式(7.4.25)可得出和次可加性条件矛盾,其中 $I_\lambda = \lambda^{\frac{2}{3}} I_1$。

(iii) 仅有一种可能是:

存在 $x_n \in \mathbf{R}^3$,对一切 $\varepsilon > 0$,存在 $R < +\infty$,使得 n 充分大有

$$\int_{x_n+B_R} |\varphi_n|^6 \geqslant \beta - \varepsilon \tag{7.4.26}$$

容易验证引理 7.4.3 对于三维也是成立的。由此由 Sobolev 不等式可知(u_n)在 $L^6_{loc}(\mathbf{R}^3)$为相对紧的，连同式(7.4.26)表明子序列 $\varphi_n(\cdot - x_n)$在 $L^6(\mathbf{R}^3)$中强收敛于 φ，$u_n(\cdot - x_n)$在 Y 中弱收敛于 $u=\partial_x\varphi\in Y$。由引理 7.4.4 中取 $r=6$，可知 u_n 在 $L^3(\mathbf{R}^3)$中强收敛，因此 u 为 I_λ 的解。

对于孤立波解的正则性，有如下定理：

定理 7.4.4 如果 $\varepsilon=-1, p=1,2,3(a=b=-1, p=1)$，则式(7.4.1)、(7.4.2)的任何孤立波解是属于 $H^\infty(\mathbf{R}^d)$。

对于二，三维 5 阶 KdV 方程

$$\begin{cases} u_t + u^p u_x + u_{xxx} + \delta u_{xxxxx} - v_y = 0, \\ v_x = u_y, \end{cases} \tag{7.4.27}$$

$$\begin{cases} u_t + u^p u_x + u_{xxx} + \delta u_{xxxxx} - v_y - w_z = 0, \\ v_x = u_y, \\ w_x = u_z \end{cases} \tag{7.4.28}$$

有如下结果：

定理 7.4.5 方程(7.4.27)不具有非平凡孤立波解，其中 $\delta=1, p\geqslant 4$ 或 $\delta=1, 1\leqslant p<4, c$ 充分大。

但对于 $\delta=-1$，p 为任意数，它具有非平凡孤立波解属于 $H^\infty(\mathbf{R}^2)$。

方程(7.4.28)不具有非平凡孤立波解，其中

$$p\geqslant 3, \delta=-1$$

或

$$p\geqslant 2, \delta=1$$

或 $p=1, \delta=1, c$ 为充分大。

但对于 $\delta=-1, p=1,2$，它具有非平凡孤立波解属于 $H^\infty(\mathbf{R}^2)$。

为了研究 KP 方程孤立波的稳定性与不稳定性，先考虑如下的二维 KP 方程

$$(u_t + (u^{p+1})_x + u_{xxx})_x = u_{yy} \tag{7.4.29}$$

孤立波的稳定性。引入函数空间

$$V(\Omega) = \{u | u \in L^2(\mathbf{R}^2), u_x \in L^2(\mathbf{R}^2), D_x^{-1}u_y \in L^2(\mathbf{R}^2)\} \tag{7.4.30}$$

具有模

$$|u|_V = (\int_{\mathbf{R}^2} (u^2 + |\tilde{\nabla} u|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^{\frac{1}{2}}$$

其中 $\tilde{\nabla} u = (u_x, D_x^{-1}u_y)^T$。$u(x,y,t) = \varphi_\omega(x-\omega t, y)$ 定义为式(7.4.29)的孤立波，它满足

$$\omega\varphi + D_x^{-2}\varphi_{yy} - \varphi_{xx} = \varphi^{p+1} \tag{7.4.31}$$

当 $p=1$ 时，它具有脉冲状孤立波

$$v(x,y) = 8\frac{\omega - x^2/3 + y^2/(3\omega)}{\omega + x^2/3 + y^2/(3\omega)^2} \tag{7.4.32}$$

容易看到方程(7.4.31)是如下泛函的 Euler-Lagrange 方程

$$L_\omega(u) = \int(\frac{\omega}{2}u^2 + \frac{1}{2}|\tilde{\nabla} u|^2 - \frac{1}{(p+1)(p+2)}u^{p+2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{7.4.33}$$

因此，如果存在 $\varphi \in V(R^2)$，使得

$$L_\omega(\varphi) = M(\omega),\ K(\varphi) = 1$$

则 φ 为如下方程

$$\omega\varphi - \varphi_{xx} + D_x^{-2}\varphi_{yy} = \lambda\varphi^{m+1}$$

的解，其中 λ 为 Lagrange 乘子

$$M(\omega) = \inf_{u \in V}\{I_\omega(u) | k(u) = 1\}$$

$$I_\omega(u) = \int_{\mathbf{R}^2}(\omega u^2 + |\tilde{\nabla} u|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$k(u) = \int_{\mathbf{R}^2} u^{p+2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

定理 7.4.6 设 $0 < p < \frac{4}{3}$，$p = p_1/p_2$，其中 p_1 为任何偶整数，p_2 为任何奇整数，$\omega > 0$，则

$$S_\omega = \{\varphi \in V(R^2), k(\varphi) = I_\omega(\varphi) = (M)\omega))^{\frac{p+2}{p}}\}$$

是轨道稳定的，其中 V 为式(7.4.30)所定义。

考虑如下三维 KP 方程

$$\begin{cases} u_t + u^p u_x + u_{xxx} - v_y - w_z = 0 \\ v_x = u_y, \qquad (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \\ w_x = u_z \end{cases} \tag{7.4.34}$$

我们有

定理 7.4.7 设 $1 \leqslant p < \frac{4}{3}$，则三维 KP 方程(7.4.34)的孤立波 $u(x,y,z,t) = \varphi_{c_0}(x-ct,y,z)$，$c_0 > 0$，依 $\|\cdot\|_Y$ 是轨道不稳定的，其中

$$\|u\|_Y = \|\partial_x v\|_y = (\|\nabla v\|_2^2 + |\partial_x^2 v|_2^2)^{\frac{1}{2}}, v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$$

7.5 Davey-Stewartson 方程

考虑如下的 N 维 Davey-Stewartson 方程

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t + \Delta u = a|u|^\alpha u + b_1 u u_{x_1} \\ -\Delta v = b_2(|u|^2)_{x_1} \end{cases} \tag{7.5.1}$$

其中 Δ 为通常的 $\mathbf{R}^N$ 上的拉普拉斯算子，$a \in \mathbf{R}$，$\alpha, b_1, b_2 > 0$。方程组(7.5.1)可通过傅氏变换化为一个方程。事实上，令 E_1 为非局部的线性算子，定义为

$$\mathscr{F}(E_1(\psi))(\xi) = \sigma_1(\xi)\mathscr{F}(\psi)(\xi)$$

其中 $\sigma_1(\xi) = \frac{\xi_1^2}{\xi^2}$，$\xi \in \mathbf{R}^N$，$\mathscr{F}$ 为傅氏变换

$$\mathscr{F}(\psi)(\xi) = (\frac{1}{2\pi})^{\frac{N}{2}} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \psi(x) \mathrm{d}x$$

则形式上可得 $v_{x_1} = -b_2 E_1(|u|^2)$，则(7.5.1)可写成如下的非线性 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}u_t + \Delta u = a|u|^\sigma u - b_1 b_2 E_1(|u|^2)u \tag{7.5.2}$$

考虑具如下形式的周期解

$$u(x,t)=e^{i\omega t}\varphi(x),$$
$$v(x,t)=\Phi(x) \tag{7.5.3}$$

其中 $\omega>0,\varphi,\Phi\in H^1(\mathbf{R}^N),\varphi,\Phi\neq 0,N=2$ 和 3。如果 u 是式(7.5.2)的解,满足式(7.5.3),则 φ 为如下问题的解

$$\begin{cases}\varphi\in H^1(\mathbf{R}^N),\varphi\neq 0,\\ -\Delta\varphi+\omega\varphi=bE_1(|\varphi|^2)\varphi-a|\varphi|^\alpha\varphi\end{cases} \tag{7.5.4}$$

这里 $b=b_1b_2>0$,易见 φ 为式(7.5.4)的解,当且仅当 φ 为如下 Lagrange S 的临界点,其中

$$S(\varphi)=\frac{1}{2}\int|\nabla\varphi|^2-\frac{b}{4}\int|\varphi|^2E_1(|\varphi|^2)+\frac{a}{\alpha+2}\int|\varphi|^{\alpha+2}+\frac{\omega}{2}\int|\varphi|^2 \tag{7.5.5}$$

记 L^2 为实 Hilbert 空间,具有内积

$$(u;v)_2=\int\mathrm{Re}\ (u(x)\bar{v}(x))\mathrm{d}x$$

$W^{m,p}$和 H^s 表示 $\mathbf{R}^N$ 的 Sobolev 空间,$b,\omega>0$,令

$$\mathrm{Sob}\ (N)=\begin{cases}2N/(N-2), & N\geqslant 3,\\ +\infty, & N=2\end{cases}$$

定义函数集

$\mathscr{K}=\{\psi\in H^1|\psi\neq 0\}$,$\psi$ 为式(7.5.4)的解;

$\mathscr{G}=\{\varphi\in\mathscr{K}|S(\varphi)\leqslant S(\psi),\forall\psi\in\mathscr{K}\}$,$\mathscr{G}$ 为基态解集。

引入可允许参数集

$$\mathscr{R}_{\omega,b}=\{(\alpha,a)|0<\alpha<\mathrm{Sob}(N)-2,a<a_\alpha^*\}$$

其中

$$a_\alpha^*=\begin{cases}+\infty, & \alpha<2,\\ b, & \alpha=2,\\ b^{\frac{\alpha}{2}}\omega^{\frac{2-\alpha}{2}}(\frac{2}{\alpha})(\frac{\alpha-2}{\alpha})^{\frac{\alpha-2}{2}}, & \alpha>2\end{cases}$$

引入如下 H^1 上泛函:

$$T(\varphi) = |\nabla\varphi|_2^2$$

$$V(\varphi) = \frac{b}{4}B_1(|\varphi|^2) - \frac{a}{\alpha+2}|\varphi|_{\alpha+2}^{\alpha+2} - \frac{\omega}{2}|\varphi|_2^2$$

$$S(\varphi) = \frac{1}{2}T(\varphi) - V(\varphi)$$

$$E(\varphi) = S(\varphi) - \frac{\omega}{2}|\varphi|_2^2$$

命题 7.5.1 如果 $\varphi\in H^1$ 为式(7.5.4)的解，则有

(i)$T(\varphi)+\omega|\varphi|_2^2=bB_1(|\varphi|^2)-a|\varphi|_{\alpha+2}^{\alpha+2}$；

(ii)$(N-2)T(\varphi)+N\omega|\varphi|_2^2=\frac{bN}{2}B_1(|\varphi|^2)-\frac{2N\alpha}{\alpha+2}|\varphi|_{\alpha+2}^{\alpha+2}$；

(iii)$4T(\varphi)+\frac{\alpha(\alpha-2)}{2(\alpha+2)}|\varphi|_{\alpha+2}^{\alpha+2}=\omega|\varphi|_2^2+2\sum_{j=1}^{N}|\partial_j\varphi|_2^2+\theta_1(|\varphi|^2)$，

其中 θ_1 为如下定义的泛函

$$\theta_1(\psi) = \int \frac{2\xi_1^2(\xi_2^2+\cdots+\xi_N^2)}{|\xi|^4}|\mathscr{F}(\psi)|^2\mathrm{d}\xi$$

证明 如果 φ 为式(7.5.4)的解，则(i)、(ii)、(iii)易从 S 沿 H^1 定义的曲线微分得到，对 $\lambda>0$，分别用尺度变换 $\lambda\to\lambda\varphi$, $\lambda\to\varphi\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)$, $\lambda\to\varphi_\lambda$，其中 $\varphi_\lambda(x)=\lambda^{\frac{1}{4}}\varphi(\Lambda_\lambda x)$, $\Lambda_\lambda=\mathrm{diag}(1,\cdots,\lambda,\cdots,1)$。

推论 7.5.1 如 φ 为式(7.5.4)的一个解，则

(i)$S(\varphi)=\frac{1}{N}T(\varphi)$；

(ii)$(N-2)T(\varphi)=2NV(\varphi)$；

(iii)

$$E(\varphi) = \frac{(2-\alpha)}{4\alpha}b_1B_1(|\varphi|^2) + \frac{N\alpha-4}{2N\alpha}T(\varphi) = \frac{2-\alpha}{2(\alpha+2)}a|\varphi|_{\alpha+2}^{\alpha+2} + \frac{N-2}{2N}T(\varphi);$$

(iv)$b(B_1(|\varphi|^2)+\theta_1(|\varphi|^2))=\frac{2a\alpha}{\alpha+2}|\varphi|_{\alpha+2}^{\alpha+2}+4|\partial_1\varphi|_2^2$。

以下考虑二，三维问题式(7.5.2)基态解的存在性，即式(7.5.4)的正解，使得 Lagrange S 取极小值。

定理 7.5.1 设 $N=2$，$(\alpha,a)\in\mathbf{R}_{\omega,b}$，则如下成立：

(i) $\mathscr{K}$ 和 $\mathscr{G}$ 含有一个实值正函数；

(ii) $\varphi\in\mathscr{G}$，当且仅当 φ 为如下极小问题的解

$$\begin{cases}\varphi\in\sum_0,\\ T(\varphi)=\min\{T(\psi)\mid\psi\in\sum_0\}\end{cases}\tag{7.5.6}$$

其中

$$\sum_0=\{\psi\in H^1\mid\psi\neq 0,V(\psi)=0\}$$

定理 7.5.2 设 $N=3$，$(\alpha,a)\in\mathbf{R}_{\omega,b}$，则以下成立：

(i) $\mathscr{K}$ 和 $\mathscr{G}$ 含有一个实值正函数；

(ii) 存在 $\mu_0>0$，使得 $\varphi\in\mathscr{G}$，当且仅当 φ 为如下极小问题的解

$$\begin{cases}\varphi\in\sum_{\mu_0},\\ T(\varphi)=\min\{T(\psi)\mid\psi\in\sum_{\mu_0}\}\end{cases}\tag{7.5.7}$$

其中

$$\sum_{\mu_0}=\{\psi\in H^1\mid\psi\neq 0,V(\psi)=\mu_0\}$$

为证明以上定理，我们需要如下一些引理：

引理 7.5.1 设 $0<q<\mathrm{Sob}(N)-2$，则存在常数 $C>0$，使得对一切 $\psi\in H^1$，有

$$|\psi|_{q+2}^{q+2}\leqslant C\Big(\sup_y\int_{B_1(y)}(|\nabla\psi|^2+|\psi|^2)\Big)^{\frac{q}{2}}\|\psi\|_{H^1}^2$$

证明 设可用单位立方体的系列 $\{C_j\}$，$C_j\cap C_k=\emptyset$，$j\neq k$，遮盖 $\mathbf{R}^N$。因此可得

$$|\psi|_{q+2}^{q+2}=\sum_{j=1}^{\infty}\int_{C_j}|\psi|^{q+2},$$

$$\|\psi\|_{H^1}^2=\sum_{j=1}^{\infty}\int_{C_j}(|\nabla\psi|^2+|\psi|^2)$$

于是从 Sobolev 嵌入定理有

$$\int_{C_j}|\psi|^{q+2}\leqslant C(\int_{C_j}(|\nabla\psi|^2+|\psi|^2))^{\frac{q+2}{q}}\leqslant$$

$$C(\sup_{j\in N}\int_{C_j}(|\nabla\psi|^2+|\psi|^2))^{\frac{q}{2}}\int_{C_j}(|\nabla\psi|^2+|\psi|^2)$$

其中 C 仅依赖于 N 和 q。上面不等式对 j 求和得

$$|\psi|_{q+2}^{q+2}\leqslant C(\sup_{j\in N}\int_{C_j}(|\nabla\psi|^2+|\psi|^2))^{\frac{q}{2}}\|\psi\|_{H^1}^2$$

由此即得引理。对任何 $\mu\in\mathbf{R}$，定义

$$\Sigma_\mu=\{\psi\in H^1|\psi\neq 0,V(\psi)=\mu\}\tag{7.5.8}$$

$$j(\mu)=\inf\{\frac{1}{2}T(\psi)|\psi\in\Sigma_\mu\}\tag{7.5.9}$$

则有

定理 7.5.2　设 $N\in\{2,3\}$，$(\alpha,a)\in\mathbf{R}_{\omega,b}$，则以下成立：

(i) $\Sigma_\mu\neq\emptyset,\forall\mu\in\mathbf{R}$；

(ii) 如 $N=2$，则存在常数 $I>0$，使得 $j(\mu)=I,\forall\mu\in\mathbf{R}$；

(iii) 如 $N=3$，则存在常数 $I>0$，使得 $j(\mu)=\mu^{\frac{1}{3}}I,\forall\mu>0$。

证明　设 $\varphi\in H^1,\varphi\neq 0$，对 $\lambda>0$，定义 $\varphi_\lambda(x)=\varphi(\lambda^{-\frac{1}{N}}x)$，如 $\epsilon>0$ 充分小，则 $V(\epsilon\varphi)<0$，因 $V((\epsilon\varphi)_\lambda)=\lambda V(\epsilon\varphi),\forall\lambda>0$，由此推出 $\Sigma_\mu\neq\emptyset,\forall\mu<0$。为了证明 $\Sigma_\mu\neq\emptyset,\forall\mu\geqslant 0$，充分证明存在 $\varphi_0\in H^1$，使得

$$V(\varphi_0)>0\tag{7.5.10}$$

事实上，如式(7.5.10)成立，则存在 $\tau_0<1$，使得 $V(\tau_0\varphi_0)=0$，推出 $\Sigma_\mu\neq\emptyset$，进一步，因 $V(\varphi_{0\lambda})=\lambda V(\varphi_0),\forall>0$，推出 $\Sigma_\mu\neq\emptyset,\forall\mu>0$。

设 $(\alpha,a)\in\mathbf{R}_{\omega,b}$，我们有：

首先，如 $\alpha<2$ 或 $a<0$，则取 $\varphi_0=\tau\varphi$，τ 充分大，(7.5.10)成立。

其次，如 $\alpha=2,a<b$，则存在 $\varphi\in H^1$，使得

$$\frac{1}{4}B_1(|\varphi|^2)-\frac{a}{4}|\varphi|_4^4>0$$

其中 $B_1(|\varphi|^2)=\int\sigma_1(A_\lambda\xi)|\mathscr{F}\{|\varphi|^2\}|^2d\xi$。取 $\varphi_0=\tau\varphi$，τ 充分大，则式(7.5.10)成立。

最后，如 $\alpha>2, a<b^{\frac{\alpha}{2}}\omega^{\frac{2-\alpha}{2}}(\frac{2}{\alpha})(\frac{\alpha-2}{\alpha})^{\frac{\alpha-2}{2}}$，定义

$$G_\lambda(s)=\frac{b}{4}s^4-\frac{a}{\alpha+2}\lambda^{\frac{\alpha-2}{4}}s^{\alpha+2}-\frac{\omega}{2}\lambda^{-\frac{1}{2}}s^2$$

容易验证，对一切 $\lambda>0$，

$$\exists\, s_0>0\,|\,G_\lambda(s_0)>0\Leftrightarrow a<b^{\frac{\alpha}{2}}\omega^{\frac{2-\alpha}{2}}(\frac{2}{\alpha})(\frac{\alpha-2}{\alpha})^{\frac{\alpha-2}{2}}$$

(7.5.11)

令 $\psi=s\mathscr{K}_{B_R}$（$\mathscr{K}_{B_R}$ 为 B_R 的特征函数），$\varepsilon>0$，$\psi_\lambda(x)=\lambda^{\frac{1}{4}}\psi(\Lambda_\lambda x)$，$\Lambda_\lambda=\mathrm{diag}(1,\cdots,\lambda,\cdots,1)$，则存在 $\lambda>0$，使得

$$V(\psi_\lambda)>\frac{b}{4}|\psi|_4^4-\varepsilon-\frac{a\lambda^{\frac{\alpha-2}{4}}}{\alpha+2}|\psi|_{\alpha+2}^{\alpha+2}-\frac{\omega}{2}\lambda^{-\frac{1}{2}}|\psi|_2^2=$$

$$\mathrm{mes}\ (B_R)G_\lambda(s)-\varepsilon$$

由式(7.5.11)可知存在 s_0，使得 $G_\lambda(s_0)>0$，如选取 R 充分大，则有 $V(\psi_\lambda)>0$，式(7.5.10)由稠密性得到。现设 $N=2$，令

$$I=j(0)=\inf\{\frac{1}{2}T(\psi)\,|\,\psi\in\Sigma_0\}$$

为了证明 $I>0$，考虑 $\psi\in\Sigma_0$，由 $B_j(\psi)=\int E_j(\psi)\bar{\psi}\leqslant|\psi|_2^2$，有

$$\frac{\omega}{2}|\psi|_2^2\leqslant\frac{b}{4}|\psi|_4^4+\frac{|a|}{\alpha+2}|\psi|_{\alpha+2}^{\alpha+2}\qquad(7.5.12)$$

由 Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 不等式得

$$\begin{cases}|\psi|_4^4\leqslant C_1|\nabla\psi|_2^2|\psi|_2^2,\\|\psi|_{\alpha+2}^{\alpha+2}\leqslant C_2|\nabla\psi|_2^\alpha|\psi|_2^2\end{cases}\qquad(7.5.13)$$

联合式(7.5.12)、(7.5.13)得

$$\frac{\omega}{2}\leqslant C_1'T(\psi)+C_2'T(\psi)^{\frac{\alpha}{2}}$$

由此推得 $I>0$。

令 $\psi_\lambda(x)=\psi(\lambda^{-1/N}x)$，我们有

$$\psi\in\Sigma_\mu\Leftrightarrow\psi_\lambda\in\Sigma_{\lambda\mu}$$

因 $T(\psi_\lambda)=T(\psi)$，$\forall\lambda>0$。推出 $j(\mu)$ 在$[-\infty,0]$和$[0,+\infty]$上

必须为常数。令 $\mu_n\searrow 0,\varepsilon>0$，则存在 $\psi\in\Sigma_0$，使得

$$I<\frac{1}{2}T(\psi)<I+\varepsilon$$

取 $\tau_n>1$，使得 $V(\tau_n\psi)=\mu_n$，有

$$j(\mu_n)-I<\frac{1}{2}(\tau_n^2-1)T(\psi)+\varepsilon$$

因此得到

$$\limsup_{n\to\infty}(j(\mu_n)-I)\leqslant 0 \tag{7.5.14}$$

另一方面，令 $\psi_n\in\Sigma_{\mu n}$使得

$$\frac{1}{2}T(\psi_n)<j(\mu_n)+\varepsilon$$

取 $\tau_n<1$，使得 $\tau_n\psi_n\in\sum_0$，推出

$$I<\frac{1}{2}T(\tau_n\psi_n)=\frac{1}{2}\tau_n^2T(\psi_n)<j(\mu_n)+\varepsilon$$

因此可得

$$\liminf_{n\to\infty}(j(\mu_n)-I)\geqslant 0 \tag{7.5.15}$$

由式(7.5.14)和式(7.5.15)得

$$j(\mu)=I,\forall\mu\in[0,\infty]$$

相同原理，对于 $\mu_n\uparrow 0$，有

$$j(\mu)=I,\forall\mu\in[-\infty,0]$$

现设 $N=3$，令

$$I=j(1)=\inf\left\{\frac{1}{2}T(\psi)|\psi\in\sum_1\right\}$$

如前可从 Gagliado-Nirenberg-Sobolev 不等式推得 $I>0$，令 $\psi_\lambda(x)=\psi(\lambda^{-1/N}x)$，则有

$$\psi\in\sum_\mu\Leftrightarrow\psi_\lambda\in\sum_{\lambda\mu},\forall\lambda>0$$

$T(\psi_\lambda)=\lambda^{\frac{1}{3}}T(\psi)$，同样可得引理结论。

推论 7.5.2 令 $N\in\{2,3\}$，$j(\mu)$为式(7.5.8)、(7.5.9)所定义，则有如下的次可加性：

$$\begin{cases}\forall \mu > 0, \\ j(\mu) < j(\lambda) + j(\mu - \lambda), \forall \lambda \in [0, \mu]\end{cases} \tag{7.5.16}$$

如 $N=2$，则对一切 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$，(7.5.16)成立。极小化问题(7.5.6)、(7.5.7)有如下的等价形式：

引理 7.5.3 令 $N=2$，$(\alpha,a)\in\mathbf{R}_{\omega,h}$，则问题(7.5.6)等价于

$$\begin{cases}V(\varphi) = 0, \varphi \neq 0, \\ T(\varphi) = \min\{T(\psi) \mid V(\psi) \geqslant 0\}\end{cases}$$

令 $N=3$，$(\alpha,a)\in\mathscr{R}_{\alpha,h}$，$\mu_0>0$，则问题(7.5.7)等价于

$$\begin{cases}V(\varphi) = \mu_0, \varphi \neq 0, \\ T(\varphi) = \min\{T(\psi) \mid V(\psi) \geqslant \mu_0\}\end{cases}$$

证明 仅证 $N=2$，$N=3$ 类似，令

$$\bar{I} = \inf\{T(\psi) \mid V(\psi) \geqslant 0\}, I = \inf\{T(\psi) \mid V(\psi) = 0\}$$

显然有 $\bar{I}\leqslant I$。如 $\psi\in H^1$，$\psi\neq0$，使得 $V(\psi)\geqslant0$，可得 $0<\tau\leqslant1$，$V(\tau\psi)=0$，从 $I\leqslant T(\tau\psi)=\tau^2T(\psi)\leqslant T(\psi)$ 得到结论。

引理 7.5.4 设 $a(x):\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$ 为连续函数，且 $a(x)\to0$，$|x|\to\infty$，进一步设存在 $v\in H^1$，使得

$$J(v) = \int(|\nabla v|^2 - a|v|^2)\mathrm{d}x < 0$$

则存在 $\lambda>0$，和方程

$$-\Delta u + \lambda u = au$$

的一个正解 $u\in H^1\cap C$，如果 $w\in H^1$，且非负，$w\neq0$，使得 $-\Delta w+\nu w=aw$，$\nu\in\mathbf{R}$，则 $w=cu$，$c>0$，特别 $\nu=\lambda$。

证明 见文献[237]。

现证定理 7.5.1 和定理 7.5.2。

定理 7.5.1 的证明 设 $j(\mu)$ 为式(7.5.8)、(7.5.9)所定义，考虑极小问题(7.5.6)。分几步证明。

第一步，问题(7.5.6)具有一个解，设 $\{\psi_n\}$ 为极小化序列，令 $\varphi_n=\psi_n(\sqrt{\Lambda_n}x)$，其中 $\Lambda_n=|\psi_n|_2^2$。$\{\varphi_n\}$ 也是极小化序列，因为

$$T(\varphi_n)=T(\psi_n),V(\varphi_n)=\frac{1}{\Lambda_n}V(\psi_n)=0 \qquad (7.5.17)$$

$|\varphi_n|_2^2=\frac{1}{\Lambda_n}|\psi_n|_2^2=1$，因此，$\{\varphi_n\}$在 H^1 中有界，可设存在 $\varphi\in H^1$，使得

$$\varphi_n \to \varphi,\text{在 } H^1 \text{ 中弱收敛} \qquad (7.5.18)$$

现应用集中紧致原则，令

$$\rho_n=|\nabla\varphi_n|^2+|\varphi_n|^2$$

考察

$$\lim_{n\to+\infty}\int\rho_n=\lim_{n\to+\infty}\tilde{\lambda}_n=\tilde{\lambda}=2I+1>0$$

如果“消失”发生，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{(x,y)\in\mathbf{R}^2}\int_{(x,y)+B_R}\rho_n=0$，则令 n→∞，从引理7.5.1可得

$$B_1(|\varphi_n|^2)\to 0,|\varphi_n|_{\sigma+2}\to 0 \qquad (7.5.19)$$

因 $\varphi_n\in\Sigma_0$，从式(7.5.19)得

$$|\varphi_n|_2\to 0,n\to\infty$$

但这是不可能的，因$|\varphi_n|_2^2=1$，因此，“消失”不能发生。

其次，如果“二分法”产生，则对一切 $\varepsilon>0$，能找到 $R_0>0$，$\{y_n\}\subset\mathbf{R}^2$，$\mathbf{R}_n\to+\infty$，$n\to\infty$，$\varphi_n^1$，$\varphi_n^2$ 在 H^1中有界，使得

(i)supp $\varphi_n^1\subset B_{R_0}(y_n)$， (7.5.20)

(ii)supp $\varphi_n^2\subset\mathbf{R}^2\backslash B_{R_n}(y_n)$， (7.5.21)

(iii)$\|\varphi_n-\varphi_n^1-\varphi_n^2\|_{H^1}\leqslant\varepsilon$， (7.5.22)

(iv)$|\nabla\varphi_n|_2^2-|\nabla\varphi_n^1|_2^2-|\nabla\varphi_n^2|_2^2\geqslant-C\varepsilon$，($C>0$与 ε 无关)

(7.5.23)

因 $\varphi_n^k\neq 0$，$k=1,2$，从(7.5.23)推出，n 充分大

$$I+\varepsilon>\frac{1}{2}T(\varphi_n)\geqslant\frac{1}{2}T(\varphi_n^1)+\frac{1}{2}T(\varphi_n^2)-\frac{C}{2}\varepsilon\geqslant$$

$$j(V(\varphi_n^1))+j(V(\varphi_n^2))-\frac{C}{2}\varepsilon$$

从引理7.5.2可得 $I+\epsilon>2I-\frac{C}{2}\epsilon$，当 ϵ 充分小时，这是不可能的，因此"二分法"不产生，于是，只有"集中"产生，即存在序列 $\{y_n\}\subset$ $\mathbf{R}^2$，使得 $\forall\epsilon>0$，存在 $R_\epsilon\geqslant\frac{1}{\epsilon}$，使得

$$\int_{B_{R_\epsilon}(y_n)^c}\rho_n(x)\mathrm{d}x\leqslant\epsilon \tag{7.5.24}$$

其中 $B_{R_\epsilon}(y_n)^c=R^2\setminus B_{R_\epsilon}(y_n)$。令 $\tilde{\varphi}_n(\cdot)=\varphi_n(\cdot-y_n)$，则从式(7.5.18)有 $\tilde{\varphi}_n\to\tilde{\varphi}$在 H^1中弱收敛。

进一步，从式(7.5.24)和 Sobolev 不等式有

$$\int_{B_{R_\epsilon}^c}|\tilde{\varphi}|^p\leqslant\epsilon^{\frac{p}{2}},\forall p\in[2,\infty] \tag{7.5.25}$$

其中 $B_{R_\epsilon}=B_{R_\epsilon}(0)$。令

$$V_\Omega(\psi)=\int_\Omega|\psi|^2\{\frac{b}{4}E_1(|\psi|^2)-\frac{a}{\alpha+2}|\psi|^\alpha-\frac{\omega}{2}\}$$

从式(7.5.25)可得

$$|V_{B_{R_\epsilon}^c}(\tilde{\varphi}_n)|\leqslant\delta(\epsilon)$$

其中 $\delta(\epsilon)\to0,\epsilon\to0$。

因单射 $H^1(B_{R_\epsilon})\subset L^2(B_{R_\epsilon})$是紧的，$q\in[1,\infty]$，有

$$V_{B_{R_\epsilon}}(\tilde{\varphi}_n)\to V_{B_{R_\epsilon}}(\tilde{\varphi}),n\to\infty \tag{7.5.26}$$

进一步，$0=V(\tilde{\varphi}_n)=V_{B_{R_\epsilon}}(\tilde{\varphi}_n)+V_{B_{R_\epsilon}^c}(\tilde{\varphi}_n)$，从式(3.25)得

$$|V_{B_{R_\epsilon}}(\tilde{\varphi}_n)|<\delta(\epsilon) \tag{7.5.27}$$

式(7.5.27)中令 $n\to\infty$，由式(7.5.26)有

$$|V_{B_{R_\epsilon}}(\tilde{\varphi})|<\delta(\epsilon)$$

令 $\epsilon\to0$，可得 $\tilde{\varphi}\in\Sigma_0$。由对 T 的半连续性即得结论。

第二步，证明 $\mathscr{K}$ 是非空的。

设 φ 为(7.5.1)的解，则存在 Lagrange 乘子 λ，使得

$$-\Delta\varphi=\lambda(bE_1(|\varphi|^2)\varphi-a|\varphi|^\alpha\varphi-\omega\varphi)\qquad(7.5.28)$$

为了证明 $\lambda>0$，令 $\Phi\in H^1$，使得 $<V'(\varphi);\Phi>>0$，其中 $<;>$ 表示 $H^{-1}-H^1$ 的对偶对。因 $T,V\in C^1(H^1;\mathbf{R})$，可得

$$V(\varphi+t\Phi)=V(\varphi)+\int_0^t<V'(\varphi+s\Phi);\Phi>\mathrm{d}s$$

$$T(\varphi+t\Phi)=T(\varphi)+t\lambda<V'(\varphi);\Phi>+\frac{t^2}{2}|\nabla\Phi|_2^2$$

(7.5.29)

如 $\lambda<0$，则从式(7.5.29)可得，当 t 充分小时，$V(\varphi+t\Phi)>0$，$T(\varphi+t\Phi)<T(\varphi)$。它和引理7.5.3矛盾，因此 $\lambda>0$。令 $\varphi_\lambda(x)=\varphi(x/\sqrt{\lambda})$，推出 $\varphi_\lambda\in\mathscr{K}$。

第三步，证明(ii)。设 φ 为式(7.5.6)的解，$\psi\in\mathscr{K}$，从命题7.5.1有 $\Psi\in\Sigma_0$。因此 $S(\varphi)\leqslant S(\psi)$，$\varphi\in\mathscr{G}$。反之，设 $\varphi\in\mathscr{G}$，则 $S(\varphi)\leqslant S(\psi)$，$\forall\psi\in S$。再利用命题7.5.1，推出 $V(\varphi)=V(\psi)=0$，推出 φ 为式(7.5.6)的解。

第四步，证明(i)。首先注意到从第一步和第三步可得 $\mathscr{G}\neq\emptyset$。从文献[237]中的引理7.3.7推出结论。

定理7.5.2的证明 设 $j(\mu)$ 为式(7.5.8)、(7.5.9)所定义，考虑极小问题

$$\begin{cases}\varphi\in\Sigma_\mu,\mu>0,\\ T(\varphi)=\min\{T(\psi)\cdot\psi\in\Sigma_\mu\}\end{cases}\qquad(7.5.30)$$

分几步证明：

第一步，问题(7.5.30)具有一个解。令 $\{\varphi_n\}$ 为(7.5.30)的极小化序列，则 $\{\varphi_n\}$ 在 H^1 中有界。事实上，因 $\varphi_n\in\Sigma_\mu$，我们有

$$\frac{\omega}{2}|\varphi_n|_2^2+\mu\leqslant\frac{b}{4}B_1(|\varphi_n|^2)+\frac{|a|}{\alpha+2}|\varphi_n|_{\alpha+2}^{\alpha+2}\quad(7.5.31)$$

由 Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 不等式和

$$B_j(\psi)=\int E_j(\psi)\bar{\psi}\leqslant|\psi|_2^2$$

可得

$$\frac{\omega}{2}|\varphi_n|_2^2 + \mu \leqslant C_1|\nabla\varphi_n|_2^3|\varphi_n|_2 + C_2|\nabla\varphi_n|^{3a/2}|\varphi_n|_2^{2-a/2}$$

(7.5.32)

因此$\{\nabla\varphi_n\}$在L^2中有界，式(7.5.32)推出$\{\varphi_n\}$在H^1中有界。再取子序列，则存在$\varphi\in H^1$，使得

$$\varphi_n \to \varphi, \text{在 } H^1 \text{ 中弱收敛} \qquad (7.5.33)$$

现应用 Lions P. L. 的集中紧致原理，对于

$$\rho_n = |\nabla\varphi_n|^2 + |\varphi_n|^2$$

不失一般性，可设

$$\lim_{n\to+\infty}\int\rho_n = \lim_{n\to-\infty}\tilde{\lambda}_n = \tilde{\lambda}$$

且 $\tilde{\lambda}\geqslant 2j(\mu)=2\mu^{\frac{1}{3}}I>0$(见引理7.5.2)。如果“消失”发生，则由引理7.5.1有

$$B_1(|\varphi_n|^2)\to 0, |\varphi_n|_{a+2}^{a+2}\to 0$$

但这和(7.5.31)矛盾。因而，“消失”不可能发生。其次，如果“二分法”发生，则对一切$\varepsilon>0$，能找到$\{y_n\}\subset\mathbf{R}^3$，$R_0>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}R_n=\infty$和$\varphi_n^1,\varphi_n^2\neq 0$在$H^1$中有界，满足式(7.5.20)～(7.5.23)，从式(7.5.22)有

$$\|\varphi_n^1\|_{H^1} + \|\varphi_n^2\|_{H^1} \geqslant \|\varphi_n\|_{H^1} - \varepsilon \qquad (7.5.34)$$

取子序列，设

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n^k\|_{H^1}^2 = \tilde{\lambda}_k(\varepsilon) > 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}V(\varphi_n^k) = \lambda_k(\varepsilon)$$

从式(7.5.34)有

$$\tilde{\lambda}_2(\varepsilon) \geqslant \frac{1}{2}\tilde{\lambda} > 0 \qquad (7.5.35)$$

从式(7.5.20)、(7.5.21)，$\bar{E}_j(\psi)=E_j(\bar{\psi})$，$B_j(\psi)=\int E_j(\psi)\,\bar{\psi}\leqslant|\psi|_2^2$可得

$$B_1(|\varphi_n^1+\varphi_n^2|^2)=B_1(|\varphi_n^1|^2)+B_1(|\varphi_n^2|^2)+2(|\varphi_n^2|^2;E_1(|\varphi_n^1|^2))_2$$

对充分大的 n,有

$$|V(\varphi_n)-V(\varphi_n^1)-V(\varphi_n^2)|\leqslant|V(\varphi_n)-V(\varphi_n^1+\varphi_n^2)|+\frac{b}{2}|(|\varphi_n^2|^2;E_1(|\varphi_n^1|^2))_2|$$

因 $V\in C^1(H^1,\mathbf{R})$可写

$$V(\varphi)-V(\psi)=\int_0^1<V'(t\varphi+(1-t)\psi),\varphi-\psi>\mathrm{d}t$$

于是可得

$$|V(\varphi_n)-V(\varphi_n^1+\varphi_n^2)|\leqslant c(\|\varphi_n\|_{H^1})\|\varphi_n-\varphi_n^1-\varphi_n^2\|_{H^1}\tag{7.5.36}$$

另一方面,置

$$\tilde{\varphi}_n^k(\cdot)=\varphi_n^k(\cdot-y_n),k=1,2$$

从 $E_j(\psi)$的性质可推出

$$(|\varphi_n^2|^2;E_1(|\varphi_n^1|^2))_2=\int_{B_{R_n}^C}|\tilde{\varphi}_n^2|^2E_1(|\tilde{\varphi}_n^1|^2)$$

因 $H^1(B_{R_0})\subset L^q(B_{R_0})$是紧的,$\forall q\in[2,6]$,和$\{\varphi_n^1\}$在 H^1中有界,能推出在 $L^4(B_{R_0})$中,$\tilde{\varphi}_n^1\to\varphi^1$,其中 $\varphi^1\in H_0^1(B_{R_0})$。特别

$$\lim_{n\to\infty}E_1(|\tilde{\varphi}_n^1|^2)=E_1(|\varphi^1|^2)\text{ 在 }L^2(B_{R_0})\tag{7.5.37}$$

令 $R_n\to\infty$,从式(7.5.20)、(7.5.21)和 Lebesgue 收敛定理,可得

$$(|\varphi_n^2|^2;E_1(|\varphi_n^1|^2))_2\to 0,n\to\infty\tag{7.5.38}$$

由式(7.5.36)、(7.5.38),当 n 充分大时有

$$|V(\varphi_n)-V(\varphi_n^1)-V(\varphi_n^2)|\leqslant\delta(\varepsilon)\tag{7.5.39}$$

其中 $\delta(\varepsilon)\to0,\varepsilon\to0$。在式(7.5.39)中令 $n\to\infty$得

$$|\mu-\lambda_1(\varepsilon)-\lambda_2(\varepsilon)|\leqslant\delta(\varepsilon)\tag{7.5.40}$$

现 $\lambda_1(\varepsilon)$(或 $\lambda_2(\varepsilon)$)有三种可能:

$\lambda_1(\varepsilon)\to0$或者 $\lambda_1(\varepsilon)\leqslant-\lambda_1<0$或者 $\lambda_1(\varepsilon)\geqslant\lambda_1>0$

设第一种可能发生，则存在常数 $C_1>0$，它与 n,ε 无关，使得 $|\nabla\varphi_n^1|_2^2\geqslant 2C_1$，可得

$$j(\mu)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}T(\varphi_n)\geqslant C_1+\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{2}T(\varphi_n^2)-C\varepsilon\geqslant$$

$$c_1+j(\lambda_2(\varepsilon))-C\varepsilon$$

令 $\varepsilon\to 0$，则上式与式(7.5.40)矛盾。

第二种可能不会发生，否则从式(7.5.23)有

$$j(\mu)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}T(\varphi_n)\geqslant j(\lambda_2(\varepsilon))-C\varepsilon$$

从式(7.5.40)得到 $\lambda_2(\varepsilon)\geqslant\mu+\lambda_1-\delta(\varepsilon)$。因 j 为单调上升函数，可得

$$j(\mu)\geqslant j(\mu+\lambda_1-\delta(\varepsilon))-C\varepsilon$$

令 $\varepsilon\to 0$即得矛盾。第三种可能也不会发生，否则，从(7.5.40)得

$$j(\mu)\geqslant j(\lambda)+j(\mu-\lambda)$$

它和推论7.5.2矛盾。结论："二分法"不成立，因此，只有"紧致性"成立。由式(7.5.27)

$$|V(\tilde{\varphi}_n)-\mu|<\delta(\varepsilon)$$

可如同定理7.5.1的证明。

第二步，证明 $\mathscr{H}$ 非空。

设 φ 为式(7.5.30)的解，则存在 Lagrange 乘子 λ_μ，使得

$$-\Delta\varphi=\lambda_\mu(bE_1(|\varphi|^2)\varphi-a|\varphi|^\alpha\varphi-\omega\varphi)$$

为了证明 $\lambda_\mu>0$，可如同定理7.5.1的证明。事实上，设 $\Phi\in H^1$ 使得 $\langle V'(\varphi),\Phi\rangle>0$，则可得

$$V(\varphi+t\Phi)=V(\varphi)+\int_0^t\langle V'(\varphi+s\Phi);\Phi\rangle\mathrm{d}s,$$

$$T(\varphi+t\Phi)=T(\varphi)+t\lambda_\mu\langle V'(\varphi);\Phi\rangle+\frac{t^2}{2}|\nabla\Phi|_2^2$$

如果 $\lambda_\mu<0$，可得当 t 充分小时，$V(\varphi+t\Phi)>\mu$，$T(\varphi+t\Phi)<T(\varphi)$。它和引理7.5.3矛盾，因此 $\lambda_\mu>0$。从推论7.5.1(i)和引理7.5.2可得

$$\lambda_{\mu}=\frac{1}{j}I\mu^{-\frac{2}{3}}$$

则我们可选取 $\mu_0>0$,使得 $\lambda_{\mu_0}=1$,从(7.5.41)可推出 $\varphi\in\mathscr{K}$。至于第三步和第四步的结论,可如同定理7.5.1所证。

现考虑 DS 方程驻波的稳定性。设有如下形式的非线性 Schrodinger 方程

$$\mathrm{i}u_t+\Delta u+a|u|^{p-1}u+bE_1(|u|^2)u=0,t\geqslant 0,x\in\mathbf{R}^n \tag{7.5.41}$$

其中 $a,b\geqslant 0,1<p<1+4/(n-2)$,$n=2$或$3$,$E_1$为奇性积分算子,具有符号 $\sigma_1(\xi)=\xi_1^2/|\xi|^2,\xi\in\mathbf{R}^n$。(7.5.41)的驻波解为

$$u(x,t)=\mathrm{e}^{i\omega t}\varphi_{\omega}(x) \tag{7.5.42}$$

其中 $\omega>0,\varphi(x)$为如下定常问题的基态解

$$\begin{cases}-\Delta\psi+\omega\psi-a|\psi|^{p-1}\psi-bE_1(|\psi|^2)\psi=0,x\in\mathbf{R}^n,\\ \psi\in H^1(\mathbf{R}),\psi\neq 0\end{cases} \tag{7.5.43}$$

引入一些记号:

$$S_{\omega}(v)=\frac{1}{2}|\nabla v|_2^2+\frac{\omega}{2}|v|_2^2-\frac{a}{p+1}|v|_{p+1}^{p+1}-\frac{b}{4}\int|v|^2E_1(|v|^2)\mathrm{d}x$$

$\mathscr{K}_{\omega}$=式(7.5.43)的解集$=\{\psi\in H^1(\mathbf{R}^n):S'_{\omega}(\psi)=0,\psi\neq 0\}$,

$\mathscr{G}_{\omega}$=式(7.5.43)的基态解集$=\{\varphi\in\mathscr{K}_{\omega}:S_{\omega}(\varphi)\leqslant S_{\omega}(\psi),\forall\psi\in\mathscr{K}_{\omega}\}$。

假设(H) 存在 $\varphi_{\omega}\in\mathscr{G}_{\omega}$,使得 $\omega\to\varphi_{\omega}\in C^1:(0,\infty)\to H^1(\mathbf{R}^n)$。更进一步,$n=2$时,设

$$|\varphi|_2=|\varphi_{\omega}|_2,\forall\varphi\in\mathscr{G}_{\omega} \tag{7.5.44}$$

定义7.5.1 我们说驻波 $u_{\omega}(t)=\mathrm{e}^{i\omega t}\varphi_{\omega}$ 是稳定的,即对任何 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,具有如下的性质:如果 $u_0\in H^1(\mathbf{R}^n)$,和(7.5.4)的具初值 $u(0)=u_0$的解 $u(t)$满足$\|u_0-\varphi_{\omega}\|_{H^1}<\delta$,则有

$$\sup_{0\leqslant t<\omega}\inf_{\varphi\in\mathscr{G}_\omega}\|u(t)-\varphi\|_{H^1}<\varepsilon$$

否则，u_ω 是不稳定的。

定理7.5.3 在假设(H)下，如果 $a,b>0,1<p<1+4/n$，$n=2$或3，则存在序列(ω_k)，使得 $\omega_k>0,\omega_k\to0,\varphi_{\omega_k}$是稳定的。

为证明定理7.5.3，我们引入定理7.5.4，并在最后证明它。

定理7.5.4 设 $n=2$或3，(H)成立，令 $d(\omega)=S_\omega(\varphi_\omega),0<\omega<\infty$。如果 $d''(\omega_0)>0$，则 φ_{ω_0}是稳定的。

在 $H^1(\mathbf{R}^n)$上定义如下泛函：

$$T(v)=|\nabla v|_2^2,$$

$$V_\omega(v)=\frac{a}{p+1}|v|_{p+1}^{p+1}+\frac{b}{4}\int|v|^2E_1(|v|^2)\mathrm{d}x-\frac{\omega}{2}|v|_2^2,$$

$$P_\omega(v)=(\frac{1}{2}-\frac{1}{n})T(v)-V_\omega(v),$$

$$\varepsilon(v)=\frac{1}{2}|\nabla v|_2^2-\frac{a}{p+1}|v|_{p+1}^{p+1}-\frac{b}{4}\int|v|^2E_1(|v|^2)\mathrm{d}x$$

注意到

$$S_\omega(v)=\frac{1}{2}T(v)-V_\omega(v)=\varepsilon(v)+\frac{\omega}{2}|v|_2^2\quad(7.5.45)$$

$$P_\omega(v)=S_\omega(v)-\frac{1}{n}T(v)\quad(7.5.46)$$

引理7.5.5 设 $n=2$或3，$\mu_\omega=(\frac{1}{2}-\frac{1}{n})T(\varphi_\omega)$，则有

(1) $P_\omega(\psi)=0,\forall\psi\in\mathscr{K}_\omega$，(Pohozaev 恒等式)；

(2) $d(\omega)=\left(\frac{1}{n}\right)T(\varphi_\omega)=\inf\{\left(\frac{1}{n}\right)T(\psi):\psi\in H^1(\mathbf{R}^n),\psi\neq0,$
$V_\omega(\psi)\geqslant\mu_\omega\}$；

(3) $d'(\omega)=\frac{1}{2}|\varphi_\omega|_2^2$；

(4) $d(\omega)=\inf\{\left(\frac{1}{n}\right)T(\psi):\psi\in H^1(\mathbf{R}^n),\psi\neq0,P_\omega(\psi)\leqslant0\}$

证明 对 $\lambda>0$，定义 $\psi^\lambda(x)=\psi(x/\lambda)$。

(1)取 $\psi\in\mathscr{K}_\omega$，则有

$$P_\omega(\psi) = \frac{1}{n}\partial_\lambda S_\omega(\psi^\lambda)|_{\lambda=1} = \frac{1}{n} < S'_\omega(\psi), \partial_\lambda \psi^\lambda > = 0$$

(2)见文献[240,引理3.6]。

(3)因 $S_\omega(\varphi_\omega)=\varepsilon(\varphi_\omega)+(\frac{\omega}{2})|\varphi_\omega|_2^2$,我们有

$$d'(\omega) = < S'_\omega(\varphi_\omega), \partial_\omega \varphi_\omega > + \frac{1}{2}|\varphi_\omega|_2^2 = \frac{1}{2}|\varphi_\omega|_2^2$$

(4)令 $\tilde{d}(\omega)=\inf\{(\frac{1}{n})T(\psi);\psi\in H^1(\mathbf{R}^n),\psi\neq 0,P_\omega(\psi)\leqslant 0\}$,

从引理7.5.5(1),我们有 $\tilde{d}(\omega)\leqslant(\frac{1}{n})T(\varphi_\omega)=d(\omega)$。反之,对 $\psi\in H^1(\mathbf{R}^n)$,使得 $\psi\neq 0,P_\omega(\psi)\leqslant 0$,令 $\lambda=\{T(\varphi_\omega)/T(\psi)\}^{\frac{1}{n}}$,则有

$$V_\omega(\psi^\lambda) = \lambda^n V_\omega(\psi) \geqslant (\frac{1}{2} - \frac{1}{n})\lambda^n T(\psi) = \mu_\omega$$

从引理7.5.5(2),有

$$d(\omega) \leqslant \frac{1}{n}T(\psi^\lambda) = \frac{1}{n}\lambda^{n-2}T(\psi) =$$

$$(\frac{1}{n}T(\varphi_\omega)/\frac{1}{n}T(\psi))^{1-2/n}\frac{1}{n}T(\psi)$$

它推出 $d(\omega)\leqslant\frac{1}{n}T(\psi)$,因此 $d(\omega)\leqslant\tilde{d}(\omega)$。

定理7.5.3的证明 令 $\tilde{\varphi}_\omega$ 为如下问题的基态解

$$\begin{cases} -\Delta\psi + \omega\psi - a|\psi|^{p-1}\psi = 0, x \in \mathbf{R}^n, \\ \psi \in H^1(\mathbf{R}), \psi \neq 0 \end{cases} \tag{7.5.47}$$

因

$$\int |v|^2 E_1(|v|^2)\mathrm{d}x = \int \sigma_1(\xi)|\mathscr{F}(|v|^2)|^2 d\xi \geqslant 0, \forall v \in H^1(\mathbf{R}^n)$$

其中 $\mathscr{F}$ 表示在 $\mathbf{R}^n$ 上的傅氏变换,我们有

$$P_\omega(\tilde{\varphi}_\omega) \leqslant (\frac{1}{2} - \frac{1}{n})T(\tilde{\varphi}_\omega) + \frac{\omega}{2}|\tilde{\varphi}_\omega|_2^2 - \frac{a}{p+1}|\tilde{\varphi}_\omega|_{p+1}^{p+1} = 0$$

这里,我们用到了对于方程(7.5.47)的 Pohozaev 恒等式,从引理7.5.5(4),有 $d(\omega)\leqslant(\frac{1}{n})T(\tilde{\varphi}_\omega)$,$\forall\omega\in(0,\infty)$。进一步,因 $\tilde{\varphi}_\omega(x)=$

$\omega^{1/(p-1)}\tilde{\varphi}_1(\sqrt{\omega}x)$，有 $T(\tilde{\varphi}_\omega)=\omega^\alpha T(\tilde{\varphi}_1)$，其中 $\alpha=[2/(p-1)]-[(n-2)/2]>1$，因此，有

$$d(\omega)\leqslant\frac{1}{n}\omega^\alpha T(\tilde{\varphi}_1),\alpha>1,\forall\omega\in(0,\infty)\quad(7.5.48)$$

这里，如果 $d'''(\omega)\leqslant0,\omega\in(0,\hat{\omega}),\hat{\omega}>0$，则 $d'(\omega)\geqslant d'(\hat{\omega}),\omega\in(0,\hat{\omega})$。更进一步，从式(7.5.48)推出$\lim\limits_{\omega\to0}d(\omega)=0$，则有

$$d(\omega)=\int_0^\omega d'(s)\mathrm{d}s\geqslant d'(\hat{\omega})\omega,\forall\omega\in(0,\hat{\omega})\quad(7.5.49)$$

注意到从引理7.5.5(3)知 $d'(\hat{\omega})>0$，因此(7.5.49)和(7.5.48)矛盾，于是存在一个序列$\{\omega_k\}$，使得 $\omega_k>0,\omega_k\to0,d''(\omega_k)>0$，因此定理7.5.3由定理7.5.4的结论而得到证明。

现证明定理7.5.4。设 $n=2$或3。

引理7.5.6 集合

$$\mathscr{A}_\omega^+\overset{\text{def}}{=}\{v\in H^1(\mathbf{R}^n):S_\omega(v)<d(\omega),P_\omega(v)>0\}=$$

$$\{v\in H^1(\mathbf{R}^n):S_\omega(v)<d(\omega),\frac{1}{n}T(v)<d(\omega),v\neq0\},$$

$$\mathscr{A}_\omega^-\overset{\text{def}}{=}\{v\in H^1(\mathbf{R}^n):S_\omega(v)<d(\omega),P_\omega(v)<0\}=$$

$$\{v\in H^1(\mathbf{R}^n):S_\omega(v)<d(\omega),\frac{1}{n}T(v)>d(\omega)\}$$

在流(7.5.41)下是不变的。

证明 设 $u_0\in\mathscr{A}_\omega^\pm$，$u(t)$为方程(7.5.41)具初值 $u(0)=u_0$的解，则从$|u(t)|_2=|u_0|_2,\varepsilon(u(t))=\varepsilon(u_0)$，有 $S_\omega(u(t))=S_\omega(u_0)<d(\omega)$，因此从式(7.5.46)和引理7.5.5(4)，有 $P_\omega(u(t))\neq0$。因函数$t\to P_\omega(u(t))$是连续的，当 $u_0\in\mathscr{A}_\omega^+$ 时，$P_\omega(u(t))>0$，当 $u_0\in\mathscr{A}_\omega^-$时，$P_\omega(u(t))<0$，这就证明集合 $\mathscr{A}_\omega^\pm$ 在流(7.5.41)下是不变的。

引理7.5.7 如 $d''(\omega_0)>0$，则存在 $\varepsilon_0>0$具有如下性质：对任何 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$，则存在 $\delta>0$，使得如果 $u_0\in H^1(\mathbf{R}^n)$，$\|u_0-\varphi_{\omega_0}\|_{H^1}<\delta$，且 $u(t)$为(7.5.41)具初值 $u(0)=u_0$的解，则

$$d(\omega_0-\varepsilon)<(1/n)T(u(t))<d(\omega_0+\varepsilon),\forall t\geqslant0$$

证明 固定 $\epsilon>0$，令 $\omega_+=\omega_0+\epsilon$，$\omega_-=\omega_0-\epsilon$。从引理7.5.5(3)推出 $d(\omega_-)<d(\omega_0)<d(\omega_+)$，因 $d(\omega_0)=(\frac{1}{n})T(\varphi_{\omega_0})=(\frac{1}{n})T(u_0)+O(\delta)$。如取 δ 充分小，则有 $d(\omega_-)<(\frac{1}{n})T(u_0)<d(\omega_+)$。由引理7.5.6，要证明引理成立，充分证明 $S_{\omega_\pm}(u_0)<d(\omega_\pm)$即可。

$$S_{\omega_\pm}(u_0)=S_{\omega_\pm}(\varphi_{\omega_0})-O(\delta)=S_{\omega_0}(\varphi_{\omega_0})\pm\frac{\varepsilon}{2}|\varphi_{\omega_0}|_2^2+O(\delta)=d(\omega_0)+(\omega_\pm-\omega_0)d'(\omega_0)+O(\delta)$$

这里我们用到了 $d(\omega)$的定义和引理7.5.5(3)。另一方面，在 ω_0处作 Taylor 展开

$$d(\omega_\pm)=d(\omega_0)+(\omega_\pm-\omega_0)d'(\omega_0)+\frac{1}{2}(\omega_\pm-\omega_0)^2d''(\omega_1)$$

其中 $\omega_0\leqslant\omega_1\leqslant\omega_\pm$。由假设 $d''(\omega_0)>0$，如 ϵ 充分小，则有$d''(\omega_1)>0$，因此如取 δ 充分小，我们有 $S_{\omega_\pm}(u_0)<d(\omega_\pm)$。

引理7.5.8 设假设(H)成立，序列$\{v_k\}\subset H^1(\mathbf{R}^n)$满足

$$\frac{1}{n}T(v_k)\to d(\omega) \tag{7.5.50}$$

$$S_\omega(v_k)\to S_\omega(\varphi_\omega) \tag{7.5.51}$$

$$|v_k|_2\to|\varphi_\omega|_2 \tag{7.5.52}$$

则存在$\{y_k\}\subset\mathbf{R}^n$，使得$\{\tau_{y_k}v_k\}$具有一个子序列$\{\tau_{y_k}v_k\}$满足

$$\tau_{y_k}v_k\to\varphi，在 H^1(\mathbf{R}^n)，\varphi\in\mathscr{G}_\omega$$

证明 由假设式(7.5.50)～(7.5.52)，如同文献[240]中定理3.1，定理3.2的证明方法，能证明存在$\{y_k\}\subset\mathbf{R}^n$，使得

$$\tau_{y_k}v_k\to\varphi 在 H^1(\mathbf{R}^n) \tag{7.5.53}$$

其中 φ 为引理7.5.5(2)中极小问题的一个极小。当 $n=2$时，在式(7.5.53)中的 φ，存在 $\lambda>0$，使得 $\varphi^\lambda\in\mathscr{G}_\omega$，其中 $\varphi^\lambda(x)=\varphi(x/\lambda)$。从式(7.5.52)、(7.5.53)和 φ^λ的定义有

$$|\varphi^\lambda|_2=\lambda|\varphi|_2=\lambda|\varphi_\omega|_2 \tag{7.5.54}$$

另一方面，从假设(H)的式(7.5.44)有

$$|\varphi^{\lambda}|_2 = |\varphi_\omega|_2 \tag{7.5.55}$$

从(7.5.54)(7.5.55),有 $\lambda=1$,因此 $\varphi\in\mathscr{G}_\omega$。证毕。

定理7.5.4的证明 用反证法。如 φ_{ω_0} 是不稳定的,则存在初值序列 $u_k(0)$ 和 $\varepsilon>0$,使得

$$u_k(0)\to\varphi_{\omega_0} \text{ 在 } H^1(\mathbf{R}^n),$$

$$\sup_{0\leqslant t<\infty}\inf_{\varphi\in\mathscr{G}_{\omega_0}}\|u_k(t)-\varphi\|_{H^1}\geqslant\varepsilon_0$$

其中 $u_k(t)$ 为式(7.5.41)具初值 $u_k(0)$ 的解,由对 t 的连续性,能选取第一个时刻 $t_k>0$,使得

$$\inf_{\varphi\in\mathscr{G}_{\omega_0}}\|u_k(t_k)-\varphi\|_{H^1}=\varepsilon_0 \tag{7.5.56}$$

其中解 u_k 至少在$[0,t_k]$上存在,由守恒律 $|u(t)|_2=|u_0|_2$,$\varepsilon(u(t))=\varepsilon(u_0)$,有

$$S_{\omega_0}(u_k(t_k))=S_{\omega_0}(u_k(0))\to S_{\omega_0}(\varphi_{\omega_0}),$$

$$|u_k(t_k)|_2=|u_k(0)|_2\to|\varphi_{\omega_0}|_2$$

由引理7.5.7,有

$$\frac{1}{n}T(u_k(t_k))\to d(\omega_0)$$

因此由引理7.5.8,存在 $\{y_{k'}\}\subset\mathbf{R}^n$,和它的子序列(仍记为 $\{\tau_{y_{k'}}u_k(t_k)\}$,使得

$$\tau_{y_{k'}}u_k(t_k)\to\varphi_0 \text{ 在 } H^1(\mathbf{R}^n),\varphi_0\in\mathscr{G}_{\omega_0}$$

它和式(7.5.16)矛盾,因而,φ_{ω_0} 是稳定的。

7.6 非线性 Schrödinger-Kadomtsev-Petviashvili 方程

考虑如下耦合非线性 Schrödinger-Kadomtsev-Petviashvili 方程

$$\begin{cases} \mathrm{i}\varepsilon_t + \Delta\varepsilon - \beta n\varepsilon = 0, \\ n_t + n_{xxx} + n^p n_x - m_y = -\alpha(|\varepsilon|^2)_x, \\ m_x = n_y, (x,y) \in \mathbf{R}^2, t > 0 \end{cases} \tag{7.6.1}$$

其中 α,β 为常数。考虑式(7.6.1)如下形式的孤立波解

$$\begin{cases} n = n(x-ct,y), \\ m = m(x-ct,y), \\ \varepsilon = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}c(x-ct)}\varphi(x-ct,y) \end{cases} \tag{7.6.2}$$

此处 $c>0$和 $\omega\in\mathbf{R}$。我们要证明，如果 $p\geqslant4,\beta\neq0$且 α,β,ω 满足如下条件：

$$\alpha\beta\omega < 0, \alpha\beta[(p-4)\beta + 3(p+2)] \geqslant 0,$$
$$\alpha\beta[(p-4)\beta + 7(p+2)] \geqslant 0$$

则式(7.6.1)不存在孤立波。然而，当 $p=1,\omega>0,\beta=-2\alpha$ 且$-\alpha>0$，则式(7.6.1)至少存在一个孤立波。

先证明孤立波的不存在性。将式(7.6.2)代入式(7.6.1)得(n,m,φ)满足方程

$$\begin{cases} -\omega\varphi + \Delta\varphi - \beta n\varphi = 0, \\ -cn_x + n_{xxx} - n^p n_x - m_y = -\alpha(|\varphi|^2)_x, \\ m_x = n_y \end{cases} \tag{7.6.3}$$

或令 $n=\partial_x\psi$，则有

$$\begin{cases} -\omega\varphi + \Delta\varphi - \beta\psi_x\varphi = 0, \\ -c\psi_{xx} + \psi_{xxxx} + (\psi_x)^p\psi_{xx} - \psi_{yy} = -\alpha(|\psi|^2)_x \end{cases} \tag{7.6.4}$$

定理7.6.1 如果 $p\geqslant4,\beta\neq0$且 ω,α,β 满足如下条件：

$$\alpha\beta\omega < 0, \alpha\beta[(p-4)\beta + 3(p+2)] \geqslant 0,$$
$$\alpha\beta[(p-4)\beta + 7(p+2)] \geqslant 0 \tag{7.6.5}$$

则式(7.6.1)不存在孤立波。

证明 利用 Pohozaev 恒等式证明。式(7.6.3)分别乘以 xn 和 ym，在 $\mathbf{R}^2$上积分得

$$-\frac{1}{2}c\int n^2 - \frac{3}{2}\int(n_x)^2 + \frac{1}{p+2}\int n^{p+2} +$$

$$\alpha\int(xn)_x|\varphi|^2+\frac{1}{2}\int m^2=0 \qquad (7.6.6)$$

$$\frac{1}{2}c\int n^2-\frac{1}{2}\int m^2+\frac{1}{2}\int(n_x)^2-\frac{1}{(p+1)(p+2)}\int n^{p+2}+$$
$$\alpha\int(yn)_y|\varphi|^2-\alpha\int n|\varphi|^2=0 \qquad (7.6.7)$$

式(7.6.4)乘以ψ在Ω上积分，并注意到$n=\partial_x\psi,m=\partial_y\psi$，得

$$-c\int n^2-\int m^2-\int(n_x)^2+\frac{1}{p+1}\int n^{p+2}+\alpha\int n|\varphi|^2=0$$
$$(7.6.8)$$

式(7.6.7)～(7.6.6)得

$$c\int n^2-\int m^2+2\int(n_x)^2-\frac{1}{p+1}\int n^{p+2}-$$
$$\alpha\int[(xn)_x-(yn)_y]|\varphi|^2-\alpha\int n|\varphi|^2=0$$
$$(7.6.9)$$

式(7.6.8)+式(7.6.9)得

$$-2\int m^2+\int(n_x)^2-\alpha\int[(xn)_x-(yn)_y]|\varphi|^2=0$$
$$(7.6.10)$$

将式(7.6.10)分别代入式(7.6.8)和式(7.6.6)得

$$-c\int n^2-3\int m^2+\frac{1}{p+1}\int n^{p+2}-$$
$$\alpha\int[(xn)_x-(yn)_y]|\varphi|^2+\alpha\int n|\varphi|^2=0 \qquad (7.6.11)$$

$$-\frac{1}{2}c\int n^2-\frac{5}{2}\int m^2+\frac{1}{p+2}\int n^{p+2}+$$
$$\frac{3}{2}\alpha\int(yn)_y|\varphi|^2-\frac{1}{2}\alpha\int(xn)_x|\varphi|^2=0 \qquad (7.6.12)$$

式(7.6.4)分别乘以$x\varphi_x$和$y\varphi_y$得

$$\beta\int(xn)_x|\varphi|^2=-\omega\int|\varphi|^2+\int|\varphi_x|^2-\int|\varphi_y|^2 \quad (7.6.13)$$

$$\beta\int(yn)_y|\varphi|^2=-\omega\int|\varphi|^2-\int|\varphi_x|^2+\int|\varphi_y|^2 \quad (7.6.14)$$

将式(7.6.13)和式(7.6.14)分别代入式(7.6.11)、(7.6.12)得

$$-c\int n^2-3\int m^2+\frac{1}{p+1}\int n^{p+2}-$$

$$-2\frac{\alpha}{\beta}\int[|\varphi_x|^2-|\varphi_y|^2]-\alpha\int n|\varphi|^2=0$$

$$(7.6.15)$$

$$-\frac{1}{2}c\int n^2-\frac{5}{2}\int m^2+\frac{1}{p+2}\int n^{p+2}-$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\omega\int|\varphi|^2-2\frac{\alpha}{\beta}\int[|\varphi_x|^2-|\varphi_y|^2]=0 \quad (7.6.16)$$

注意到

$$-\beta\int n|\varphi|^2=\omega\int|\varphi|^2+\int|\nabla\varphi|^2$$

式(7.6.16)乘以$\frac{6}{5}$,代入式(7.6.15),得

$$\frac{2}{5}c\int n^2+\frac{p-4}{5(p+1)(p+2)}\int|n|^{p+2}-\frac{1}{5}\alpha\beta^{-1}\omega\int|\varphi|^2+$$

$$\frac{3}{5}\alpha\beta^{-1}\int|\varphi_x|^2+\frac{7}{5}\alpha\beta^{-1}\int|\varphi_y|^2=0 \qquad (7.6.17)$$

另一方面,从式(7.6.8)得

$$\frac{1}{p+1}\int n^{p+2}=c\int n^2+\int m^2+\int(n_x)^2-\alpha\int n|\varphi|^2$$

联合式(7.6.17)有

$$\frac{2}{5}c\int n^2+\frac{p-4}{5(p+2)}[c\int n^2+\int m^2+\int(n_x)^2]$$

$$m^2-\frac{6}{5(p+2)}\alpha\beta^{-1}\omega\int|\varphi|^2+$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{(p-4)\beta+3(p+2)}{5(p+2)}\int|\varphi_x|^2+$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{(p-4)\beta+7(p+2)}{5(p+2)}\int|\varphi_y|^2=0$$

由此及条件(7.6.5)即得定理结论。

现证明孤立波的存在性,设 $\omega>0,\beta=-2\alpha,p=1$。用 $-\alpha$ 代替 α,则有方程组

$$\begin{cases}i\varepsilon_t+\Delta\varepsilon-2\alpha n\varepsilon=0,\\ n_t+n_{xxx}+nn_x-m_y=\alpha(|\varepsilon|^2)_x,\\ m_x=n_y\end{cases}\tag{7.6.18}$$

其中 $\alpha>0$。如 (n,m,φ) 为式(7.6.18)的孤立波,则满足方程组

$$\begin{cases}-\omega\varphi+\Delta\varphi-2\alpha n\varphi=0,\\ -cn_x+n_{xxx}+nn_x-m_y=\alpha(|\varphi|^2)_x,\\ m_x=n_y\end{cases}\tag{7.6.19}$$

或 $n=\partial_x\psi$,

$$\begin{cases}-\omega\varphi+\Delta\varphi-2\alpha\psi_x\varphi=0,\\ -c\psi_{xx}-\psi_{xxxx}+\psi_x\psi_{xx}-\psi_{yy}=\alpha(|\varphi|^2)_x\end{cases}\tag{7.6.20}$$

定理7.6.2 在空间 $Y\times H^1(\mathbf{R}^2)$ 上,式(7.6.19)具有非平凡解。

易知,式(7.6.19)为如下泛函的临界点

$$S(n,\varphi)=\frac{1}{2}\int|\nabla\varphi|^2+\frac{\omega}{2}\int|\varphi|^2+\|n\|_Y^2+\frac{1}{3}\int n^3-\alpha\int n|\varphi|^2$$

其中 $\|n\|_Y^2=\|\nabla_c\psi\|_{L^2}^2+\|\partial_{xx}\psi\|_{L^2}^2$,$|\nabla_c\psi|^2=c|\partial_x\psi|^2+|\partial_y\psi|^2$。不失一般性,可设 $c=1$。考虑如下具约束的极小值问题

$$I_\lambda=\inf_{(n,\varphi)\in\sum_\lambda}T(n,\varphi)\tag{7.6.21}$$

$$\sum\nolimits_\lambda=\{(n,\varphi)\in Y\times H^1;n\neq0,\varphi\neq0,V(n,\varphi)=\lambda\}\tag{7.6.22}$$

其中

$$T(n,\varphi)=\frac{1}{2}\int|\nabla\varphi|^2+\frac{\omega}{2}\int|\varphi|^2+\|n\|_Y^2$$

$$V(n,\varphi)=\frac{1}{3}\int n^3-\alpha\int n|\varphi|^2$$

定理7.6.2作为问题(7.6.21)极小值存在的推论。事实上,如(n,φ)取得极小,则存在 Lagrange 乘子θ,使得

$$\begin{cases}-\omega\varphi+\Delta\varphi-2\alpha\theta n\varphi=0, \\ -cn_x+n_{xxx}+\theta nn_x-m_y=\alpha\theta(|\varphi|^2)_x, \\ m_x=n_y\end{cases}$$

由此推出$\bar{n}=(\text{sgn }\theta)|\theta|n$,$\bar{m}=(\text{sgn }\theta)|\theta|m$,$\bar{\varphi}=(\text{sgn }\theta)|\theta|\varphi$为式(7.6.19)的一个解。为了证明式(7.6.21)极小值的存在性,需要证明几个引理。

引理7.6.1 对任何$\lambda>0$,$I_\lambda>0$。

证明 由异性 Sobolev 嵌入定理有

$$\|n\|_{L^q}\leqslant C\|n\|_Y,\forall n\in Y,2\leqslant q\leqslant 6$$

因此有

$$\left|\int n^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant C\|n\|_Y^3,\forall n\in Y$$

另一方面,$\varphi\in H^1(\mathbf{R}^2)$推出

$$\int|\varphi|^q\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant C\|\nabla\varphi\|_{L^2}^q,\forall q<\infty$$

因此,存在$s>0$,对任何$\lambda>0$,有

$$\lambda=\frac{1}{3}\int n^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\alpha\int n|\varphi|^2\leqslant C_1\|n\|_Y^3+C_2\|\nabla\varphi\|_{L^2}^s$$

于是

$$0<\lambda\leqslant C_1I_\lambda^3+C_2I_\lambda^s$$

证毕。

引理7.6.2 $\Sigma_\lambda\neq\emptyset,\forall\lambda>0$。

引理7.6.3 严格次可加性:即有

$$I_\lambda<I_{\lambda-\alpha}+I_\alpha,\forall\alpha\in(0,\lambda)$$

证明 令$n_\lambda=\lambda^{1/3}n$,$\varphi_\lambda=\lambda^{1/3}\varphi$,则

$$(n,\varphi)\in\Sigma_1\Leftrightarrow(n_\lambda,\varphi_\lambda)\in\Sigma_\lambda,$$

$$I_\lambda=\lambda^{2/3}I_1$$

引理7.6.4[131] 设 q 满足 $2\leqslant q<\infty$，则存在常数 $C>0$ 使得对一切 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$，$\nabla f\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$，对一切 $R>0$ 和一切 $X_0=(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，有

$$\left(\int_{R\leqslant|X-X_0|\leqslant 2R}|f(x)-m_R(f)|^q\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/q}\leqslant$$

$$CR^{2/q}\left(\int_{R\leqslant|X-X_0|\leqslant 2R}|\nabla f|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}$$

其中 $m_R(f)=\int_{R\leqslant|X-X_0|\leqslant 2R}f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$X=(x,y)\in\mathbf{R}^2$。

定理7.6.2的证明 用集中紧致原则证明。设 (n_k,φ_k) 为 I_λ，$\lambda>0$ 的极小序列，令 $\rho_k=|n_k|^2+|m_k|^2-|\partial_x n_k|^2+\frac{\omega}{2}|\varphi_k|^2+\frac{1}{2}|\nabla\varphi_k|^2$，$n_k=\partial_x\psi_k$，$m_k=\partial_y\psi_k$。有

$$\int\rho_k=\int(|n_k|^2+|m_k|^2+|\partial_x n_k|^2+\frac{\omega}{2}|\varphi_k|^2+\frac{1}{2}|\nabla\varphi_k|^2)=$$

$$T(n_k,\varphi_k)\to I_\lambda$$

(i)如果“消失”发生，即有

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in\mathbf{R}^2}\int_{X+B_R}\rho_k\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\forall R<\infty$$

其中 $B_R=B_R(0)$，即为以0为圆心，以 R 为半径的圆。我们证明这将导致矛盾。事实上，由估计

$$\int_{\mathbf{R}^2}|n|^3\leqslant$$

$$3C\left(\sup_{X\in\mathbf{R}^2}\int_{X+B_1}(|\psi_x|^2+|\psi_y|^2+|\psi_{xx}|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}\|\psi_x\|_Y^2=$$

$$3C\left(\sup_{X\in\mathbf{R}^2}\int_{X+B_1}(|n|^2+|m|^2+|\partial_x n|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}\|n\|_Y^2,$$

$$\left|\int_{\mathbf{R}^2}n|\varphi|^2\right|\leqslant C\left(\int_{\mathbf{R}^2}|n|^3\right)^{1/3}\|\varphi\|_{L^3}^2$$

因此，$n_k\to 0$，在 L^3 中强收敛于0，$n_k|\varphi_k|^2\to 0$，在 L^1 中强收敛于0。

它和 $(n_k,\varphi_k)\in\Sigma_\lambda$，$\lambda>0$ 矛盾。因此“消失”不发生。

(ii)"二分法"不发生，否则，设

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \gamma \in (0, I_\lambda) \tag{7.6.23}$$

$$Q(t) = \lim_{k\to\infty} \sup_{X_0\in\mathbf{R}^2} \int_{X_0+B_t} \rho_k \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{7.6.24}$$

且(n_k, φ_k)为极小化序列。为证明"二分法"不发生，我们需要如下引理，并在最后给予证明。

引理7.6.5 设(7.6.23)成立，对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)\to 0$ $(\varepsilon\to 0)$，使得能找到 $n_k^1, n_k^2, \varphi_k^1, \varphi_k^2$，满足以下关系

$$\|\varphi_k - (\varphi_k^1 + \varphi_k^2)\|_{H^1} + \|n_k - (n_k^1 + n_k^2)\|_Y \leqslant \delta(\varepsilon) \tag{7.6.25}$$

$$|T(n_k^1, \varphi_k^1) - \gamma| \leqslant \delta(\varepsilon) \tag{7.6.26}$$

$$|T(n_k^2, \varphi_k^2) - (I_\lambda - \gamma)| \leqslant \delta(\varepsilon) \tag{7.6.27}$$

$$\left|\int((n_k^1)^3 + (n_k^2)^3 - (n_k)^3) - \int(n_k^1|\varphi_k^1|^2 + n_k^2|\varphi_k^2|^2 - n_k|\varphi_k|^2)\right| \leqslant \delta(\varepsilon) \tag{7.6.28}$$

$$\mathrm{dist}\ (\mathrm{supp}\ n_k^1, \mathrm{supp}\ n_k^2) \to \infty, \mathrm{dist}\ (\mathrm{supp}\ \varphi_k^1, \mathrm{supp}\ \varphi_k^2) \to \infty \tag{7.6.29}$$

取子序列，设 $V(n_k^1, \varphi_k^1)\to\lambda_1(\varepsilon)$，$V(n_k^2, \varphi_k^2)\to\lambda_2(\varepsilon)$，$k\to\infty$。则

$$|\lambda - (\lambda_1(\varepsilon) + \lambda_2(\varepsilon))| \leqslant \delta(\varepsilon) \to 0, \text{当 } \varepsilon\to 0$$

区分为两种情况：

情况(1) $\lambda_1(\varepsilon)\to 0, \varepsilon\to 0$。选取 ε 充分小，使得

$$V(n_k^2, \varphi_k^2) > 0$$

作尺度变换

$$(\tilde{n}_k^2, \tilde{\varphi}_k^2) = \left(\left(\frac{\lambda_2(\varepsilon)}{V(n_k^2, \varphi_k^2)}\right)^{1/3} n_k^2, \left(\frac{\lambda_2(\varepsilon)}{V(n_k^2, \varphi_k^2)}\right)^{1/3} \varphi_k^2\right)$$

因

$$\frac{\lambda_2(\varepsilon)}{V(n_k^2, \varphi_k^2)} \to 1, \text{当 } \varepsilon\to 0,$$

可得

$$I_{\lambda_2(\varepsilon)} \leqslant \liminf_{k\to\infty} T(n_k^2,\varphi_k^2) \leqslant I_\lambda - \gamma + \delta(\varepsilon)$$

上式导致矛盾，因为 $\varepsilon\to 0$，$\lambda_2(\varepsilon)\to\lambda$。

情况(2)　$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}|\lambda_1(\varepsilon)|>0$，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}|\lambda_2(\varepsilon)|>0$。同样可得

$$I_{|\lambda_1(\varepsilon)|} + I_{|\lambda_2(\varepsilon)|} \leqslant \liminf_{k\to\infty}(T(n_k^1,\varphi_k^1) + T(n_k^2,\varphi_k^2)) \leqslant I_\lambda + 2\delta(\varepsilon)$$

推出

$$I_s + I_{\lambda-s} \leqslant I_\lambda, s\in(0,\lambda)$$

这破坏了严格的次可加性。

(iii)仅有的一种可能性是 ρ_k 是紧的，即存在序列 $X_k\in\mathbf{R}^2$，使得对一切 $\varepsilon>0$，存在有限数 $R>0$，$k_0>0$使得

$$\int_{X_k+B_R}(|n_k|^2+|m_k|^2+|\partial_x n_k|^2+\frac{\omega}{2}|\varphi_k|^2+\frac{1}{2}|\nabla\varphi_k|^2)\geqslant I_\lambda-\varepsilon \tag{7.6.30}$$

因(n_k,φ_k)在$Y\times H^1$有界，故可设$(n_k(\cdot-X_k),\varphi_k(\cdot-X_k))$在$Y\times H^1$中弱收敛于$(n,\varphi)\in Y\times H^1$。我们证明

$$n_k(\cdot - X_k)\to n,\ 在\ L^{q+2}\ 中强收敛, \forall q<4 \tag{7.6.31}$$

$$\varphi_k(\cdot - X_k)\to\varphi,\ 在\ L^q\ 中强收敛\ \forall q<\infty \tag{7.6.32}$$

仅需证明(7.6.31)，(7.6.32)可同样证明。从(7.6.30)，对一切$k\geqslant k_0$

$$\int_{X_k+B_R}|n_k|^2\geqslant\int_{\mathbf{R}^2}|n_k|^2-2\varepsilon$$

因此

$$\int_{\mathbf{R}^2}|n|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\liminf_{k\to\infty}\int_{X_k+B_R}|n_k|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\varepsilon$$

另一方面，由文献[181，引理3.3]，$Y\subset\!\!\!\to L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$是紧的，则可取$n_k\to n$在$L^2_{\mathrm{loc}}$中强收敛。这二个要求得出$n_k(\cdot-X_k)\to n$在$L^2(\mathbf{R}^2)$中

强收敛，从插值和 $Y\subset L^{q+2}(\forall q\leqslant 4)$，得出式(7.6.31)成立。

因此

$$V(n_k,\varphi_k)\to V(n,\varphi)=\lambda$$

(n,φ)为 I_λ 的极小。

现证引理7.6.5　设(7.6.23)成立，则可找到 $R_0>0, R_k\geqslant R_0$，$R_k\nearrow+\infty, X_k\in\mathbf{R}^2$，使得对 $k\geqslant k_0$ 有

$$\gamma-\varepsilon\leqslant\int_{X_k+B_{R_0}}\rho_k\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\gamma, Q_k(2R_k)\leqslant\gamma+\varepsilon$$

其中 $Q_k(t)=\sup\limits_{X_0\in\mathbf{R}^2}\int_{X_0+B_t}\rho_k\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。则有

$$\int_{R_0\leqslant|X-X_k|\leqslant 2R_k}\rho_k\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 2\varepsilon \tag{7.6.33}$$

现定义 $n_k^1, n_k^2, m_k^1, m_k^2, \varphi_k^1, \varphi_k^2$ 如下：

选取 $\xi,\eta,\zeta,\sigma\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$使得$0\leqslant\xi,\eta,\zeta,\sigma\leqslant 1$而且

$$\xi=1, \text{在 } B_1 \text{ 上}, \operatorname{supp}\xi\subset B_2;$$

$$\eta=1, \text{在 } B_2^c \text{ 上}, \operatorname{supp}\eta\subset B_1^c;$$

$$\zeta=1, \text{在 } B_1 \text{ 上}, \operatorname{supp}\zeta\subset B_2;$$

$$\sigma=1, \text{在 } B_2^c \text{ 上}, \operatorname{supp}\sigma\subset B_1^c$$

令

$$\xi_k=\xi\left(\frac{\cdot-X_k}{R_1}\right), \eta=\eta\left(\frac{\cdot-X_k}{R_k}\right);$$

$$\zeta_k=\zeta\left(\frac{\cdot-X_k}{R_1}\right), \sigma=\sigma\left(\frac{\cdot-X_k}{R_k}\right)$$

置

$$n_k^1=\partial_x(\xi_k(\psi_k-a_k)), n_k^2=\partial_x(\eta_k(\psi_k-b_k)),$$

$$m_k^1=\partial_y(\xi_k(\psi_k-a_k)), m_k^2=\partial_y(\eta_k(\psi_k-b_k)).$$

$$\varphi_k^1=\zeta_k\varphi_k, \varphi_k^2=\sigma_k\varphi_k$$

其中 a_k,b_k 为待定实数，现证式(7.6.25)～(7.6.29)成立，事实上

$$\|n_k-(n_k^1+n_k^2)\|_{L^2}=$$
$$\|(1-\xi_k-\eta_k)n_k-(\psi_k-a_k)\partial_x\xi_k-(\psi_k-b_k)\partial_x\eta_k\|_{L^2}\leqslant$$
$$\left(\int_{R_0\leqslant|X-X_k|\leqslant 2R_k}|n_k|^2\right)^{1/2}+$$
$$\|(\psi_k-a_k)\partial_x\xi_k+(\psi_k-b_k)\partial_x\eta_k\|_{L^2}\leqslant$$
$$\sqrt{2\varepsilon}+\|(\psi_k-a_k)\partial_x\xi_k\|_{L^2}+\|(\psi_k-b_k)\partial_x\eta_k\|_{L^2},$$
$$\|(\psi_k-a_k)\partial_x\xi_k\|_{L^2}\leqslant\|\partial_x\xi\|_{L^p}\|\psi_k-a_k\|_{L^q(R_1\leqslant|X-X_k|\leqslant 2R_1)}\tag{7.6.34}$$

其中 $1/p+1/q=1/2$。令 $a_k=\displaystyle\int_{R_1\leqslant|X-X_k|\leqslant 2R_1}\psi_k\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，由引理6.6和式(7.6.34)得

$$\|(\psi_k-a_k)\partial_x\xi_k\|_{L^2}\leqslant C\sqrt{\varepsilon}$$

选取 $b_k=\displaystyle\int_{R_k\leqslant|X-X_k|\leqslant 2R_k}\psi_k\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，有

$$\|(\psi_k-b_k)\partial_x\eta_k\|_{L^2}\leqslant C\sqrt{\varepsilon}$$

因此

$$\|n_k-(n_k^1+n_k^1)\|_{L^2}\leqslant C\sqrt{\varepsilon}$$

类似地有

$$\|n_k-(n_k^1+n_k^2)\|_Y\leqslant C\sqrt{\varepsilon}$$

通过简单的计算，有

$$\|\varphi_k-(\varphi_k^1-\varphi_k^2)\|_{H^1}\leqslant C\sqrt{\varepsilon}$$

于是式(7.6.25)得证。不等式(7.6.26)、(7.6.27)来自“二分法”的定义。现证式(7.6.28)。不等式

$$\left|\int_{\mathbf{R}^2}((n_k)^3-(n_k^1)^3-(n_k^2)^3)\right|\leqslant\delta(\varepsilon)$$

来自文献[180]。

对于其它的项有

$$\int_{\mathbf{R}^2}(n_k|\varphi_k|^2 - n_k^1|\varphi_k^1|^2 - n_k^2|\varphi_k^2|^2) =$$
$$\int_{\mathbf{R}^2}(n_k|\psi_k|^2(1 - \xi_k\zeta_k^2 - \eta_k\sigma_k^2)) -$$
$$\int_{\mathbf{R}^2}((\psi_k - a_k)|\varphi_k|^2\zeta_k^2\partial_x\xi_k + (\psi_k - b_k)|\varphi_k|^2\sigma_k^2\partial_x\eta_k) =$$
$$I_1 + I_2$$

其中

$$|I_1| \leqslant \int_{R_0\leqslant|X-X_k|\leqslant 2R_k}|n_k||\varphi|^2 \leqslant$$
$$C\|\varphi_k\|_{L^4}^2\int_{R_0\leqslant|X-X_k|\leqslant 2R_k}\rho_k \leqslant \delta(\varepsilon)$$
$$|I_2| \leqslant C\|\varphi_k\|_{L^4}^2(\int|\psi_k - a_k|^2|\partial_x\xi|^2)^{1/2} +$$
$$C\|\varphi_k\|_{L^4}^2(\int|\psi_k - b_k|^2|\partial_x\eta|^2)^{1/2} \leqslant \delta(\varepsilon)$$

引理7.6.5证毕。

7.7 BBM 方程孤立波的渐近稳定性

BBM 方程

$$(I - \partial_x^2)\partial_t u + \partial_x(u + \frac{1}{2}u^2) = 0 \qquad (7.7.1)$$

孤立波的 H^1-Lyapunov 稳定性已在文献[209,210]中研究过，即对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得如果

$$\inf_s\|u_0(\cdot + s) - u_c(\cdot)\|_{H^1} < \delta$$

则对一切 $t>0$有

$$\inf_s\|u(\cdot + s,t) - u_c(\cdot)\|_{H^1} < \varepsilon$$

其中 $u_0(x)=u(x,0)$

$$u_c(x) = 3(c - 1)\mathrm{sech}^2(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{c}}x) \qquad (7.7.2)$$

为式(7.7.1)的孤立波。Bona 和 Soyeur 在文献[178]中进一步改善了这个结果。对于 BBM 方程，他们证明了存在映照 $s(t)\in C^1$，有

$$\|u(\cdot,t)-u_c(\cdot+s(t))\|_{L^2}<k_1\varepsilon,$$

$$|s'(t)+c|\leqslant k_2\varepsilon$$

其中 k_1,k_2 为某常数。这里要证明的是它的更进一步的渐近稳定性质，即 $u(x,t)$ 为 BBM 方程具初值 $u(x,0)$ 的解，如果 $u(x,0)$ 在某种意义下逼近于孤立波 $u_c(t+\gamma)$，$\gamma\in\mathbf{R}$，则有

$$u(x,t)\to u_c(x-c_+t+\gamma_+),t\to\infty$$

其中常数 c_+ 和 c 相近，γ_+ 和 γ 相近。

为了研究渐近稳定性，可在某个加权 Sobolev 空间来考虑，例如，选取指数加权 H^1 空间如下：

$$H_a^1=\{\nu\,|\,\mathrm{e}^{ax}\nu(x)\in H^1(\mathbf{R}),\|\nu\|_{H_a^1}=\|\mathrm{e}^{ax}\nu\|_{H^1},a\geqslant 0\}$$

也可定义

$$L_a^2=\{\nu\,|\,\mathrm{e}^{ax}\nu(x)\in L^2(\mathbf{R}),|\nu\|_{L_a^2}=\|\mathrm{e}^{ax}\nu\|_{L^2}\}$$

利用在加权 Sobolev 空间的能量估计，可以证明

定理7.7.1 设 $a\in\mathbf{R}$，$u_0(x)\in H^2(\mathbf{R})\cap H_a^1(\mathbf{R})$，则存在 RLW 方程具初值 $u(x,0)=u_0(x)$ 的唯一解 $u(x,t)$，使得

$$t\to\|u(\cdot,t)\|_{H^1}+\|u(\cdot,t)\|_{H_a^1}$$

对 $t\in[0,\infty)$ 是连续的。进一步，$\partial_t\mathscr{H}[u]=0$，$\partial_t\mathscr{N}[u]=0$，对 $t\geqslant 0$ 成立，其中

$$\mathscr{H}(u)=\int[\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{6}u^3]\mathrm{d}x,$$

$$\mathscr{N}(u)=\int[\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}(\partial_x u)^2]\mathrm{d}x$$

我们要证明的渐近稳定性的定理如下：

定理7.7.2 设 $u_c(x-ct+\gamma)$ 为 BBM 方程的孤立波，其中 $c>1$，$\gamma\in\mathbf{R}$。考虑 BBM 方程的初值

$$u_0(x)=u(x,0)=u_{c_0}(x+\gamma_0)+\nu_0(x)\in H^2\cap H_a^1\tag{7.7.3}$$

其中

$$0 < a < a_*(c_0) = \sqrt{\frac{2}{2+\sqrt{8c_0+1}}}\sqrt{\frac{c_0-1}{c_0}}$$

则有

(1) 存在 $c>0,\epsilon>0,c_*>1$ 和某个 b，使得 $-ac_0+a/(1-a^2)<-b<0$，如果 $c_0\in(1,c_*)$，$\|\nu_0\|_{H^1}+\|\nu_0\|_{H_a^1}<\epsilon$，则对一切 $t\geqslant 0$，有

$$\|u(\cdot,t)-u_{c_+}(\cdot-c_+t+\gamma_+)\|_{H^1}<c\epsilon,$$

$$\|u(\cdot+c_+t-\gamma_+,t)-u_{c_-}(\cdot)\|_{H_a^1}<c\epsilon e^{-bt}$$

其中 $c_+>1,\gamma_+\in\mathbf{R}$，$|c_0-c_+|<c\epsilon$，$|\gamma_0-\gamma_+|<c\epsilon$。

(2) (1)的结论对一切速度 $c_0\geqslant c_*$ 成立，除了某个离散集外。

定理7.7.2证明的思路：寻求 BBM 的解可表为可控制的调制孤立波及其余项之和

$$u(x,t)=u_{c(t)}\left(x-\int_0^t c(s)\mathrm{d}s+\gamma(t)\right)+$$

$$\nu\left(x-\int_0^t c(s)\mathrm{d}s+\gamma(t),t\right) \tag{7.7.4}$$

其中速度 $c(t)$ 和位相 $\gamma(t)$ 是随时间变化的，当 $c(t)=c,\gamma(t)=\gamma$ 为常数时，$u_{c(t)}\left(x-\int_0^t c(s)\mathrm{d}s+\gamma(t)\right)$ 即归结为通常 BBM 方程的孤立波 $u_c(x-ct+\gamma)$。作变元的变换

$$\tau(t)=\int_0^t c(s)\mathrm{d}s-\gamma(t),\ y(x,t)=x-\int_0^t c(s)\mathrm{d}s+\gamma(t) \tag{7.7.5}$$

将式(7.7.4)代入 BBM 方程，可得

$$\partial_t\nu=A\nu+\mathscr{F}(\nu;u_{c(t)},\dot{c}(t),\dot{\gamma}(t)) \tag{7.7.6}$$

其中 $\mathscr{F}$ 表示非线性项，

$$A=(I-\partial_y^2)^{-1}\partial_y L_{c_0},$$

$$L_{c_0}=-c_0\partial_y^2+c_0-1-u_{c_0} \tag{7.7.7}$$

其中 $c_0>1$ 为固定速度。我们再研究加权扰动 $w=\mathrm{e}^{ay}\nu$，它满足方程

$$\partial_t w = A_a w + \mathscr{G} \tag{7.7.8}$$

其中 $\mathscr{G}$ 为非线性项

$$A_a = \mathrm{e}^{ay} A \mathrm{e}^{-ay} \tag{7.7.9}$$

我们的目的在于证明 $\|\nu(\cdot,t)\|_{H^1}$ 保持有界，和 $\|w(\cdot,t)\|_{H^1}\to 0$，$t\to\infty$。证明的关键在于详细分析算子 A 和 A_a 在 $L^2(\mathbf{R})$ 中的谱结构，特别必须证明线性化特征值问题 $Ay=\lambda y$（或 $A_c y=\lambda y$）在闭的右半平面不存在非零的特征值，因此仅有自然的特征值 $\lambda=0$。为了建立强谱稳定性，我们首先证明 $A_a(A)$（除了广义二重特征值 $\lambda=0$ 之外）在闭的左半平面没有特征值 λ。对此分别对大的 $|\lambda|$ 和小的 $|\lambda|$ 用不同方法证明。对大的 $|\lambda|$，用于解式 $(\lambda I - A_a^{\infty})^{-1}$ 逼近于解式 $(\lambda I - A_a)^{-1}$，只须对算子 $C(\lambda)$ 的模进行估计；对于小的 $|\lambda|$，利用 KdV 方程 Evans 函数逼近 BBM 方程的 Evans 函数，对特征值进行估计。为了避免当 $t\to\infty$ 时 w 和 ν 的长期增长，要求 $Pw \overset{\text{def}}{=\!=} 0$，其中 P 表示到 A_c 二维广义核空间的投影，这就要求 $c(t)$ 和 $\gamma(t)$ 满足一组常微分方程组—调制方程组，必须证明解的存在性。最后在线性谱分析中，证明算子 A_a 在它的正交核空间中，形成一个依 H^1 模指数衰减的半群，即线性方程 $\partial_t w = A_a w$，其初值在 $Q=I-P$ 的值域的解，依 H^1 模指数衰减于零，$t\to\infty$。为了证明这种衰减估计，要求解式 $(\lambda I - A_a)^{-1}$ 算子模是有界的。特别，要证明

$$\mathrm{Re}\,(\lambda) > -b \Rightarrow \|(\lambda I - A_a Q)^{-1}\| < M \tag{7.7.10}$$

其中 $M<\infty$，$-b<0$。

现考虑线性谱理论。BBM 孤立波扰动的线性化方程为

$$\partial_t \nu = A\nu \tag{7.7.11}$$

其中

$$A = (I-\partial_y^2)^{-1}\partial_y L_{c_0}$$

对应的加权扰动方程为

$$\partial_t w = A_a w \tag{7.7.12}$$

其中

$$A_a = e^{ay}Ae^{-ay}$$

注意到 A_a 在 L^2(或 H^1)的谱理论是等价于 A 在 L_a^2(或 H_a^1)的谱理论,这是因为

$$(\lambda I - A_a) = e^{ay}(\lambda I - A)e^{-ay}$$

则有定理

定理7.7.3 设$0<a<\gamma$,其中 $\gamma=\sqrt{\frac{c-1}{c}}$,则有

(1)A_a 的本质谱 $\sigma_{ess}(A_a)$是一条位于开的左半平面的曲线,

$$-\omega \overset{\text{def}}{=\!=} \max \{\text{Re } z \mid z \in \sigma_{ess}(A_a)\} = -ac + \frac{a}{1-a^2} < 0 \tag{7.7.13}$$

(2)存在 $\gamma_* \in (0,1)$,使得对一切 $\gamma \in (0,\gamma_*)$,A 的特征值 λ,Re $\lambda \geqslant 0$仅有一个,就是 $\lambda=0$;

(3)设 $\gamma \in (0,\gamma_*)$,存在 $\varepsilon(\gamma)>0$,使得 A_a 的特征值 λ,Re $\lambda \geqslant -\varepsilon(\gamma)$,仅有一个,就是 $\lambda=0$;

(4)(2)和(3)对 $\gamma \in (\gamma_*,1)$成立,除去 γ 的离散集外。

定理7.7.3的证明是比较细致和复杂的。对于(1)的证明,注意到

$$A = -(I-\partial_y^2)^{-1}\partial_y(u_c) + A^\infty$$

其中

$$A^\infty = (I-\partial_y^2)^{-1}\partial_y(-c\partial_y^2 + c - 1) \tag{7.7.14}$$

类似,

$$A_a = -e^{ay}(I-\partial_y^2)^{-1}\partial_y(e^{-ay}u_c) + A_a^\infty$$

其中

$$A_a^\infty = e^{ay}A^\infty e^{-ay}$$

因 $u_c(y)$当$|y|\to\infty$时指数衰减,A 为 A^∞的紧扰动。由 Weyl 定理,A 和 A^∞,A_a 和 A_a^∞ 的本质谱是相同的,而且是在虚轴上。对 A_a^∞ 作傅氏变换,可以证明 A_a 的本质谱为

$$\sigma_{ess}(A_a)=\{z\in\mathbf{C}\,|\,z=\frac{(-ik-a)(-c(-ik-a)^2+c-1)}{1-(-ik-a)^2},k\in\mathbf{R}\}$$

(7.7.15)

由此可得(a)。对于(b)(c)(d)的证明，依 λ 的特征值的大小，分两种情况：

情况(1) 大的 λ，即 $|\lambda|\geqslant M\gamma^3$。

对此，期望予解式 $(\lambda I-A_a)^{-1}$ 和 $(\lambda I-A_a^{\infty})^{-1}$ 相近。考虑特征值问题 $A_a y=\lambda y$，可由算子 $C(\lambda)$ 所确定：

$$(\lambda I-A_a)^{-1}=(I-C(\lambda))^{-1}(\lambda I-A_a^{\infty})^{-1} \quad (7.7.16)$$

其中

$$C(\lambda)\varphi=(D_a(1-cD_a^2+c-1)-\lambda(I-D_a^2)^{-1}D_a u_c\varphi),$$

$$\varphi\in L^2(\mathbf{R}),$$

$$D_a=\partial_y-a \quad (7.7.17)$$

命题7.7.1

(1)算子 $C(\lambda):L^2\to L^2$ 对 λ 不属于 $\sigma_{ess}(A_c)$ 是紧的，特别，$C(\lambda)$ 对一切 λ，$\mathrm{Re}\,\lambda>-\omega$ 是紧的；

(2)对任何 $\lambda\in\mathbf{C}\backslash\sigma_{ess}(A_a)$，$\lambda$ 为 A_a 的特征值，当且仅当1位于 $C(\lambda)$ 的谱中；

(3)$\lambda\in\mathbf{C}\backslash\sigma_{ess}(A_a)$，$\lambda$ 不是 A_a 特征值的一个充分条件是，算子 $C(\lambda)$ 具有模 $\|C(\lambda)\|_{L^2\to L^2}<1$。

证明 只要证(1)，其余(2)、(3)均可由(1)推出。至于(1)，可由 $C(\lambda)$ 的共扼算子 $C^*(\lambda)$ 的性质推出。

命题7.7.2 设 $\delta\in(0,1)$ 为固定的，则有

(1)对任何 $\epsilon_1\in(0,\frac{1}{2})$，$c_*>1$，则存在 $M>0$，使得如果

$$1\leqslant c\leqslant c_*,\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant -ac/4$$

且

$$|I_m\lambda|>cM\gamma^3$$

或

$$\mathrm{Re}\ \lambda > cM\gamma^3$$

则$\|C(\lambda)\|_{L^2\to L^2}<1-\delta$,因此 λ 不是 A_a 的特征值。

(2)$\|C(\lambda)\|_{L^2\to L^2}$换成$\|C(\lambda)\|_{H^1\to H^1}$,(a)的结论仍成立。

推论7.7.1 设 $c>1, a\in(0,\gamma), \delta\in(0,1)$为固定的,存在 $M>0$,如果 $\mathrm{Re}\ \lambda\geqslant 0, |\lambda|>M\gamma^3$,则 λ 不是 A 或 A_a 的特征值。

情况(2) 小的 λ。Evans 函数。

考虑常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t}=B(y,\lambda,\gamma)\boldsymbol{Y}(y) \tag{7.7.18}$$

其中 $\boldsymbol{Y}(s):\mathbf{R}\to\mathbf{C}^n$ 为向量值函数,B 为 $n\times n$ 矩阵,它的元素为 y 的函数,λ,γ 为复参数。

设 $B(y,\lambda,\gamma)\to B^{\infty}(\lambda,\gamma), y\to\pm\infty$,令 $\mu_j, 1\leqslant j\leqslant n$ 表示 B^{∞}的特征值,ν_j 为相应的特征向量,设

$$\mathrm{Re}\ \mu_1<\mathrm{Re}\ \mu_j, j=2,3,\cdots,n \tag{7.7.19}$$

由古典结果可知,如果 B 很快地趋于 $B^{\infty}, y\to\pm\infty$,则(7.7.18)具有解 $\boldsymbol{Y}(y)$的一维子空间,满足

$$\boldsymbol{Y}(y)=O(\mathrm{e}^{\mu_1 y}), y\to+\infty$$

而解 $\boldsymbol{Y}(y)$的$(n-1)$维子空间满足

$$\boldsymbol{Y}(y)=o(\mathrm{e}^{\mu_1 y}), y\to-\infty$$

这些子空间的夹角是一个解析函数 $D(\lambda,\gamma)$,称为 Evans 函数。$D(\lambda,\gamma)$可定义为转换系数:如 Y^+为(7.7.18)的一个解,规范化为

$$\boldsymbol{Y}^+\sim\mathrm{e}^{\mu_1 y}\nu_1, y\to+\infty$$

则有

$$\boldsymbol{Y}^+\sim D(\lambda,\gamma)\mathrm{e}^{\mu_1 y}\nu_1, y\to-\infty$$

$D(\lambda,\gamma)$的定义域为一切(λ,γ)使得式(7.7.19)成立的集合,因此,如果$(\lambda,\gamma)\in\Delta$,且 $D(\lambda,\gamma)=0$,则式(7.7.18)具有一个解 $\boldsymbol{Y}(y)$,满足

$$\boldsymbol{Y}^+=o(\mathrm{e}^{\mu_1 y}), y\to-\infty;$$

$$\boldsymbol{Y}^+=O(\mathrm{e}^{\mu_1 y}), y\to+\infty \tag{7.7.20}$$

附加设

$$\mathrm{Re}\,\mu_1 < 0 < \mathrm{Re}\,\mu_j, \quad j = 2,3,\cdots,n$$

则 $\boldsymbol{Y}(y)$满足式(7.7.20)，当且仅当 $\boldsymbol{Y}(y)$当 $y\to+\infty$和 $y\to-\infty$时指数衰减于零。

以下先叙述一下 Evans 函数的存在定理，再叙述 KdV 方程，BBM 方程 Evans 函数的重要性质，特别是它和特征值 λ 的密切联系，以及 Evans 函数 $D_{\mathrm{KdV}}(\lambda,\gamma)$和 $D_{\mathrm{BBM}}(\lambda,\gamma)$的关系。

定理7.7.4[231]　设 Δ 为 $\mathbf{C}^2$ 的一个单连通区域，设方程组(7.7.18)满足以下假设：

(i)　$B:\mathbf{R}\times\Delta\to\mathbf{C}^{n\times n}$对固定的 y，对(λ,γ)是连续的，解析的；

(ii)　$B^{\infty}(\lambda,\gamma)=\lim\limits_{y\to-\infty}B(y,\lambda,\gamma)$对一切$(\lambda,\gamma)\in\Delta$ 存在，且其极限在 Δ 的紧子集上是一致的；

(iii)积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\|B(y,\lambda,\gamma)-B^{\infty}(\lambda,\gamma)\|\mathrm{d}y$$

收敛，$\forall(\lambda,\gamma)\in\Delta$。这种收敛性在 Δ 的紧子集上是一致的。

(iv)对任何$(\lambda,\gamma)\in\Delta$，矩阵 $B^{\infty}(\lambda,\gamma)$具有唯一的具最小实部的简单的特征值。

则存在 Evans 函数 $D(\lambda,\gamma)$，它在 Δ 上解析，使得 $D(\lambda,\gamma)=0$，当且仅当式(7.7.18)具有解 $Y(y)$满足式(7.7.20)，函数 $D(\lambda,\gamma)$是唯一的，是在这种意义：如果 D 和 D^* 为式(7.7.18)的 Evans 函数，则 D/D^* 在 Δ 是解析的。

定理7.7.5[233]

(1)Evans 函数 $D_{\mathrm{KdV}}(\Lambda)$，对应于方程

$$A_{\mathrm{KdV}}Y=\partial_y\left(-\partial_y^2+1-3\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}y\right)\right)Y=\Lambda Y$$

有

$$D_{\mathrm{KdV}}(\Lambda)=\left(\frac{\mu_1(\Lambda)+1}{\mu_1(\Lambda)-1}\right)^2$$

其中 $\mu_1(\Lambda)$表示 $\mu(-\mu^2+1)-\Lambda$ 具有最小实部的根。

(2)$D_{\mathrm{KdV}}(\Lambda)$的定义域为

$$\Delta_{\mathrm{KdV}}=\mathbf{C}\backslash(-\infty,-\sqrt{\frac{4}{27}}]$$

(3)A_{KdV}的本质谱:$L_a^2\to L_a^2$ 为完全包含在区域$\{\lambda|\mathrm{Re}\ \lambda<-\varepsilon\}$,$\varepsilon>0$的一条曲线,更进一步,如 Δ_0表示 $\mathbf{C}\backslash\sigma_{\mathrm{ess}}(A_{\mathrm{KdV}})$的分支含有右半平面,则 $D_{\mathrm{KdV}}(\Lambda)$在 Δ_0中不具有零点,除非在 $\Lambda=0$处具有二重零点。

利用定理7.7.4可证

定理7.7.6

(1)对任何 $\gamma\in(0,1)$,则存在 $\varepsilon(\gamma)>0$,使得 Evans 函数 $D_{\mathrm{BBM}}(\lambda,\gamma)$在半平面$\{\lambda,\mathrm{Re}\ \lambda>-\varepsilon(\gamma)\}$上定义和解析。

(2)存在$-\lambda_0<0$,使得对任何 $\gamma\in(0,1)$,Evans 函数 $D_{\mathrm{BBM}}(\lambda,\gamma)$在半平面

$$\{\lambda,\mathrm{Re}\ \lambda>-\lambda_0\}\backslash(-\lambda_0,-\tilde{\Omega}(\gamma))$$

中定义解析,其中

$$-\tilde{\Omega}(\gamma)=-\gamma^3\sqrt{4/27}(1+O(\gamma^2))$$

(3)当 $\mathrm{Re}\ \lambda\geqslant0$,如下命题是等价的:

$$D_{\mathrm{BBM}}(\lambda,\gamma)=0;$$

λ 为 A 的一个 L^2 特征值;

λ 为 A_a 的一个 L^2 特征值

加之,D_{BBM}零点的阶数等于特征值的代数重数。

(4)当 $\lambda=0$时,有 $D_{\mathrm{BBM}}(0,\gamma)=0$,$\partial_\lambda D_{\mathrm{BBM}}(0,\gamma)=0$,但 $\partial_\lambda^2 D_{\mathrm{BBM}}(0,\gamma)\neq0$,推之,$\lambda=0$为 A 的具有代数重数为2的一个特征值。

(5)当 $\mathrm{Re}\ \lambda<0$时,且 λ 位于复平面 $\sigma_{\mathrm{ess}}(A_a)$的右边,则 $D_{\mathrm{BBM}}(\lambda,\gamma)=0$,当且仅当 λ 是 A_a 的一个 L^2特征值,此时 $D_{\mathrm{BBM}}(\lambda,\gamma)=0$不能推出 λ 为 A 的 L^2特征值。

和 BBM 方程的 Evans 函数 $D_{\mathrm{BBM}}(\lambda,\gamma)$相联的特征值方程为

$$\partial_y(-c\partial_y^2+c-1-u_c(y))Y(y)-\lambda(I-\partial_y^2)Y(y)=0 \tag{7.7.21}$$

作尺度变换

$$\lambda = c\gamma^3 \Lambda, y = \xi/\gamma \tag{7.7.22}$$

则由式(7.7.21)可得

$$\partial_\xi(-\partial_\xi^2 - 1 - g(\xi))Y - \Lambda Y + \Lambda\gamma^2\partial_\xi^2 Y = 0 \tag{7.7.23}$$

其中

$$g(\xi) = 3\mathrm{sech}^2(\frac{1}{2}\xi)$$

值得注意的是，当 $\gamma=0$时，即为 KdV 方程的特征值方程。现考虑 $|\lambda| \leqslant M\gamma^3$。设式(7.7.23)的 Evans 函数为 $D_*(\Lambda,\gamma)$，它在闭右半平面的零点为式(7.7.23)的 L^2特征值。D_*和 D_{BBM}有如下关系

$$D_*(\Lambda,\gamma) = D_{BBM}(\lambda,\gamma), \lambda = c\Lambda\gamma^3$$

充分证明 $D_*(\Lambda,\gamma)$的仅有零点($|\Lambda| \leqslant M/c$)为 $\Lambda=0$，我们将看到 $D_*(\Lambda,\gamma)$对 Λ 解析，对 γ 连续。当 $\gamma=0$时，它等于 $D_{KdV}(\Lambda)$。利用 Rouche 定理，证明对 γ 充分小，$D_*(\Lambda,\gamma)$如同 $D_{KdV}(\Lambda)$，$\Lambda=0$为在闭右平面中仅有一个特征值。这导致定理7.7.3(2)(3)的证明，(4)的证明由 γ 的解析延拓得到。

命题7.7.3　存在方程(7.7.23)的 Evans 函数，具有如下性质：

(1)对任何 $M>0$，存在 $\epsilon>0$，使得 $D_*(\Lambda,\gamma)$在 $\Delta_* \times [-1,1]$上定义和解析，其中 $\Delta_* \subset \mathbf{C}$ 为含有如下半平面的区域

$$\{\Lambda | \mathrm{Re}\ \Lambda > \frac{-\lambda_0}{c\gamma^3}\} \setminus [\frac{-\lambda_0}{c\gamma^3}, \frac{-\tilde{\Omega}(\gamma)}{c\gamma^3}]$$

其中$-\lambda_0$和$-\tilde{\Omega}$如同定理7.7.6(2)所定义，且

$$\frac{-\tilde{\Omega}(\gamma)}{c\gamma^3} = -\sqrt{\frac{4}{27}}(1 + O(\gamma^2))$$

(2)$D_*(\Lambda,\gamma) = D_{BBM}(\lambda,\gamma)$，$\lambda = c\Lambda\gamma^3$。

(3)设 $\mathrm{Re}\ \Lambda \geqslant 0$，$\gamma \in (0,1)$，则 $D_*(\Lambda,\gamma)=0$，$\lambda=c\Lambda\gamma^3$为 Λ 的 L^2特征值，其中(7.7.23)具有一个指数衰减($y\to\infty$)的解。

定理7.7.3(2)、(3)的证明　由命题7.7.2，能选取 $M_*>0$和

$\varepsilon_* > 0$，由条件

$$1 < c \leqslant 2,$$
$$\mathrm{Re}\ \Lambda > -\varepsilon_*,$$
$$|\Lambda| > M_*$$

推出 $\lambda = c\Lambda\gamma^3$ 不是 A_a 的一个特征值。由尺度变换(7.7.22)，寻找 $\gamma_* \in (0,1)$，使得如 $0 < \gamma \leqslant \gamma_*$，$\mathrm{Re}\ \Lambda > -\varepsilon_*$，$|\Lambda| \leqslant M_*$，则由 $D_*(\Lambda,\gamma) = 0$ 推出 $\Lambda = 0$。定义

$$\Delta_\varepsilon = \{\Lambda, \mathrm{Re}\ \Lambda \geqslant -\varepsilon, |\Lambda| < M_*\}, 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$$

令

$$m = \min\{|D_{\mathrm{KdV}}(\Lambda)|\,|\Lambda \in \partial\Delta_\varepsilon\}$$

定理7.7.5指出 $D_{\mathrm{KdV}}(\Lambda) = D_*(\Lambda;0)$ 在 $\bar{\Delta}_\varepsilon$ 上没有零点，除了在 $\Lambda = 0$ 处有一个二重零点外。因此 $m > 0$。因 D 对 γ 连续，因此存在某 γ_* 如此小，使得不等式成立

$$|D_*(\Lambda,\gamma) - D_*(\Lambda,0)| = |D_*(\Lambda,\gamma) - D_{\mathrm{KdV}}(\Lambda)| < m,$$
$$0 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_*, \Lambda \in \partial\Omega_\varepsilon$$

Rouche 定理推出，对每个 $\gamma \in [0,\gamma_*]$，函数 $D_*(\Lambda,0)$ 和 $D_*(\Lambda,\gamma)$ 在 Δ_ε 内具有相同的零点数。因 $D_*(\Lambda,\gamma) = 0$，当且仅当 $D_{\mathrm{BBM}}(c\Lambda\gamma^3,\gamma) = 0$。由定理7.7.6可知，对任何 $\gamma > 0$，$D_*(\Lambda,\gamma)$ 在 $\Lambda = 0$ 处具有二重数的一个零点。由此推出，对任何 $\gamma \in [0,\gamma_*]$，$D_*(\Lambda,\gamma)$ 在 Δ_ε 中没有零点，除了在 $\Lambda = 0$ 处外，因此(2)得证。设 $\gamma \in (0,\gamma_*)$ 为任意的，令

$$-\omega = \max\{\mathrm{Re}\ z\,|\,z \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A_a)\} < 0$$

则(3)的结论来自定理7.7.6(2)。如选取 $\varepsilon(\gamma) > 0$，使得

$$-\varepsilon(\gamma) > \max\{-\omega, -\varepsilon_*\}$$

定理7.7.3(4)的证明　只要证明

$$E = \{\gamma \in [0,1)\,|\,\text{存在}\ \beta \in \mathbf{R}, |\beta| \leqslant M, \text{使得}\ D_*(\mathrm{i}\beta,\gamma) = 0\}$$

是离散的即可。

定理7.7.3(4)说明 $\lambda = 0$ 为 A 和 A_a 具重数2的特征值。我们现

在寻求广义零特征空间 $\mathrm{Ker}_g(A_a)$ 以及共轭特征空间 $\mathrm{Ker}_g(A_a^*)$，其中

$$A_a^* = \mathrm{e}^{-ay}A^*\mathrm{e}^{ay}$$

为 A_a 的共轭。我们将用投影算子去证明权重扰动 ω 的衰减，ω 为 $\partial_t\omega = A_a\omega + \mathscr{G}$ 的解，要求 ω 和 $\mathrm{Ker}_g(A_a^*)$ 正交。

对 y 和 c 微分式(7.7.1)的孤立波，可得

$$L_c\partial_y u_c = 0,(A\partial_y u_c = 0),$$

$$A\partial_c u_c = -\partial_y u_c,(A^2\partial_c u_c = 0)$$

其中

$$A = -\partial_y(I-\partial_y^2)^{-1}(-c\partial_y^2 + c - 1 - u_c)$$

A_a 和 A_a^* 的广义零空间如下：

命题7.7.4 设 $0<a<\sqrt{(c-1)/c}$，令

$$\tilde{\xi}_1 = \partial_y u_c,\tilde{\xi}_2 = \partial_c u_c,$$

$$\tilde{\eta}_1 = \theta_2(I-\partial_y^2)u_c + \theta_1[\partial_y\partial_c u_c - \int_{-\infty}^{y}\partial_c u_c],$$

$$\tilde{\eta}_2 = \theta_3(I-\partial_y^2)u_c$$

其中

$$\theta_1 = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}\mathscr{N}[u_c])^{-1},$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}\oint[u_c])^2(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}\mathscr{N}[u_c])^{-2},$$

$$\theta_3 = -\theta_1,$$

$$\mathscr{N} = \frac{1}{2}\int u_c^2 + (\partial_y u_c)^2,\ \oint = \int u_c$$

令

$$\xi_i = \mathrm{e}^{ay}\tilde{\xi}_i,\eta_i = \mathrm{e}^{-ay}\tilde{\eta}_i,i = 1,2 \qquad (7.7.24)$$

则 $\{\xi_1,\xi_2\}$ 和 $\{\eta_1,\eta_2\}$ 为 $\mathrm{Ker}_g(A_a)$ 和 $\mathrm{Ker}_g(A_a^*)$ 的正交基，即有

$$\mathrm{Ker}_g(A_a) = \mathrm{span}\{\xi_1,\xi_2\}\subset L^2,$$

$$\mathrm{Ker}_g(A_a^*) = \mathrm{span}\{\eta_1,\eta_2\}\subset L^2,$$

$$\langle \eta_i, \xi_j \rangle = \delta_{ij}, i, j = 1, 2$$

其中$\langle \cdot, \cdot \rangle$表示 L^2内积，$A_a^* \eta_1 = 0$，$A_a^* \eta_2 = \eta_1$。

证明 验证

$$A^* g_1(y) = 0, A^{*2} g_2(y) = 0$$

其中

$$g_1(y) = (I - \partial_y^2) u_c,$$

$$g_2(y) = \int_{-\infty}^{y} \partial_c u_c(z) \mathrm{d}z - \partial_y \partial_c u_c(y)$$

进一步有

$$\langle g_1, \tilde{\xi}_1 \rangle = 0, \langle g_2, \tilde{\xi}_1 \rangle = -\partial_c \mathcal{N}[u_c],$$

$$\langle g_2, \tilde{\xi}_2 \rangle = \int [(\partial_c u_c) \int_{-\infty}^{y} \partial_c u_c] = \frac{1}{2} (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c} \int [u_c])^2,$$

$$\langle g_1, \tilde{\xi}_2 \rangle = \partial_c \mathcal{N}[u_c]$$

由此推出$\langle \tilde{\eta}_i, \tilde{\xi}_j \rangle = \delta_{ij}$，由式(7.7.24)即得命题结论。

用 P 表示 L^2投影到 A_a 的零特征空间。令 $Q = I - P$，因此

$$P\varphi = \langle \varphi, \eta_1 \rangle \xi_1 + \langle \varphi, \eta_2 \rangle \xi_2,$$

$$\varphi = P\varphi + Q\varphi, \varphi \in L^2(\mathbf{R})$$

现作半群和非线性的衰减估计。

定理7.7.5 设$0 < a < \sqrt{(c-1)/c}$，$\lambda = 0$为 A_a 在闭的右半平面的仅有特征值。令 Q 表示 L^2投影到 $Ker_g(A_a^*)^{\perp}$。则初值问题

$$\partial_t w = A_a w,$$

$$w|_{t=0} = w_0 \in H^1 \cap \text{range } Q$$

具有唯一解 $w(t) = e^{A_0 t} w_0 \in \mathbf{C}_0([0, \infty), H^1)$，且

$$\|w(t)\|_{H^1} \leqslant c e^{-bt} \|w_0\|_{H^1} \tag{7.7.25}$$

其中 $c > 0$，$b > 0$。等价地，A_a 形成依函数空间 $X = H^1(\mathbf{R}) \cap (Ker_g(A_a^*))^{\perp}$ 的模指数衰减的 C_0半群，衰减估计(7.7.25)成立，其中 $-b \in (-b_{\max}, 0)$，$-b_{\max} = \inf\{-b \mid \lambda = 0$为 A_a 在 $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant -b > -w$ 上仅有特征值$\}$。

命题的证明基于如下的 Prüss 在文献[212]中关于预解式$(\lambda I$

$-A_a)^{-1}$的估计。

定理7.7.6[259] 设 B 为在 Hilbert 空间 Z 上形成的 C_0 半群的无穷小生成子，如存在 $M>0$，使得

$$\|(\lambda I - B)^{-1}\|_{Z\to Z} \leqslant M, \mathrm{Re}\,\lambda > -b \tag{7.7.26}$$

则有

$$\|e^{Bt}\|_{Z\to Z} \leqslant e^{-bt}$$

以下证明非线性衰减估计。设 $u(x,t)$ 为 BBM 方程

$$(I-\partial_x^2)\partial_t u + \partial_x\left(u + \frac{u^2}{2}\right) = 0$$

的解，$u(x,t)$ 可表示为

$$\begin{cases} u(x,t) = u_{c(t)}(y(x,t)) + \nu(y(x,t),t), \\ y(x,t) = x - \displaystyle\int_0^t c(s)\mathrm{d}s + \gamma(t) \end{cases} \tag{7.7.27}$$

设 $u_{c(t)}$ 为 BBM 的孤立波解，则可得扰动 ν 满足的方程

$$(I-\partial_y^2)\partial_t\nu = \partial_y L_{c(t)}\nu + \mathscr{F}_1(\nu, u_{c(t)}, \dot{c}, \dot{\gamma}) \tag{7.7.28}$$

其中

$$L_{c(t)} = (-c(t)\partial_y^2 + c(t) - 1 - u_{c(t)}),$$

$$\mathscr{F}_1 = -(I-\partial_y^2)(\dot{\gamma}\,\partial_y u_c + \dot{c}\,\partial_c u_c) - \dot{\gamma}\,(I-\partial_y^2)\partial_y\nu - \frac{1}{2}\partial_y(\nu^2)$$

选取

$$\tau = \int_0^t c(s)\mathrm{d}s - \gamma(t) \tag{7.7.29}$$

可得 $\nu(y,\tau)$ 满足的方程

$$\partial_\tau\mu = \frac{1}{c_0}A\nu + \mathscr{F}(v),$$

$$\mathscr{F}(v) = \frac{1}{c_0}\left(-1 + \frac{c - c_0 - \dot{\gamma}}{c - \dot{\gamma}}\right)(\dot{\gamma}\,\partial_y u_c + \dot{c}\,\partial_c u_c) +$$

$$\frac{1}{c_0}(I-\partial_y^2)^{-1}((u_c - u_{c_0})\nu) +$$

$$\frac{1}{c_0}\frac{c-c_0-\dot{\gamma}}{c-\dot{\gamma}}(I-\partial_y^2)^{-1}\partial_y(u_c\nu-\nu)-$$

$$\frac{1}{c-\dot{\gamma}}(I-\partial_y^2)^{-1}\partial_y(\frac{1}{2}\nu^2)$$

其中

$$A=(I-\partial_y^2)^{-1}\partial_y L_{c_0},$$

$$L_{c_0}=-c_0\partial_y^2+c_0-1-u_{c_0}$$

引人权重扰动 $w(y,\tau)=e^{ay}\nu(y,\tau)$满足

$$\partial_t w=\frac{1}{c_0}A_a w+\mathscr{G}(w,\nu,u_c,\dot{c},\dot{\gamma})$$

其中

$$\mathscr{G}=e^{ay}\mathscr{F}=\frac{1}{c_0}(-1+\frac{c-c_0-\dot{\gamma}}{c-\dot{\gamma}})e^{ay}(\dot{\gamma}\,\partial_y u_c+\dot{c}\partial_c u_c)+\tilde{\mathscr{G}},$$

$$\tilde{\mathscr{G}}=\mathscr{G}_1+\mathscr{G}_2+\mathscr{G}_3,$$

$$\mathscr{G}_1=\frac{1}{c_0}(I-D_a^2)^{-1}D_a((u_c-u_{c_0})w),$$

$$\mathscr{G}_2=\frac{1}{c_0}\frac{c-c_0-\dot{\gamma}}{c-\dot{\gamma}}(I-D_a^2)^{-1}D_a(u_c w-w),$$

$$\mathscr{G}_3=-\frac{1}{c-\dot{\gamma}}(I-D_a^2)^{-1}D_a(\frac{1}{2}w\nu) \qquad (7.7.30)$$

设 P 为 L^2投影到 A_a 的二维零特征空间,$Q=I-P$。为了得到 $\|w(\cdot,t)\|_{H^1}\to 0,t\to\infty$,置

$$\partial_t w=\frac{1}{c_0}A_a w+Q\mathscr{G},$$

$$P\mathscr{G}=0,$$

$$Pw(0)=0 \qquad (7.7.31)$$

条件 $P\mathscr{G}=0$导致调制方程组,它表示式(7.7.21)中的 $c(t)$,$\gamma(t)$应满足的方程。$P\mathscr{G}=0$由命题7.7.4,它等价于条件

$$\langle\eta_i,\mathscr{G}\rangle=0,i=1,2 \qquad (7.7.32)$$

其中$\{\eta_1,\eta_2\}$为共轭核空间 $\mathrm{Ker}_g(A_a^*)$的基。利用命题7.7.4中 η_1,η_2 的定义，由命题7.7.4，可找到条件(7.7.32)成立的充要条件

$$\mathscr{A}(t)\begin{pmatrix}\dot{\gamma}\\ \dot{c}\end{pmatrix}=c_0\left(1-\frac{c-c_0-\dot{\gamma}}{c-\dot{\gamma}}\right)\begin{pmatrix}\langle\eta_1,\widetilde{\mathscr{G}}\rangle\\ \langle\eta_2,\widetilde{\mathscr{G}}\rangle\end{pmatrix}$$

其中

$$\mathscr{A}(t)=\begin{pmatrix}\langle\tilde{\eta}_1,\partial_y u_c\rangle & \langle\tilde{\eta}_1,\partial_c u_c\rangle\\ \langle\tilde{\eta}_2,\partial_y u_c\rangle & \langle\tilde{\eta}_2,\partial_c u_c\rangle\end{pmatrix}$$

令

$$e_1(y,t)=\partial_y u_{c(t)}(y)-\partial_y u_{c_0}(y),e_2(y,t)=\partial_c u_{c(t)}(y)-\partial_c u_{c_0}(y),$$

则由$\langle\eta_i,\xi_j\rangle=\delta_{ij}$，可得

$$\mathscr{A}(t)=\begin{pmatrix}1+\langle\tilde{\eta}_1,e_1\rangle & \langle\tilde{\eta}_1,e_2\rangle\\ \langle\tilde{\eta}_2,e_1\rangle & 1+\langle\tilde{\eta}_2,e_2\rangle\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+O(|c(t)-c_0|)$$

因此，当$|c(t)-c_0|+|\dot{\gamma}(t)|$很小时，矩阵 $\mathscr{A}$ 是可逆的。条件 $P\mathscr{G}=0$等价于调制方程

$$\begin{pmatrix}\dot{\gamma}\\ \dot{c}\end{pmatrix}=\mathscr{B}(t)\begin{pmatrix}\langle\eta_1,\widetilde{\mathscr{G}}\rangle\\ \langle\eta_2,\widetilde{\mathscr{G}}\rangle\end{pmatrix}\qquad(7.7.33)$$

其中$\|\mathscr{B}(t)\|\leqslant c$。

用隐函数定理可以证明，解 $u(x,t)\to(\nu(y,t),\gamma(t),c(t))$的局部存在性以及解的连续延拓性。

命题7.7.6　设$0<a<\sqrt{(c_0-1)/c_0}$，s 为实数，$t_1\geqslant0$，则存在$\delta_0,\delta_1>0$，使得如下成立：对任何实数 γ_0，如果 $u(x,t)$使得

$$\mathrm{e}^{ax}u\in C([0,t_1],H^s)\qquad(7.7.34)$$

且

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant t_1}\|\mathrm{e}^{a(\cdot+\gamma_0)}(u(\cdot,t)-u_{c_0}(\cdot-c_0t+\gamma_0))\|_{H^s}<\delta_0$$

则存在唯一函数 $t\to(\gamma(t),c(t))$，

$$\begin{cases}(\gamma,c)\in C([0,t_1],\mathbf{R}^2),\\ \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant t_1}|\gamma(t)-\gamma_0|+|c(t)-c_0|<\delta_1\end{cases}\tag{7.7.35}$$

使得

$$\mathscr{F}_k[u,\gamma,c](t)=-\int_{-\infty}^{\infty}[u(x,t)-u_{c(t)}(y)]\mathrm{e}^{ay}\eta_k(y)\mathrm{d}y=0$$

其中 $k=1,2,0\leqslant t\leqslant t_1,y=x-\int_0^t c(s)\,\mathrm{d}s+\gamma(t)$，$\delta_0$能被选取为 t_1 的单调递减函数。映照 $u\to(\gamma,c)$ 从式(7.7.34)、(7.7.35)可知是解析的。如果 $\mathrm{e}^{ax}u\in C^m([0,t_1),H^s)$，$m>0$，则 $(\gamma,c)\in C^m([0,t_1),\mathbf{R}^2)$。

命题7.7.7 存在 $\delta_0,\delta_1>0$，使得对任何 $t_0>0$，如果

$$\mathrm{e}^{ax}u\in C([0,t_0],H^s),$$
$$\sup_{0\leqslant t\leqslant t_0}\|\mathrm{e}^{ay}v(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant\delta_0/3$$

其中

$$v(y,t)=u(x,t)-u_{c(t)}(y),y=x-\int_0^t c(s)\mathrm{d}s+\gamma(t)$$

如

$$(\gamma,c)\in C([0,t_0],\mathbf{R}^2),\sup_{0\leqslant t\leqslant t_0}|c(t)-c_0|\leqslant\delta_1,$$
$$\mathscr{F}[u,\gamma,c](t)=0,0\leqslant t\leqslant t_0$$

则存在(γ,c)唯一的解析延拓

$$(\gamma,c)\in C([0,t_0+t_*],\mathbf{R}^2),t_*>0$$

且

$$\mathscr{F}[u,\gamma,c](t)=0,0\leqslant t\leqslant t_0+t$$

更进一步，如

$$\mathrm{e}^{ax}u\in C^m([0,\infty),H^s)$$

则

$$(\gamma,c)\in C^m([0,t_0+t_*),\mathbf{R}^2)$$

命题7.7.8 设 $u(x,t)$为 BBM 方程具初值

$$u_0(x) = u(x,0) = u_{c_0}(\cdot + \gamma_0) + \nu_0(x) \in H^2 \cap H_a^1 \tag{7.7.36}$$

的解。设分解 $u(x,t) \to (\nu(y,t), c(t), \gamma(t))$在区间$0 \leqslant t \leqslant T$上存在，其中$|c(t) - c_0| < M$，$t$充分小，$t \in [0,T]$。令$z = u_{c(t)} - u_{c_0} + \nu$，则存在常数$c, D > 0$，使得对$0 \leqslant t \leqslant T$有

$$\|\nu\|_{H^1}^2 (1 - D\|\nu\|_{H^1}) \leqslant c(|\delta\varepsilon| + |c(t) - c_0|^2 + \|w\|_{L^2}^2)$$

其中

$$\delta\varepsilon = \varepsilon[u(\cdot,t)] - \varepsilon[u_{c_0}(y)] = \varepsilon[u(\cdot,0)] - \varepsilon[u_{c_0}]$$

证明 令 $L_{c_0} = -c_0\partial_y^2 + c_0 - 1 - u_{c_0}$，则有

$$\delta\varepsilon = \varepsilon[u_{c_0} + z] - \varepsilon[u_{c_0}] = -\frac{1}{2}\int zL_{c_0}z + \frac{1}{6}\int z^3 =$$

$$-\frac{1}{2}\int \nu L_{c_0}\nu - \int (u_{c(t)} - u_{c_0})L_{c_0}\nu -$$

$$\frac{1}{2}\int (u_{c(t)} - u_{c_0})L_{c_0}(u_{c(t)} - u_{c_0}) + \frac{1}{6}\int z^3 \tag{7.7.37}$$

现估计式(7.7.37)中右端的各项。首先

$$\left| -\int (u_{c(t)} - u_{c_0})L_{c_0}\nu \right| = \left| \int [\mathrm{e}^{-ay}L_{c_0}(u_{c(t)} - u_{c_0})]w \right| \leqslant$$

$$C(|c - c_0|^2 + \|w\|_{L^2}^2) \tag{7.7.38}$$

$$-\frac{1}{2}\int (u_{c(t)} - u_{c_0})L_{c_0}(u_{c(t)} - u_{c_0}) \leqslant c|c(t) - c_0|^2 \tag{7.7.39}$$

$$-\frac{1}{2}\int \nu L_{c_0}\nu = -\frac{1}{2}\int [c_0\nu_x^2 + (c_0 - 1)\nu^2] + \frac{1}{2}\int u_{c_0}\nu^2 \tag{7.7.40}$$

将(7.7.40)代入(7.7.37)得

$$\frac{1}{2}\int c_0\nu_x^2 + (c_0 - 1)\nu^2 = -\delta\varepsilon - \int (u_{c(t)} - u_{c_0})L_{c_0}\nu -$$

$$\frac{1}{2}\int (u_{c(t)} - u_{c_0})L_{c_0}(u_{c(t)} - u_{c_0}) + \frac{1}{6}\int z^3 + \frac{1}{2}\int u_{c_0}\nu^2 \tag{7.7.41}$$

我们有

$$\frac{1}{2}\int u_{c_0}\nu^2 = \frac{1}{2}\int e^{-2ay}u_{c_0}w^2$$

因此

$$\left|\frac{1}{2}\int u_{c_0}\nu^2\right| \leqslant C(a)\|w\|_{L^2}^2 \qquad (7.7.42)$$

由不等式(7.7.38)、(7.7.39)、(7.7.41)、(7.7.42)有

$$\frac{1}{2}\int c_0\nu_x^2 + (c_0 - 1)\nu^2 \leqslant |\delta\varepsilon| +$$

$$C(\|w\|_{L^2}^2 + |c(t) - c_0|^2) + C\|w\|_{L^2}^2 + \frac{1}{6}\left|\int z^3\right|$$

由于$\|z\|_{L^3}\leqslant C|z\|_{H^1}$，可得

$$\|\nu\|_{H^1}^2(1 - D\|\nu\|_{H^1}) \leqslant C(|\delta\varepsilon| + |c(t) - c_0|^2 + \|w\|_{L^2}^2)$$
$$(7.7.42)'$$

命题7.7.9 设$0<a<a_*(c_0)$，$T>0$，$b\in(0,b_{\max})$，则存在$\delta_*>0$，$\varepsilon_*>0$，使得如果$u(x,t)\in C([0,T],H^1\cap H_a^1)$为BBM方程的一个解，以及以下条件如果成立：

(i)对$t\in[0,T]$，分解$u(x,t)\to(\nu(y,t),c(t),\gamma(t))$存在；

(ii)对$0\leqslant t\leqslant T$，有

$$\sqrt{\delta\varepsilon} + \|w(\cdot,t)\|_{H^1} + |c(t) - c_0| + \left|\frac{c(t) - c_0 - \dot{\gamma}(t)}{c - \dot{\gamma}}\right| +$$

$$\|\nu(\cdot,t)\|_{H^1} \leqslant \delta_* \qquad (7.7.43)$$

其中$\delta\varepsilon=\varepsilon[u(y,0)]-\varepsilon[u_{c_0}(y)]$；

(iii) $|c(0)-c_0|+\sqrt{\delta\varepsilon}+\|w(\cdot,0)\|_{H^1}<\varepsilon_*$，

则存在$C>0$，使得$0\leqslant t\leqslant T$有

$$e^{kat}\|w(\cdot,t)\|_{H^1} + |c(t) - c_0| + \left|\frac{c(t) - c_0 - \dot{\gamma}(t)}{c - \dot{\gamma}}\right| +$$

$$\|\nu(\cdot,t)\|_{H^1} \leqslant C\varepsilon_* \qquad (7.7.44)$$

其中$k=1+2\delta_*/c_0$。

证明 如δ_*充分小，设

$$\left|\frac{1}{c(t)-\dot{\gamma}(t)}-\frac{1}{c_0}\right|<\delta.$$

推出变换$t\to\tau=\int_0^t c(s)\mathrm{d}s-\gamma(t)$在$t\in[0,T]$上成立。对$w$的方程(7.7.31)，应用半群的衰减估计，即得要求的估计。

首先估计$|\dot{c}|+|\dot{\gamma}|$。由调制方程(7.7.33)，

$$\begin{pmatrix}\dot{\gamma}\\ \dot{c}\end{pmatrix}=\mathscr{B}(t)\begin{pmatrix}\langle\eta_1,\tilde{\mathscr{G}}\rangle\\ \langle\eta_2,\tilde{\mathscr{G}}\rangle\end{pmatrix}$$

其中$\mathscr{B}(t)=I+O(|c(t)-c_0|+|\dot{\gamma}(t)|)$。选取$\delta_*$如此小使得$\mathscr{A}(t)$可逆，且(7.7.43)成立，则

$$|\dot{\gamma}(t)|+|\dot{c}(t)|\leqslant c\|\tilde{\mathscr{G}}(t)\|_{L^2}\leqslant$$
$$C(\|\mathscr{G}_1\|+\|\mathscr{G}_2\|+\|\mathscr{G}_3\|)$$

其中C依赖于δ_*。直接从式(7.7.30)，$\|\mathscr{G}_j\|$能估计如下：

$$\|\mathscr{G}_1\|\leqslant C|c(t)-c_0|\|w\|_{H^1},$$
$$\|\mathscr{G}_2\|\leqslant C(|c(t)-c_0|+|\dot{\gamma}(t)|+|\dot{\gamma}(t)|)\|w\|_{H^1},$$
$$\|\mathscr{G}_3\|\leqslant C(|\nu\|_{H^1}\|w\|_{H^1} \tag{7.7.45}$$

于是

$$\|\tilde{\mathscr{G}}\|_{L^2}\leqslant c(|c(t)-c_0|+\|\nu(\cdot,t)\|_{H^1})\|w(\cdot,t)\|_{H^1}$$

因此基于式(7.7.43)有

$$|\dot{\gamma}(t)|+|\dot{c}(t)|\leqslant C(|c(t)-c_0|+$$
$$\|\nu(\cdot,t)\|_{H^1})\|w(\cdot,t)\|_{H^1}\leqslant C\delta_*^2 \tag{7.7.46}$$

为估计$\|w(\tau)\|_{H^1}$，写(7.7.31)为等价的积分方程

$$w(\tau)=\mathrm{e}^{A_a\tau/c_0}w(0)+\int_0^t\mathrm{e}^{A_a(\tau-s)/c_0}Q\mathscr{G}(s)\mathrm{d}s \tag{7.7.47}$$

利用命题7.7.5关于半群的衰减估计，有

$$\mathrm{e}_{(b/c0)\tau}\|w(\tau)\|_{H^1}\leqslant C\|w(0)\|_{H^1}+C\int_0^\tau\mathrm{e}^{(b/c_0)s}\|Q\mathscr{G}(s)\|_{H^1}\mathrm{d}s$$

再估计$\|\mathscr{G}\|_{H^1}$。由式(7.7.30)

$$\|\mathscr{G}\| \leqslant C(1 + |\frac{c(t) - c_0 + \dot{\gamma}(t)}{c(t) - \dot{\gamma}(t)}|)(|\dot{\gamma}| + |\dot{c}|) +$$

$$C(\|\mathscr{G}_1\| + \|\mathscr{G}_2\| + \|\mathscr{G}_3\|) \qquad (7.7.48)$$

联合式(7.7.48)和式(7.7.43),(7.7.46)和(7.7.45)有

$$\|\mathscr{G}\| \leqslant C\delta_* \|w\|_{H^1}$$

从式(7.7.47)对 w 的积分方程可得,$0 \leqslant \tau \leqslant \tau(T)$,

$$\|w(\tau)\|_{H^1} \leqslant C e^{-(b/c_0)\tau} \|w(0)\|_{H^1} +$$

$$C\delta_* \int_0^{\tau} e^{-(b/c_0)(\tau - s)} \|w\|_{H^1} ds \qquad (7.7.49)$$

选取 $b' \in (b, b_{max})$,注意式(7.7.49)当 b' 置换 b 时仍成立,令

$$M_*(T) = \sup \{e^{(b/c_0)\tau} \|w(\tau)\|_{H^1} \mid 0 \leqslant \tau \leqslant \tau(T)\}$$

则对 $0 \leqslant \tau \leqslant \tau(T)$ 有

$$e^{(b/c_0)\tau} \|w(\tau)\|_{H^1} \leqslant C e^{((b' - b)/c_0)\tau} \|w(0)\|_{H^1} +$$

$$C\delta_* M_*(T) \int_0^{\tau} e^{-((b' - b)/c_0)(\tau - s)} ds = C e^{-((b' - b)/c_0)\tau} \|w(0)\|_{H^1} +$$

$$C\delta_* M_*(T) (\frac{c_0}{b' - b})(1 - e^{-((b' - b)/c_0)\tau})$$

取 $\sup\limits_{0 \leqslant \tau \leqslant \tau(T)}$ 于上式两端得

$$M_*(T) \leqslant C\|w(0)\|_{H^1} + C\delta_* M_*(T)(c_0/(b' - b))$$

能选取 δ_* 如此小使得

$$M_*(T) = \sup \{e^{(b/c_0)\tau} \|w(\tau)\|_{H^1} \mid 0 \leqslant \tau \leqslant$$

$$\tau(T)\} \leqslant 2C\|w(0)\|_{H^1}$$

由于变换 $t \to \tau$ 是有界的,因此

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} e^{kbt} \|w(t)\|_{H^1} \leqslant C\|w(0)\|_{H^1}, C > 0 \qquad (7.7.50)$$

其中 $k = 1 + 2\delta_*/c_0$。进一步,将式(7.7.50)代入式(7.7.42)′,得

$$\|v\|_{H^1} \leqslant C(\sqrt{\delta\varepsilon} + |c - c_0| + \|w(0)\|_{H^1}) \qquad (7.7.51)$$

为建立式(7.7.44),只有估计 $|c - c_0|$ 和

$$|\frac{1}{c - \dot{\gamma}} - \frac{1}{c_0}| = |\frac{c - c_0 - \dot{\gamma}}{c - \dot{\gamma}}|$$

用$|c(0)-c_0|+\sqrt{\delta\varepsilon}-\|w(0)\|_{H^1}$估计，为此，回到变元$\tau$，因$\frac{d\tau}{dt}=c(t)-\dot{\gamma}(t)$，我们有

$$c(\tau)=c(0)-\int_0^{\tau}\frac{dc}{ds}(s)ds=c(0)-\int_0^{\tau}\frac{1}{(c-\dot{\gamma})}\dot{c}(s)ds$$

对于$0\leqslant\tau\leqslant\tau(T)$，有

$$|c(\tau)-c_0|\leqslant|c(0)-c_0|+\int_0^{\tau}\left|\frac{1}{c-\dot{\gamma}}\right|\,|\dot{c}|ds\leqslant|c(0)-c_0|+$$

$$\sup_{0\leqslant\tau\leqslant\tau(T)}\left|\frac{1}{c-\dot{\gamma}}\right|C\int_0^t(\sqrt{\delta\varepsilon}+|c-c_0+\|w\|_{L^2})\|w\|_{H^1}ds\leqslant$$

$$|c(0)-c_0|+C\delta_*M_*(T)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant\tau(T)}\left|\frac{1}{c-\dot{\gamma}}\right|\int_0^{\tau}e^{-bs}ds\leqslant$$

$$|c(0)-c_0|+C\delta_*(1+2\delta_*)M_*(T)/b\leqslant$$

$$|c(0)-c_0|+C\delta_*(1+2\delta_*)\|w(0)\|_{H^1}/b\leqslant$$

$$|c(0)-c_0|+C|w(0)\|_{H^1}$$

最后

$$\left|\frac{1}{c-\dot{\gamma}}-\frac{1}{c_0}\right|\leqslant(|c-c_0|+|\dot{\gamma}|)/(1-|\dot{\gamma}|)$$

因

$$|\dot{\gamma}|\leqslant c(|c-c_0|+\|\nu\|_{H^1})\|w\|_{H^1}\leqslant$$
$$C\delta_*\|w(0)\|_{H^1}\leqslant C\delta_*^2$$

对δ_*充分小可得

$$\left|\frac{1}{c-\dot{\gamma}}-\frac{1}{c_0}\right|\leqslant C(|c-c_0|+|\dot{\gamma}|)\leqslant$$

$$C(|c(0)-c_0|+\|w(0)\|_{H^1})+C|\dot{\gamma}|)\leqslant$$

$$C(|c(0)-c_0|+\|w(0)\|_{H^1})+$$

$$C(|c-c_0|+\|\nu\|_{H^1})\|w\|_{H^1}\leqslant$$

$$C(\sqrt{\delta\varepsilon}+|c(0)-c_0|+\|w(0)\|_{H^1})$$

这就完成了证明。

命题7.7.10 设 $u(x,t)$ 为 BBM 方程具初值

$$u_0 = u(x,0) = u_{c_1}(x+\gamma_0) + \nu_0(x) \in H^2 \cap H_a^1 \tag{7.7.52}$$

的一个解，则存在 $\varepsilon>0$ 使得如果

$$\|u(\cdot,0) - u_{c_0}(\cdot)\|_{H_a^1} < \varepsilon,$$

$$\sqrt{\delta\varepsilon} + \|u(\cdot,0) - u_{c_0}(\cdot)\|_{H^1} < \varepsilon$$

则以下要求成立：

要求1. 存在 $t_*>0$ 使得

(1) 分解 $u(x,t) \to (\nu(y,t),\gamma(t),c(t))$ 成立，$0\leqslant t\leqslant t_*$；

(2) 不等式(7.7.43)成立，$0\leqslant t\leqslant t_*$。

要求2。集合 $M=\{T|(1)$ 和 (2) 成立对 $t_*=T\}$ 是在 $[0,\infty)$ 闭的。

要求3。集合 M 在 $[0,\infty)$ 中是开的，因此 $M=[0,\infty)$。

证明 对于要求1，易知 $u_0\in H^2(\mathbf{R})\cap H_a^1(\mathbf{R})$，则映照

$$t \to \|u(\cdot,t)\|_{H^1} + \|u(\cdot,t)\|_{H_a^1}$$

对 $t\in[0,\infty)$ 是连续的，因此存在 $\varepsilon_1>0, t_1>0$，使得如果

$$\|u(\cdot,0) - u_{c_0}(\cdot)\|_{H_a^1} < \varepsilon_1$$

则有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant t_1} \|u(\cdot,t) - u_{c_0}(\cdot - c_0 t)\|_{H_a^1} < \delta_0$$

其中 δ_0 为命题7.7.6所确定。由命题7.7.6知分解

$$u(x,t) \to (\nu(y,t),\gamma(t),c(t))$$

在 $0\leqslant t\leqslant t_1$ 上存在。从式(7.7.43)左端可知量

$$\sqrt{\delta\varepsilon} + \|w(\cdot,t)\|_{H^1} + |c(t) - c_0| + \|\nu(\cdot,t)\|_{H^1}$$

对 t 是连续的，$0\leqslant t\leqslant t_1$，因此存在 $\varepsilon_2>0, t_*\in(0,t_1]$，使得如果

$$\sqrt{\delta\varepsilon} + \|u(\cdot,0) - u_{c_0}(\cdot)\|_{H^1} + |c(0) - c_0| < \varepsilon_2$$

则(4.37)在 $0\leqslant t\leqslant t_*$ 上成立。

要求2的证明。这从 (γ,c)，$\mathscr{F}_k(k=1,2)$ 的连续性以及(4.37)

左端作为 t 的函数连续性推出。

要求3的证明。在命题7.7.9中选取 ε_* 使得 $C\varepsilon_* < \min\{\delta_0/3, \delta_1\}$，其中 C 如同命题7.7.9，δ_0，δ_1如同命题7.7.7。

设 $T \in M$，如 $|c(0)-c_0| + \sqrt{\delta\varepsilon} + \|w(\cdot,0)\|_{H^1} < \varepsilon_*$，则

$$e^{kbt}\|w(\cdot,t)\|_{H^1} + |c(t) - c_0| + \left|\frac{c - c_0 - \dot{\gamma}}{c - \dot{\gamma}}\right| + \|\nu(\cdot,t)\|_{H^1} < C\varepsilon_*, t \in [0,T],$$

特别

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|e^{a\gamma}\nu(\cdot,t)\|_{H^1} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|w(\cdot,t)\|_{H^1} \leqslant$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} e^{kbt}\|w(\cdot,t)\|_{H^1} \leqslant c\varepsilon \leqslant \delta_0/3,$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|c(t) - c_0| < c\varepsilon_* < b_1$$

由命题7.7.9，分解 $(\gamma(t),c(t))$ 能扩展到区间 $[0,T_*]$，$T_* > T$。如 $\sqrt{\delta\varepsilon} < \delta_*/2$，$C\varepsilon_* < \delta_*/2$，则严格不等式(4.37)在 $0\leqslant t\leqslant T$ 上成立。由连续性，在 $0\leqslant t\leqslant T_{**}$ 上成立，$T<T_{**}<T_*$，因此 $[0,T_{**}) \subseteq M$，M 为开的，证毕。

可完成定理7.7.2的证明。关键在于由不等式(7.7.46)和式(7.7.44)推出 $\dot{\gamma}(t)$ 和 $\dot{c}(t)$ 的指数衰减，因此如下极限存在

$$\gamma_+ = \lim_{t\to\infty}\gamma(t), c_+ = \lim_{t\to\infty}c(t)$$

参 考 文 献

1 Makhankov V G. On stationary solutions of Schrödinger equations with a self-consistent potential satisfying Boussinesq's equations. Phys Lett, 1974, A 500:42~44

2 Nishikawa K, Hejo H, Mima K. et al. Coupled nonlinear electron-plasma and Ion-acoustic waves. Phys Rev Lett, 1974, 33:148~150

3 Zakharov V E, Shabat A B. Integrable system of nonlinear equations in mathematical physics. Funct Anal Appl, 1974, 83:43~53.

4 Guo Boling. The global solution of the system of equations for complex Schrödinger field coupled with Boussinesq type self-consistent field. Acta Math Sini, 1983, 26: 297～306.

5 Guo Boling, Shen Longjun. The global solution of initial value equation for nonlinear Schrödinger-Boussinesq equation in 3-dimensions. Acta Math Appl Sini, 1993, 6: 223～233

6 Baillon J B., Chadam J M. The Cauchy problem for the coupled Schrödinger-Klein-Gordon equations. In: Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equation. Marth-Holland, Amsterdam, New York: 1978, 37～44

7 Fukuda I, Tsutsumi M. On coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations I. Math Appl, 1978, 66: 358～378

8 Guo Boling, Mial Changxing. Asymptotic behavior of coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations. Sci China Ser, 1995, A 25(7): 705～714

9 Hayashi N, Von Wahl W. On the global strong solution of coupled Klein-Schrödinger equations, J Math Soc, Japan: 1987, 39: 489～497

10 Biler P. Attractors for the system of Schrödinger and Klein-Gordon equations with Yukawa coupling. SIAM-J Math Anal, 1990, 21(5): 1190～1212

11 Li Yongsheng. Finite dimension of global attractor for weakly dissipative Klein-Gordon-Schrödinger Equation. Preprint

12 Guo Boling, Wu Yonghui. Remarks on the global attractor of the weakly dissipative Benjamin-Ono equation. Northeastern J Math, 1995, 11(4): 489～496.

13 Ghidaglia J M. Finite dimensional behavior for weakly and damped driven Schrödinger equation. Analyse Nonlineaire, Inst. Henri Poincare: 1988, 365～405

14 Joseph R I. Solitary waves in a Finite Depth Fluid. J Phys A, Math Gen, 1997, 10: 225～227

15 Zhou Yulin, Guo Boling. Initial value problems for a nonlinear singular integral-differential equation of deep water. Lecture Notes in Mathematics, 1305, S. S. Chen(ed). 1986, 278～290

16 Rafael Jose Iorio, Jr., On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation, Comm Part Diff Eqs, 1986, 11: 1030～1984

17 Brand H R, Deissler R J. Interaction of localized solutions for subcritical bifurcations. Phys Rev Lett 1989: 63: 2801～2804

18 Deissler R J, Brand H R. Generation of counterpropagating nonlinear interacting traveling waves by localized noise. Phys Lett 1977: A 130: 293～296

19 Haken H. Synergetics-An introduction, Springer, New York: 1987

20 Duan J, Holmes P, Titi E S. Global existence theory for a generalized Ginzburg-Landau equation. Nonlinearity, 1992, 5: 1303～1314

21 Duan J, Holmes P. On the Cauchy problem of generalized Ginzhurg-Laudau equation. Nonlinear Anal, 1994, TMA, 22: 1033～1040

22 Guo Boling, Gao Hongjun. Finite dimensional behavior of generalized Ginzburg-Landau equation. Progress in Natural Science, 1995, 5(6): 649～610

23 Bartuccelli M V, Constantin P, Doering C, et al. On the possibility of soft and hard turbulence in the complex Ginzburg-Landau equation. Phys 1990, D 44: 421～444

24 Doering C R, Gibbon J D, Levermore C D. Weak and strong solutions of the complex Ginzburg-Landau equation. Phys, 1994, D 71: 285～318

25 Guo Boling, Wang Bixiang. Finite dimensional behavior for the derivative Ginzburg-Landau equation in two spatial dimensions. Phys, 1995, D 89: 83～90

26 Davey A, Hocking L M, Stewartson K. On the nonlinear evolution of three-dimensional disturbances in plane poiseuille flow. J Fluid Mech, 1974, 63(3): 529～536

27 Davey A, Stewartson K. On three-dimensional packets of surface of Waves. J Fluid Mech, 1977, 79: 703～714

28 Djordjevic V D, Redekopp L G. On two-dimensional packets of capillary-gravity waves. J Fluid Mech, 1997, 79: 703～714

29 Ablowitz M J, Haberman R. Nonlinear evolution equations in two and three dimensions. Phys Rev Lett, 1975, 35: 1185～1188

30 Holmes C A. Bounds solutions of the nonlinear parabolic amplitude equation for plane poiseuille flow. Proc R London: 1985, A 402: 299～322

31 Ghidaglia J M. Saut J C. On the initial value problem for the Davey-Stewartson systems. Nonlinearity, 1990, 3: 475～506

32 Anker D, Freeman N C. On the soliton solutions of the Davey-Stewartson equation for long waves. Proc. R Soc London: 1978, A 360: 529～540

33 Ablowitz M J, Fokas A S. On the inverse scattering transform of multidimension nonlinear equations related to first order systems in the plane. J Math Phys, 1984, 25: 2494～2505

34 Tsutsumi M. Deacy of weak solutions to the Davey-Stewartson systems. J Math Anal Appl, 1994, 182(3): 680～704

35 Hayashi N, Saut J C. Global existence of small solutions to Davey-Stewartson and the Ishimori systems. Diff and Integ Eqs, 1995, 8: 1687～1675

36 Linares F, Ponce G. On the Davey-Stewartson systems. Ann. Inst. Henri. Poincare', Anal Nonlinear, 1993, 10: 523～548

37 Yang Linge, Guo Boling. Initial-boundary value problem for the Davey-Stewartson system. Prog Nat Sci, 1997, 7(3): 272～279

38 Guo Boling, Li Yongsheng. Long time behavior of solutions of Davey-Stewartson equations. to appear.

39 Kuramoto Y. Progr. Theoret. Phys Suppl, 1978, 64: 346～367

40 Sivashinsky G. Acta Astronant. 1977, 4: 1117～1266

41 Aimer M A, P Denar. Universits de TULON et da VAR. Preprint. 1982

42 Shang T, Vivashinsky G. Physique J de. 1983, 43: 459～466

43 Nicolaenko B, Schener B, Temam R. Comm Part Diff Eqs. 1984, 14(2): 245～297

44 Nicolaenko B. Nuclear Phys. 1987. B. 2: 453～484

45 Guo Boling, Jing Zhujun. On the generalized Kuramoto-Sivashinsky type equations with the dispersive effects. Ann Math Res 1992, 25(2): 1～24

46 Guo Boling. The Global attractors for the periodic initial value problem of generalized Kuramoto-Sivachinsky type equations. Prog Nat Science, 1993, 3(4): 327

47 Guo Boling, Su Fengqiu. The global attractors for the periodic initial value problem of generalized Kuramoto-Sivashinsky type equations in multi dimensions. J. PDE. 1993. 6(3): 217～236

48 Greenberg J M, MccCamy R C, Mizel V J. On the existence, uniqueness, and stability of solutions of the equation. J Math Mech 1968, 17: 707～728

49 Greenberg J M. On the existenxce, uniqueness and stability of the equation. J Math Anal Appl 1969, 25: 575～591

50 Fitzgibbon W E. Strong damped quasilinear evolution equations. J Math Anal Appl 1981, (2)79: 536～550

51 Chang Qianshun, Guo Boling. Finite difference solution for nonlinear wave equation. J Comp Math 1984 12(4): 297～304

52 Berkaliev Z B. An attractor for some quasilinear system of differential equations with viscoetastic terms. Russian Math Surveys, 1985, 40(1): 209～210

53 Berkaliev Z B. An attractor of a nonlinear evolutions equation of viscoetasticity. Moscow Univ: Math. Bull. 1985, 10(5): 61～63

54 Guo Boling, Su Fengqiu. The attractor for Landau-Lifshitz-Maxwell equations. to appear

55 Kupershmidt B A. A coupled KdV equation with dispersion. J Phys A Math Gen. 18, L571-L572. 1988

56 Ito M. Symmetries and conservation laws of a coupled nonlinear wave equation. Phys Lett, 1982, 91 A: 335～338

57 Guo Boling, Tan Shaobin. Global smooth solution for a coupled nonlinear wave

equation. Math Mech, in the Appl Sci, 1991, 14: 419～425

58 Guo Boling, Yang Linge. The global attractors for the periodic initial value problem for a coupled nonlinear wave equation. Math Mech Appl Sci, 1994, 19: 131～144

59 Appert K, Vaclavik J. Dynamic of coupled solitons, Physics Fluids, 1997, 20: 1845～1949

60 Makhankov V G. Dynamics of classical solitons. Phys Reports Physics Lett. C 35 (1), 1978

61 Gibbons J. On the theory of Langmuir solitons. J Plasma Phys, 1977, 17(2): 153～170

62 Guo Boling. Existence and uniqueness of the global solution of the Cauchy problem and the periodic initial value problem for a class of the coupled system of KdV nonlinear Schrödinger equations. Acta Math Sinica, 1983, 26(5): 513～532

63 Guo Boling, Chen Fengxin. Finite dimensional behavior of global attractors for weakly damped and forced KdV equations coupling with nonlinear Schrödinger equations. Nonlinear Analysis, TMA, 1997, 29(5): 569～584

64 Berger M, Chen Y. Symmetric vortices for the Ginzburg-Londau equations of superconductivity and the nonlinear desingularization phenomenon. J Funct Anal, 1984, 82: 259

65 Chapman S J, S. D. Howinson Gckendon J R. Macroscopic models for superconductivity. SIAM Rev., 1992, 34(4): 529

66 Yang Y. Exitence, reqularity and asymptotic behavior of the solution to the Ginzburg-Landau equations on R^3. Comm Math Phys, 1984, 123(1): 141

67 Guo Boling, Wu Yonghui, *Finite-dimensional behavior of the Ginzburg-Landau* for superconductivity. Progress in Natural Science, 1995, 5(6). 658～667

68 Landau L, Lifshitz E. Electrodynamique des Milieux Continus, Course de Physique The'orique. Tome Ⅷ, Ed Mir, Moscow: 1969

69 Guo Boling, Hong Mingchun. The Landau-Lifshitz equations of the ferromagnetic spin chain and harmonic maps. Calc Var PDE 1, 1993, 311～334

70 Guo Boling, Wang Youde. Generalized Landau-Lifshitz systems of ferromagnetic spin chain type and harmonic maps. Science in China, 1996, 26(A): 800～810

71 Chen Yunmei, Guo Boling. Two dimensional Landau-Lifshitz equations. J PDE, 1996, 9: 313～322

72 Guo Boling, Ding Shijin. Initial-boundary value problem of Landau-Lifshitz system(Ⅰ), (Ⅱ). Progress in Nat Sci, 1998, 8(1): 11～23; 1998, 8(2): 147～151

73 Nakamura K, Sasada T. Soliton and wave trains in ferromagnets. Phys Lett.

1974,48A:321～522

74 Lakshmanan M,Nakauma K. Landau Lifshitz equations of ferromagnetism: Exact treatment of the gilbert damping. Phys Rev Lett 1984,53(6):2497～2499

75 Zakharov V E,Takhtajan L A. Equivalence of nonlinear Schrödinger equation and heisenberg ferromagnet. Theor Math Phys,38,1979

76 Zhou Yulin,Guo Boling. Nonlinear partial differential equations in physics and mechanics. In: Chaohao Gu,Xiaxi Ding,Chung-Chun Yang. Partial Differential Equation in China. Kluwer Academic Publishers,1994,127～159

77 Zhou Yulin,Guo Boling,Tan Shaobin. Existence and uniqueness of smooth solution of system of ferromagnetic chain. Science in China,1991,34A:257～266

78 Ghidaglia J M, Marison M, Temam R. Generalization of the Sobolev-Lieb-Thirring inequalities and applications to the dimensions of attractor. Diff and Int Eqs,1988,1(1):1～21

79 Schoen R,Yan S T. Differential Geom. Academic press,Sinica;1988

80 Temam R. Inifinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Berlin,Springer-Verlag,1988;Second Edition. 1997.

81 Gao Hongjun, Duan Jinqiao. On the initial value problem for the generalized Ginzburg-Landau equation. J Math Anal Appl Appl. ,216,1997,536～548

82 Guo Boling,Li Yongsheng. Global attractor for the derivative 2D Ginzburg-Landau equation in an unbounded domain. to appear.

83 Foias C,Manley O,Temam R. On the interaction of small and large eddies in two dimensional turbulent flows. Math Model Numer Analysis,1988,22:93～114

84 Kraichnan R H. Inertial ranges in two-dimensional turbulence. Phys Fluids,1967,10:1417～1423

85 Foias C,Temanm R. The connection between the Navier-Stokes equations dynamical systems and turbulence. In:Grandall M G,Rabindowitz P H,E. E. L. Turner, Directions in Partial Differential Equation,1987,55～73

86 Constantin P,Foias C,Manley O,et al,Determining modles and fractal dimension of turbulent flows. J Fluid Mech,1985,150:427～440

87 Constantin P,Foias C. Global Lyapunov exponents,Kaplan-Yorke formules and the dimensions of attractors for two Navier-Stokes equations. Comm Pure Appl Math,1985,38:1～27

88 Constantin P,Foias C,Temam R. On the dimension of the attractors in two-dimensional turbulence. Phys. D,1988,30:284～286

89 Babin A,Vishik M I. Attractors of partial differential equations and estimates of their dimension. USP Math Nauk 1983,38:133～187

90 Ghidaglia J M, Temam R. Lower bound on the dimension of the attractor for the Navier-Stokes equations in space dimension 3. In: Francaviglia M Mechanics, Analysis and Geometry: 200 Years after Lagrange Amsterdam: Elsevier, 1990

91 Foias C, Sell G R, Temam R. Varites inertilles des equations differentielles dissipatives. C R Acad. Sci Paris Ser I Math, 1985, 301: 139～142

92 Chow S N, Lu K. Invariant for flows in Banach spaces. J Diff Eqs, 1988, 74: 285～317

93 Mallet-Paret J, Sell G R. Inertial manifolds for reaction-diffusion equations in higher space dimensions. J Amer Math Soc, 1988, 1: 805～866

94 Constantin P, Foias C, Nicolaenko B, et al. Integral and inertial manifolds for dissipative partial differential equations. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New york. 70: 1988

95 Bernal A R. Inertial manifolds for dissipative semiflows in Banach spaces. Applicable Analysis, 1990, 37: 95～141

96 Demengel F, Ghidaglia J M. Inertial manifolds for partial differential evolution equations under time discretization: existence, convergence and applications. J Math Anal and Appl, 1991, 155: 177～225

97 Debussche A, Temam R. Inertial manifolds and their dimension. In: Anderson S I, Anderson A E, Ottason O. Dynamical Systems, Theory and Applications World Scientific Publishing Co. 1993

98 Debussche A. Inertial manifolds and Sacker's equation. Diff. and Integral Eqs, 1990, 3(3): 467～486

99 Fabes E, Luskin M, Sell G R. Construction of inertial manifolds by elliptic regularization. Diff J Eqs, 1991, 89(2): 335～381

100 Debussche A, Temam R. Inertial manifolds and the slow manifolds in meteorology. Diff. and Integral Eqs, 1991, 4(5): 897～931

101 Sell G R, You Y. Inertial manifolds: the nonself adjoint case. J Diff Eqs, 1992, 96: 203～255

102 Robinson J C, Inertial manifolds and the cone condition. Dyn Syst Appl, 1993, 2: 311～330

103 Conway E, Hoff D, Smoller J. Large time behavior of solution of nonlinear reaction diffusion equations. SIAM J Appl Math, 1978, 35: 1～16

104 Mane R. Reduction of semilinear parabolic equations to finite dimensioal C^1 flows, Geometry and Topology. Lect Notes in Math, Springer-Verlag, New York: 1977, 597: 361～378

105 Mora X. Finite dimensional attracting manifold for damped semilinear wave equa-

tions, Contr. to Nonlinear Partial Diff. Eqs. (I. Diaz and P. L. Lions Eds), Longmans Green, New York, 1983, 172～183.

106 Foias C, Nicolaenko B, Sell G R, et al. Inertial manifolds for the Kuramoto-Sivashinsky equation and an estimate of their lowest dimension. J Math Pares Appl, 1988, 67: 197～226

107 Temam R, Wang X. Estimates on the lowest dimension of inertial manifolds for KS equation in the general case. Diff Int Equ, 1994, 7(4): 1095～1108

108 Nicolaenko B. Inertial manifolds for models of compressible gas dynamics. The Connection between Infinite Dim. and Finite Dim. Dyn. Syst., Contemporary Math, 1989, 99: 165～180

109 Jolly M S. Explicit Construction of an inertial manifold for a reaction diffusion equation. J Diff Eqs, 1989, 38(2): 220～261

110 Taboada M. Finite dimensional asymptotic behavior for the Swift-Hohenberg model of convection. Nonlinear Analysis, T M A, 1990, 1: 43～54

111 Bates P W, Zhang S. Inertial manifolds and inertial sets for the phase-field equations. J of Dy Diff Eq, 1992, 4(2): 375～398

112 Kwak M. Finite dimensional inertial forms for the 2D Navier Stokes equations. Indiana Univ Math J, 1992, 41: 927～981

113 Foias C, Manley O, Temam R. Sur l'interaction des petits et grands tourbillions dans less ecoulements turblents. C R Acad Sci Paris, 1987, I (305): 497～500

114 Jolly M S, Kevrekidis I G, Titi E S. Approximate inertial for the Kuramoto Sivashinsky equation: analysis and computations. Phys D 1990, 44: 38～60

115 Marion M, Approximate inertial manifolds for reaction diffusion equation in higher space dimension. J Amer. Math Soc, 1988, 1: 805～866

116 Marion M. Approximate inertial manifolds for the patterns formation Cahn-Hilliard equation. Math Modelling and Numerical Analysis, 1989, MIAN, 23: 463～480

117 Temam R. Attractors for the Navier-Stokes equations, localization and approximation. J Fac Sci Sec. 1A, Tokyo: 1989, 36: 629～647

118 Debussche A, Marion M. On the construction of families of approximate inertial manifolds. J Diff Eqs, 1992, 100(1): 173～201

119 Foias C, Temam R. Approximation of attractors by algebraic or analytic set. SIAM on Math Analysis, to appear.

120 Dubois T, Jauberteau F, Temam R. Solution of the incompressible Navier-Stokes equations by the nonlinear Galerkin methods. to appear in Journal of Comp. Phys.

121 Debussche A, Temam R. Convergent families of approximate inertial manifolds. J

Math Pures Appl, 1994, 73: 489～522

122 Glazier J A, Kolodner P. Interaction of nonlinear pules in convection in binary fluids. Phys Res A, 1990, 43(4): 4269～4280

123 Eckmann J P, Gallay Th. Front solutions for the Ginzburg-Landau equation. Comm Math Phys, 1993, 152: 221～248

124 Rosa R, Temam R. Initial manifolds and normal hyperbolicity. Acta Appl Math, 1996, 45: 1～50

125 Chen Fengxin, Guo Boling, Wang Ping. Long time behavior of strongly damped nonlinear wave equations. J Diff Eqs, 1998, 147(2): 231～241

126 Guo Boling. Initial manifolds for the generalized Kuramoto-Sivashinsky type equations. J Math Study, 1995, 28(3): 50～62

127 Guo Boling. Existence of the initial manifolds for generalized Kuramoto-Sivashinsky equation. J Math Study, 1996, 29(1): 38～51

128 Henry D. Geometric theory of semilinear parabolic equations. Lect Notes in Math, 840, Berlin, Springer-Verlag, 1981

129 Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equation. Berlin, Springer-Verlag, 1983

130 Guo Boling, Wang Bixiang. Gevrey regularity and approximate inertial manifolds for the derivative Ginzburg-Landau equation in two space dimensions, discrete and continuous dynamical systems. 1996, 3(4): 455～466

131 Guo Boling, Wang Bixiang. Finite dimensional behavior for the derivative Ginzburg-Landau equation in two spatial dimensions. Phys D 1995, 89: 83～99

132 Promislow K. Time analyticity and gevrey regularity for solutions of a class of dissipative partial differential equations. Nonlinear Analysis, TMA, 1991, 16: 959～980

133 Chen Shigang. Symmetry analysis of convect on patterns. Comm Theor Phys, 1982, 1: 412～426

134 Debussche A, Temam R. Inertial manifolds and their dimension, to appear in Proceedings of the Soderstorns Sommar Universitet, 1992.

135 Grinshaw R H. The modulation of an internal gravitywave packet and the resonance with the mean motion. Studies in Appl. Math, 1977, 56(3): 241

136 Benny D J. A General theory for interactions between short and long waves. Studies in Appl Math, 1977, 56: 81～94

137 Guo Boling. The Global solution for one class of the system of LS nonlinear wave interaction. J Math Res Exp, 1987, (1): 69～76

138 Guo Boling. The periodic initial value problems and initial value problem for one

class of generalized LS type equations. J Engineering Math,1991,8(1):47~53

139 Tsutsumi M,Hatano S. Well posedness of the Cauchy problem for the long-short wave resonance equation. Nonlinear Analysis,1994,TMA,22:151~171

140 Guo Boling,Miao Changxin. Well posedness of Cauchy problem for coupled system of the long short wave equations. J PDE,11(1):1998

141 Guo Boling,Chen Lin. Orbital stability of solitary waves of the long-short resonance equations. Math Meth Appl Sci,1998,21:883~894

142 Guo Boling,Wang Bixiang. The global solution and its long time behavior for a class of generalized LS type equations. Prog Natural Sci,1996,6(5):533~546

143 Guo Boling,Wang Bixiang. Approximation to the global attractor for Landau-Lifshitz equation of the ferromagnetic spin chain. Beijing mathematics,1995,1:164~176

144 Guo Boling,Wang Bixiang. Approximation to the global attractor for a nonlinear Schrödinger equation. Appl Math JCU,1996,11B:125~136

145 Foias C,Kukavica I. Determining nodes for the Karamoto-Sivashinsky equation. J Dyn Diff Eqs,1995,7(2):365~373

146 Yang Y. Global spatially-periodic solutions to the Ginzburg-Landau equation. Proc R Soc Edingburgh,1994,A,110:263~273

147 Guo Boling,Chang Qianshun. Attractors and dimensions for discretizations of a generalized Ginzburg-Landau equations. J PDE,1996,9(4):365~383

148 Zhou Yulin. Applications of discrete functional analysis to the finite difference method. International Academic Publishers,1990

149 Sulem C,Sulem P L. Quelques results de regularite pour les equations de la turbulence de Langmuir. C R Acad Sci Paris. 1979,289:173~176

150 Guo Boling,Shen Longjun. The existence and uniqueness of classical solution to the periodic initial value problem for Zakharov equations. Acta Math Appl Sinica, 1982,5(3):310~324

151 Guo Boling. The initial boundary value problem for generalized Zakharov system. Appl Math JCU,1994,9(1):1~11

152 Flahaut I. Attractor for the dissipative Zakharov system. Nonlinear Analysis. TMA,1991,16(7/8):599~633

153 Chang Qianshun,Guo Boling. Attractor and dimensions for discretizations of a dissipative Zakharov equations. to appear

154 Demengel F,Ghidaglia J M. Inertial manifolds for partial differential evolution equations under timediscretization: existence, convergence, and applications. J Math Anal Appl,1991,155:177~255

155 Guo Boling, Lu Bainian, Wan Guihua. Attractors for the spatially discreted Landau Lifshitz equation of ferromagnetic spin chain. to appear.

156 Lu Bainian, Fang Shaomei. Spectral and pseudoapectral methods for the ferromagnetic chain equations. Math Numer Sinica, 1998, 20(1): 1～15

157 Guo Boling. Nonlinear Galerkin methods for solving two dimensional Newton-Boussinesq equations. Chin Ann Math, 1995, 16 B(3): 379～390

158 Guo Boling, Chen Jingdong. Fully discrete nonlinear Galerkin method for two dimensional Newton-Boussinesq equations. to Appear.

159 Guo Boling, Lu Bainian. Spatiotemporal complexity of the cubic quintic Ginzburg Landau equation. to Appear.

160 Foias C, Temam R. Determination of the solution for Navier-Stokes equations of nodel value. Math Comput, 1984, 43: 117～133

161 Kukavica I. On the number of determining nodes for the Ginzburg-Landau equations. Nonlinearity, 1992, 997～1006

162 Kukavica I. An upper bound for the winding number for the solutions of the Ginzburg-Landau equation. Indiana Uni Math, 1992, 11(3): 825～836

163 Kukavica I. Hausdorff length of level sets for solutions of the Ginzgurg-Landau equation. Nonlinearity, 1991, 8: 113～129

164 Foias C, Temam R. Gevrey class regularity for the solutions of the Navier-Stokes equations. J Funct Anal, 1989, 87: 359～369

165 Federer H. Geometric measure theory. 1969

166 Gao Hongjun, Guo Boling. On the number of determining nodes for the generalized Ginzburg-Landau equation. J PDE, 1997, 10: 97～106

167 Li Y, Mclaughlin D W, Shatah J, et al. Persistent homoclinic orbits for a perturbed nonlinear Schrödinger equation. Comm Pure Appl Math, 1996, XLIX: 1175～1255

168 Kovacic G, Wiggins S. Orbits homoclinic to resonances, with in applications to chaos in a model of the forced and damped Sine-Gordon equation. Phys D, 1992, 57: 185～225

169 Kovacic G. Singalar perturbation theory for homoclinic orbits in a class of near integrable dissipative systems. SIAM J Math. Anal, 1995, 1511～1642

170 Kapitula T. Existence and stability of singular heteroclinic orbits for the Ginzburg-Landau equations. Nonlinerity, 1996, 9: 669～685

171 Alexander J, Gardner R, Jones C K R. A topological invariant arising in the stability of traveling waves. J Reine Angew Math 1990, 410: 167～212

172 Guo Boling, Jing Zhujun, Lu Bainian. Spatotemporal complexity of the cubic

Ginzburg-Landau equation. Comm on Nonl Sci & Num Simul 1996,2(2):7～14

173 Guo Bolong,Lu Bainian,Wan Guihua. Stability of traveling wave solutions of the derivative Ginzburg-Landau equations. CNSNS,1997,2(3):150～156

174 Grillakis M,Shatah J,Strauss W. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I. J Funct Anal,1987,74:160～197

175 Grillakis M,Shatah J,Strauss W. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. II. J Funct Anal,1990,94:308～348

176 Weinstein M I. Existence and dynamic stability of solitary wave solutions of equations arising in long propagation. Comm Partial Diff Eqs,1987,12:1133～1173

177 Souganidis P E,Strauss W A. Instability of a class of dispersive solitary waves. Proc Roy Soc Edinburgh,1990,A 114:195～212

178 Bona J L,Soyeur A. On the stability of solitary wave solutions of model equations for long waves. J Nonlinear Sci,1994,4:449～470

179 Millor J M,Weinstein M I. Asymptotic stability of solitary waves for the regularized long wave equation. Comm Pure Appl Math,1996,XLIX:399～441

180 Bouard A D,Saut J C. Solitary waves of generalized Kadomtsev-Petviashvili equation. 1995.

181 Bouard A D,aut J C. Remarks on the stability of generalized K P solitary waves. 1996

182 Wang X P. Ablowitz M,Segur H. Wave collapse and instability of solitary waves of a generalized nonlinear Kadomtsev-Petviashvili equation. Phys D,1994,78:241～265

183 Liu Yue,Wang Xiaoping. Nonlinear stability of solitary waves of a generalized Kadomtsev-Petviashvili equation. 1997

184 Guo Boling,Wu Yaping. Orbital stability of solitary waves of nonlinear derivative Schrödinger equations. J Diff Equ,1995,123(1):35～55

185 Guo Boling,Ding Shijin. Solitary waves for 2 dimensional Schrödinger-Kadomtsev-Petviashvili equations. to appear in Proc. Roy. Soc. London

186 Cipolatti R. On the existence of standing waves for a Davey-Stewartson system. Comm Part Diff Equ,1992(17):967～988

187 Ohta M. Stability of standing waves for the generalized Davey-Stewartson system. J Dyn Eqs,1994,6(2):325～334

188 Li Yongsheng,Guo Boling. Attractor for dissipative Zakharov equation an unbounded domain. Reviews in Math Phys,1997,9(6):675～687

189 Guo Boling,Tan Shaobin. Global smooth solution for nonlinear equation of hirota type. Science in China,Ser A. 1992,35(2):1425～1433

190 Guo Boling, Tan Shaobin, Long-time behavior for the equation of finite-depth fluids. Comm Math Phys, 1994, 163(1): 1～15

191 Guo Boling, Zhang Linghai. Decay of solution to magneto-hydrodynamics equations in two space dimensions. Prod R Soc Lond A, 1995, A, 449: 79～91

192 Guo Boling, Wu Yonghui. Global existence and nonexistence of solution of a forced nonlinear Schrödinger equation. J Math Phys, 1995, 36(7): 3479～3484

193 Guo Boling, Yuan Guangwei. Global smooth solution for the Klein-Gordon-Zakharov equations. J Math Phys, 1995, 36(8): 4110～4124

194 Guo Boling, Yuan Guangwei. On the suitable weak solutions for the Cauchy problems of the Boussinesq equations. Nonlinear Analysis TMA, 1996, 26(8): 1367～1385

195 Guo Boling, Yuan Guangwei. The Cauchy problem for the system of Zakharov equations arising from ionacoustic models. Proc Roy Edin, 1996, 126A: 811～820

196 Guo Boling, Su Fengqiu. Global weak solution for the Landau-Lifshitz-Maxwell equation in three dimensions. J Math Anal Appl, 1997, 211: 326～346

197 Guo Boling, Han Yongqian. Remarks on the generalized Kadomtsev-Petvishvili equations and two dimensional Benjamin-Ono equations. Proc R Soc Lond A, 1996, 452: 1585～1595

198 Guo Boling, Han Yongqian. Cauchy problem of nonlinear Schrödinger-Boussiness equation in L^2 and H^1. Nonlinear Analysis, TMA, to appear.

199 Nicolaenko B, Shearor B, Temam R. Attractors for the Karamoto-Sivashinsky equations. A M S. SIAM, Lectures in Applied Mathematics, 1986, 23: 149～170

200 Foias C, Manley G, Temam R. Attractors for the Benard problem, existence and physical bound on their fractal dimension. nonlinear Anal. 1987, TMA 11: 939～967

201 Guo Boling. Spectral method for solving two dimensional Newton-Boussinesq equations. Acta Math Appl Sinica, 1989, 5(2): 208～218

202 Guo Boling, Wang Bixiang. Approximate inertial manifolds to the Newton-Boussinesq equations. J PDE, 1996, 9: 237～250

203 Yin Yan. Attractor and dimensions for discretizations of a weakly damped Schrödinger equation and a Sibe-Gordon equation. Nonlinear Analysis, TMA, 1993, 20(12): 1417～1452

204 Guo Boling, Su Fengqiu. The global solution for Landau-Lifshitz-Maxwell equation, to appear.

205 A. Doelman. Slow time-periodic solutions of the Ginzburg-Landau equation. Physics D, 1989, 40: 156～172

206 Keefe L R. Dynamics of perturbed waretrain solutions the Ginzburg-Landau equation. Stud in Appl Math, 1985, 73: 91~153

207 Fenichel N. Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows. Indiana Univ Math J 1971, 21: 193~226

208 Vanderbanwhede A, G. Looss. Center-manifold in infinite. Dynamics Report, 1, 125-162. Springer Verleg, Berlin, 1992

209 Benjamin T B. The stability of solitary waves. Proc Roy Soc London, Ser A, 1972, 328: 153~183

210 Bona J L. On the stability theory of silitary waves. Proc Roy Soc London, Ser A, 1975, 344: 363~374

211 Pego R L, Weinstein M I. Eigenvalues and instabilities of solitary waves. Philos Trans Roy Soc London, Ser A, 1992, 340: 47~94

212 Jan Pruss. On the spectrum of co-semigroups. Trans. Amer Math Soc, 1984, 284: 847~857

213 Collet P, Eaknam J P, Epstein H, et al. Analyticity for the Karamoto-Sivashinsky equation. Phys D, 1993, 67: 321~326

214 Constantin P, Foias C, Nicolaenko B, et al, Spectral barriers and inertial manifolds for dissipative partial differential equations. J Dyn Diff Equ, 1988, 1: 41~53

215 Massatt P. Limiting behavior for strongly damped nonlinear waves equations. J Diff Equ, 1983, 48: 334~349

216 Chidaglia J M. A note on the strong convergence towards attractors for damped forced KdV equation. J Diff Eqs, 1994, 110: 356~359

217 Aubin T. Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampere Equations, Spring-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982

218 Hale J K. Asymptotic behavior of dissipative systems, Math. Surveys and Monographs. Amer Math Soc, Providence, RI, 1988, 25

219 Kato T. Studies in applied mathematics. Advances in Math Supp Studies. 1983 8: 93~128

220 Cazenave T. An introduction to nonlinear Schrödinger equations. Textos de Metodos Metematices, 1989, 22

221 Babin A V, Vishik M I. Attractor of Evolution Equations. Studies in Math. and its Appl, North-Holland, Amsterdam, London, New York, Tokyo: 1992, 25

222 Wang Bixiang, Guo Boling. Attractors for the Davey-stewertson systems in R^2. J Math Phys 1997, 38(5): 2524~2534

223 Guo Boling, Wang Bixiang. Upper semicontinuity of attractors for the reaction-diffusion equation. Acta Math Scientia, 1998, 18(2): 146~157

224 Gao Hongjun, Guo Boling. Global dynamics and contral of a nonlinear body equation with strong structural damping. Acta Math Sinica, 1998, 14(2): 183～190

225 Guo Boling, Wu Yaping. Global attractor and its dimension estimates for the generalized dissipative KdV equation on R. Acta Math Appl Sinica, 1998, 14(3): 252～259

226 Guo Boling, Jing Zhujun, Lu Bainian. Slow timeperiodic solutions of cubic quintic Ginzburg-Landau equation(Ⅰ). Prog Nat Sci, 1998, 8(4): 403～415

227 Guo Boling, Wang Bixiang. Gevrey class regularity and approximate inertial manifolds for the Newton-Boussinesq equations. Chin Ann Math, 1998, B(2): 179～188

228 Chen Yunmei. Ding Shijin, Guo Bolong. Partial regularity for two dimensional Landau-Lifshifz equations. Acta Math Sinica, 1998, 14(3): 423～432

229 Guo Boling, Miao Changxin. Well posedness of Cauchy problem for coupled system of long-short wave equations. J PDE, 1998, 11(1): 83～96

230 Guo Boling, Miao Chandxin, Huang Haiyang. Global flow generated by coupled system of Schrödinger-BM system equations. Science in China, Ser A, 1998, 41(2): 131～138

231 Hale J. Ordinary Differential Esuations. Robert E. Krieger Publishing Co Inc Huntington, N Y, 1980

232 Melanghlin D, Overman E A. Wiskered fori for integrable PDE's: Chaotic behavior in near integrable PDE's. Sarveys in Applied Mathematics, Plenum, New York: 1995, 1: 83～203

233 Saarloos W Van, Hohenberg P C. Fronts, pulses, sources and sinks in generalized complex Ginzburg-Landau equations. Phys D, 1992, 56: 303～367

234 Tsutsuni M, Fukuda I. On solutions of the derivative nonlinear Schrödinger equation. Funh, Ehv, 1980, 23: 259～277

235 Besov O V, Il'in V P, Nikolskin S M. Integral Representations of Functions and Imbeddings Theorems. J Wiley, 1. 1978

236 Lions P L. The concentration compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, Ⅰ and Ⅱ, Ann. I. H. P. Analyse Non Linéaire, 1984, Ⅰ: 104～145, 223～283

237 Cazenave T. An introduction to nonlinear Schrödinger equaticns. Textos de Métodos Mathemáticos. 22, 1989

238 Pego R L, Weinstein M I. Asymptotic stability of solitary waves. Comm Math Phys, 1994, 164: 305～349

239 Aubin T. Nonlinear Analysis on Manifolds, Monge-Ampers equations. Springer-

Verleg,New York:1982

240 Cipolatt: R. On the existence of standing waves for a Davey-Stewartson system. Comm P D E,1992,1:967~988

241 Guo Boling,Li Yongsheng. Attractor for dissipative Klein-Gordo-Schrödinger equations in R^3. J Diff Eqs,1997,126(2):356~377

242 Guo Boling,Wang Bixiang. Attractor for the lingshort wave equations. J PDE, 1998 11:361~383

243 Schoen R,Yan S T. Differential Geom. Academic Press,Sinica,1998

244 Constantin P,Foias C,Temam R. Attractors Representing Turbulent Flow. Memoirs of AMS,1985,53(314)

245 Nicolaenko B,Scheurer B,Temam R. Some global dynamical properties of the Kuramoto-Sivashinshy equation;Nonlinear stability and attractors. Physics D,16, 1985,155~183

246 Foias C,Temam R. Remarques sur les equations de Navier-Stohes stationnaires et les phènomènēs Successifs de bifurcation,Annali Scuola Norm Sup pisa,1978,4 (5):29~63

247 Boling Guo,LIN CHEN. Orbital stability of solifary waves of coupled KDV equations. Diff. Int. Equ. ,1999,12(3) 295~308

248 Min Qian,Wan Xin Qin,Shu Zhu. one dimensional global attractor for discretization of the dampeel driven Sine-Gordon equation. Nonlinear Analysis, TMA, 1998,34(7):941~951

249 He yinnian,Li kaitai. Nonlinear Galerkin approximation of the two dimensional exterior Navier-Stokes problem. Discrete and Continuous Dynamical systems, 1998,2(4):467~482

250 Zhao yi. The approximate weak inertial manifolds of a class of nonlinear hyperbolic dynamical system. Science in China,1996,39(7):694~708